



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^6 3^{13} 5^{11}$ ,  $bc$  делится на  $2^{14} 3^{21} 5^{13}$ ,  
+  $ac$  делится на  $2^{16} 3^{25} 5^{28}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $AC$  в точке  $A$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $E$ , а катет  $BC$  – в точке  $F$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AB : BD = 1,4$ . Найдите отношение площади треугольника  $ACD$  к площади треугольника  $CEF$ .

3. [4 балла] Решите уравнение  $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$ .

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$+ \log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4(0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3} (11^{-13}) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0;0)$ ,  $P(-15;90)$ ,  $Q(2;90)$  и  $R(17;0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$ .

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 180,  $SA = BC = 20$ .

а) Найдите произведение длин медиан  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$ .

б) Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 6$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 8.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№1

Давайте рассматривать каждый простой делитель  
по отдельности  $\deg(e)_2$  — степень вхождения

2 в  $e$ , то есть если  $\deg(e)_2 = k$  то  
 $e = 2^k$ , но  $e \nmid 2^{k+1}$ .

Хорошо, тогда заметим, что:

$$\deg(a)_2 + \deg(b)_2 \geq 6$$

$$\deg(b)_2 + \deg(c)_2 \geq 14$$

$$\deg(a)_2 + \deg(c)_2 \geq 16$$

тогда  $\deg(a)_2 + \deg(b)_2 + \deg(c)_2 \geq 16 + 14 + 6 = 36$   
то есть  $abc \mid 2^{18}$

Проделаем ту же операцию с 3 и 5.

теперь для 3:  $\frac{13 + 21 + 25}{2} = \frac{59}{2}$ , но

мы знаем, что степень вхождения должна  
быть целой, а  $\deg(abc)_3 \geq \frac{59}{2}$ , значит

$$\deg(abc)_3 \geq \frac{60}{2} = 30$$

$\deg(abc)_5 \geq \frac{11 + 13 + 28}{2} = \frac{52}{2} = 26$ , но при этом заметим

что  $\deg(5 \mid a)_5 \geq 28$ , а  $\deg(a)_5 + 2\deg(b)_5 + \deg(c)_5 \geq 11 + 13 = 24$   
значит не сойдутся

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Значит  $\deg(abc)_5 \geq \frac{28+28}{2} = 28$ . ( $\deg(abc)_5 \geq \deg(bc)_5 \geq 28$ ).  
тогда  $abc: 5^{28}$ ,  $abc: 3^{30}$ ,  $abc: 2^{18}$ ,  
значит  $abc: 5^{28} \cdot 3^{30} \cdot 2^{18}$ .  
Значит минимальное  $abc = 5^{28} \cdot 3^{30} \cdot 2^{18}$ .

Пример на 70 число;

$$a = 2^4 \cdot 3^9 \cdot 5^{14}$$

$$b = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^0$$

$$c = 2^{12} \cdot 3^{17} \cdot 5^{14}$$

$$\text{тогда } ab = 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{14} ; 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{14}$$

$$bc = 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{14} ; 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13}$$

$$ac = 2^{16} \cdot 3^{26} \cdot 5^{28} ; 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28}$$

а  $abc = 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$ , значит минимал достигается

$$\text{Ответ: } abc = 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$$

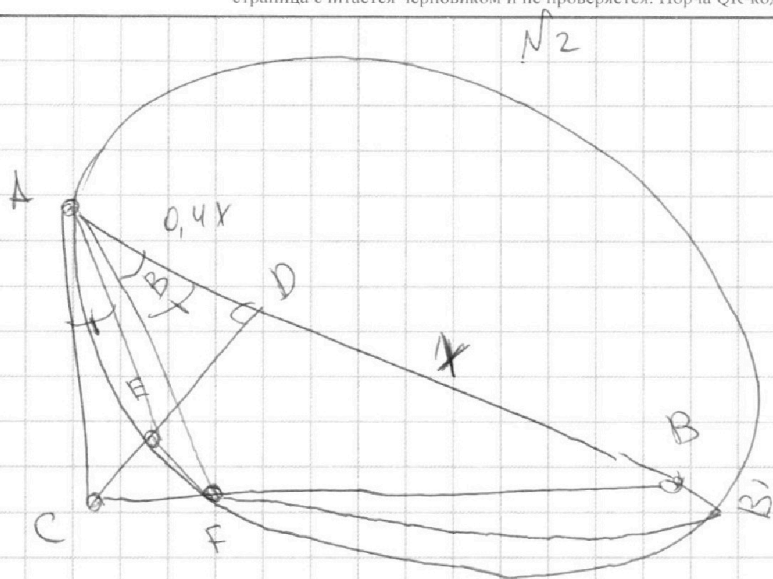
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{AB}{BD} = 1,4 \quad , \text{ пусть } BD = x, \text{ тогда } AB = 1,4x,$$
$$\text{а значит } AD = 0,4x$$

$$\triangle ADC \sim \triangle CDB \Rightarrow \frac{AD}{CD} = \frac{CD}{DB} \Rightarrow$$

$$CD = \sqrt{AD \cdot DB} = \sqrt{0,4x \cdot x} = \sqrt{0,4}x.$$

$\angle CFE = \angle CBD$  из параллельности.

пусть ~~EF = kx~~,

$$\text{пусть } \triangle CEF \sim \triangle CDB \Rightarrow$$

$$\frac{CE}{CD} = \frac{CF}{CB} = k \quad \text{пусть } CB \text{ это равно } k.$$

$$\text{тогда } CE = k \cdot x \sqrt{0,4}$$

$$EF = k \cdot x$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что

$$\angle CAB = \angle FB'A + \angle BAF$$

это равно

$$\angle EAB \quad \text{т.к. } \triangle EAB'F -$$

равнобедренная  
треугольница  
 $B'A \parallel EF$

значит  $\angle CAB = \angle EAB + \angle BAF$

$$\angle CAF = \angle EAB,$$

значит  $\angle CAE = \angle BAF$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

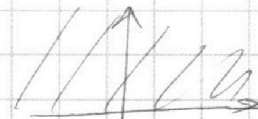
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N3

$$\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$



$$0 \leq \alpha \leq \cos \leq \pi$$

$$10 \arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = 9\pi - 2x$$

$$10\left(\frac{\pi}{2} - x + 2\pi n\right) = 9\pi - 2x$$

$$5\pi - 10x + 20\pi n = 9\pi - 2x$$

$$-4\pi + 20\pi n = 8x$$

$$x = -\frac{\pi}{2} + \frac{20\pi n}{8}$$

$$-\frac{\pi}{2} + \frac{5\pi n}{2}$$

$$0 \leq \frac{\pi}{2} - x + 2\pi n \leq \pi$$

$$0 \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi n + \frac{\pi}{2} - \frac{5\pi n}{2} \leq \pi$$

$$0 \leq \pi + 2\pi n - \frac{5\pi n}{2} \leq \pi$$

$$0 \leq 1 + 2n - 2,5n \leq 1$$

$$-1 \leq -0,5n \leq 0$$

$$n = 0, 1, 2$$

$$x = -\frac{\pi}{2}, 2\pi, \frac{3\pi}{2}$$

~~$$10\left(\frac{\pi}{2} - x + 2\pi n\right) = 9\pi - 2x$$~~

$$10\left(-\frac{\pi}{2} - x + 2\pi n\right) = 9\pi - 2x$$

$$-5\pi + 10x + 20\pi n = 9\pi - 2x$$

$$12x = \frac{14\pi + 20\pi n}{12}$$

~~$$x = \frac{14\pi + 20\pi n}{12}$$~~

$$\frac{14\pi}{12} + \frac{20\pi n}{12}$$

$$0 \leq -\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2\pi n \leq \pi$$

$$0 \leq x - \frac{\pi}{2} + 2\pi n \leq \pi$$

$$0 \leq \frac{14\pi}{12} - \frac{\pi}{2} + \frac{20\pi n}{12} + 2\pi n \leq \pi$$

$$0 \leq 14 - 6\pi - 20\pi n + 24\pi n \leq 12\pi$$

$$0 \leq 8\pi + 4\pi n \leq 12\pi$$

$$0 \leq 8 + 4n \leq 12$$

$$-8 \leq 4n \leq 4$$

$$-2 \leq n \leq 1$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Знаки

$$n = -2, -1, 0, 1$$

$$x = \frac{14\pi}{12} - \frac{20\pi n}{12}$$

$$n = 1$$

$$\frac{14\pi}{12} - \frac{20\pi}{12} = \frac{6\pi}{12} = -\frac{\pi}{2}$$

$$n = 0$$

$$\frac{14\pi}{12} = \frac{7\pi}{6}$$

$$n = -1$$

$$\frac{14\pi}{12} + \frac{20\pi}{12} = \frac{34\pi}{12} = \frac{17\pi}{6}$$

$$n = -2$$

$$\frac{14\pi}{12} + \frac{40\pi}{12} = \frac{54\pi}{12} = \frac{9\pi}{2}$$

Ответ:

$$x = \left[ \begin{array}{l} -\frac{\pi}{2} \\ 2\pi \\ \frac{5\pi}{2} \\ \frac{17\pi}{6} \\ \frac{7\pi}{6} \\ \frac{9\pi}{2} \end{array} \right]$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N4

посмотрим на 2 часть. Заметим,  
ко выражение равно 0, когда ~~оно равно~~ адия  
из частей равна 0.

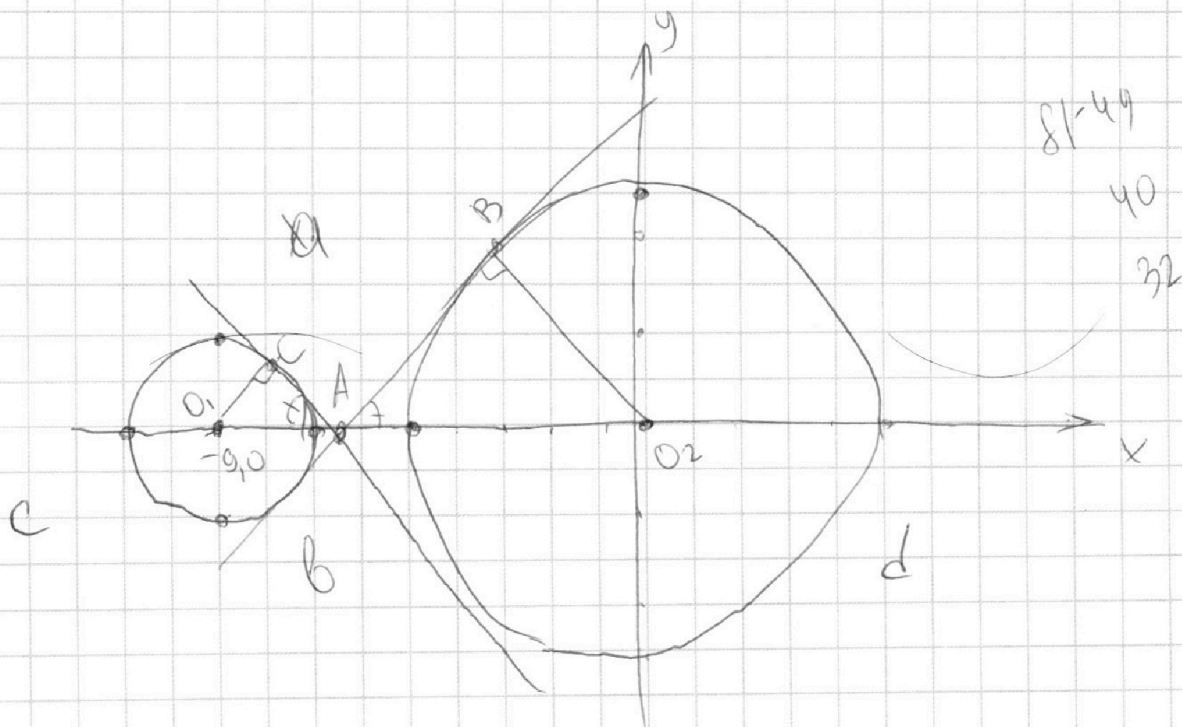
$$x^2 + y^2 - 25 = 0$$

$$x^2 + y^2 = 25$$

$$x^2 + y^2 + 18y + 77 = 0$$

$$x^2 + (y+9)^2 = 4$$

Заметим, что это окружности с радиусами  
5 и 2, и с центрами  $(0,0)$   $(0,-9)$  соответ-  
ственно.



Заметим, что первое выражение задает прямую

$$5x + 6ay - b = 0 \Rightarrow 6ay = b - 5x \Rightarrow y = \frac{b}{6a} - \frac{5x}{6a}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

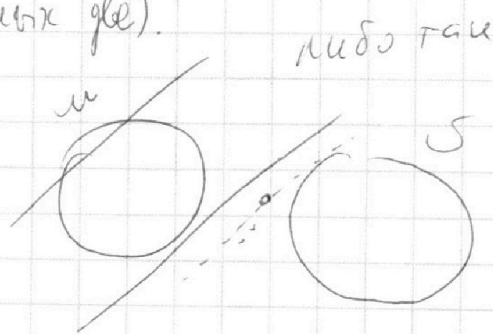
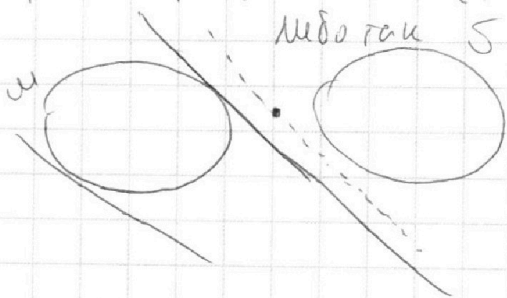


1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что прямая пересекает окружность максимум  
в 2 точках, а так как должно быть и точки  
пересечения, то каждую окружность наша прямая  
~~будет~~ пересекает в 2 точках. Заметим, что выбирая  
случай  $a$ , мы находим наклон прямой, а выбирая  
 $b$ , можем поднимать или опускать эту прямую до нужного  
места. Давайте проверим 2 ~~варианта~~ общие внутренние  
касательные. Заметим, что если мы сдвинем нашу  
прямую так, чтобы она проходила через точку  $A$ ,  
и ее концы попадают в промежутки  $a$  и  $b$ ,  
то эта прямая ни при каком параллельном переносе  
не будет пересекать обе окружности в двух точках.  
Действительно, поворачивая нашу прямую так, чтобы  
она касалась  $\omega$  (таких прямых две).



Заметим, что окружность  $\sigma$  будет находиться  
там, где показано на рисунке.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

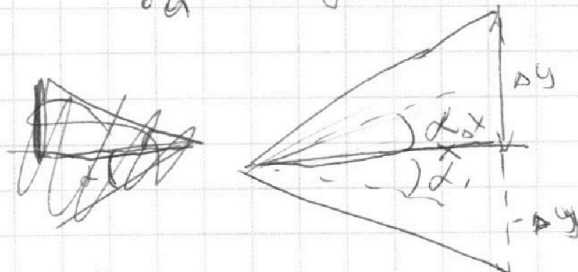
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



4) так как кривой мн. показана прямая проходящая через  $A$  и параллельная этой касательной мн. коническим, то на касательная касается оуп.  $B$  макс в одной точке. А значит оупская мн. достигнет макс. значения, мн. достигнет значения макс.  $B$ . то есть такой экстрем не существует.

теперь заметим, что если конуса будут лежать внутри области  $C$  и  $D$ , то эта окружность прямая пересечет оуп.  $B$  в 2 точках / ну или не пересечет прямая, проходящая через  $A$ , т.е. она не совпадает с оуп. касательной (оуп. касательная не может быть тангентой, это доказано выше), она пересекает обе оуп.  $B$  в двух точках.

иже  $y' = \frac{-5}{6a} = \text{tg } \alpha$  ~~теперь тангентой~~



$-\frac{\Delta y}{\Delta x} \in \frac{-5}{6a} \in \frac{\Delta y}{\Delta x}$  (вот все, что происходит)

(отрицательный знак, т.е. сама кас. не может)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Найдем координаты  $A$ .

$\triangle ACO_1 \sim \triangle ABO_2$ , значит.  $(AO_1 + AO_2 = 9)$

$$\frac{O_1C}{O_2B} = \frac{AO_1}{AO_2}$$

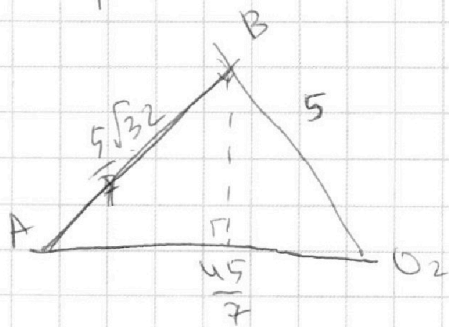
$$\frac{2}{5} = \frac{AO_1}{AO_2}$$

$$\frac{2}{5} AO_2 = \frac{4}{5} AO_1$$

$$9 = AO_2 + AO_1 = AO_2 + \frac{2}{5} AO_2 = \frac{7}{5} AO_2$$

$$\frac{45}{7} = AO_2$$

значит  $A = \left(0, -\frac{45}{7}\right)$



$$AB = \sqrt{\left(\frac{45}{7}\right)^2 - 5^2} =$$
$$5 \sqrt{\frac{81}{49} - 1} =$$
$$5 \sqrt{\frac{32}{49}}$$

$$5 \sqrt{\frac{32}{49}} \cdot 5 = \frac{45}{7} \cdot h$$

$$h = \frac{5 \cdot 5 \cdot \sqrt{\frac{32}{49}}}{\frac{45}{7}} = \frac{25\sqrt{32}}{45} = \frac{5\sqrt{32}}{9}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:

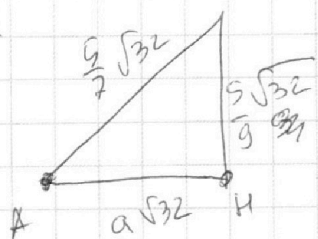
- 1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



4)



$$a = \sqrt{\left(\frac{5}{7}\right)^2 - \left(\frac{5}{9}\right)^2} =$$

$$a = \sqrt{\frac{25}{49} - \frac{25}{81}} = 5 \sqrt{\frac{81 - 49}{81 \cdot 49}} =$$

$$\frac{5}{63} \sqrt{32}$$

$$AH = \sqrt{32} \cdot \frac{5}{63} \cdot \sqrt{32} = \frac{32 \cdot 5}{63}$$

тогда:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{5}{9} \sqrt{32}}{\frac{32 \cdot 5}{63}} = \frac{7}{63 \cdot \frac{5}{9} \cdot \sqrt{32}} = \frac{7}{9 \cdot 32 \cdot 5} = \frac{7}{\sqrt{32}}$$

$$-\frac{7}{\sqrt{32}} < -\frac{5}{6a} < \frac{7}{\sqrt{32}}$$

↓

↑

$$-\frac{32}{\sqrt{7}} > \frac{6a}{-5} > \frac{1}{\frac{7}{\sqrt{32}}}$$

$$-\frac{32}{\sqrt{7}} < \frac{6a}{5} < \frac{\sqrt{32}}{7}$$

$$-\frac{5 \cdot \sqrt{32}}{6 \cdot 7} < a < \frac{5 \cdot \sqrt{32}}{6 \cdot 7}$$

$$-\frac{5\sqrt{8}}{21} < a < \frac{5\sqrt{8}}{21}$$

Ответ:  $a = \left(-\frac{5\sqrt{8}}{21}, \frac{5\sqrt{8}}{21}\right)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$x \neq 1, x > 1 \log_{11} x \neq 0$   $N \neq 0,5y \neq 1$   $0,5y > 0 \log_{11} 0,5y \neq 0$

$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_x 11^{-2} - 5$   $\log_{11}^4(0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,5y} 11^{-13} - 5$

$\log_{11}^4 x - \frac{6}{\log_{11} x} = -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\log_{11} x} - 5$   $\log_{11}^4(0,5y) + \frac{1}{\log_{11}(0,5y)} = -\frac{13}{3} \frac{1}{\log_{11}(0,5y)} - 5$

умножим на  $3 \log_{11} x$   $(\log_{11} x \neq 0, \text{ можем})$   $\log_{11}^4(0,5y) + \frac{1}{\log_{11}(0,5y)} = -\frac{13}{3} \frac{1}{\log_{11}(0,5y)} - 5$   
 умножим на  $3 \log_{11}(0,5y)$   $(\log_{11}(0,5y) \neq 0, \text{ можем})$

$3 \log_{11}^5 x - 18 = -2 - 15 \log_{11} x$

$3 \log_{11}^5(0,5y) + 3 = -13 - 15 \log_{11}(0,5y)$

$3 \log_{11}^5 x + 15 \log_{11} x = 16$

$3 \log_{11}^5(0,5y) + 15 \log_{11}(0,5y) = -16$

Заметим что если  $\log_{11} x$  растёт то функция слева растёт, если уменьшается, то уменьшается. Значит

оба выражения имеют <sup>максимум</sup> на одном корню. Заметим  $\log_{11} x \neq 0$

(~~то~~  $3a^5 + 15a = B(a+k)^5 + 15(a+k)$  если  $k \neq 0$ . В противном случае)

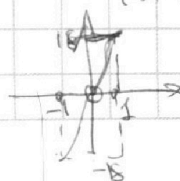
значит наименьшее значение достигается ровно в одной точке

если же функция убывает если  $a = 0$ , но если

$a = 0$  то  $3 \cdot a^5 + 15a = 0 \neq 16$ , значит это не имеет решения) и  $3a^5 + 15a = 0 \neq -16$ , значит  $a$

если  $a = 1$   $3a^5 + 15a = 3 + 15 > 18$  и  $a = -1$   $3a^5 + 15a = -18 < -16$

тогда функция такая:



значит значения 16 и -16 достигаются

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1    2    3    4    5    6    7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



но заменим, это если

$$3a^5 + 15a = 16, \quad \text{то} \quad 3(-a)^5 + 15(-a) = -16.$$

значит

$$\begin{aligned} \log_{11} x &= a & \text{и} & \quad \log_4(0,5y) = -a \\ \log_{11} x &= \log_{11} 11^a & & \quad \log_4(0,5y) = \log_{11} 11^{-a} \\ x &= 11^a & & \quad 0,5y = 11^{-a} \end{aligned}$$

тогда  $(0,5y) \cdot x = 11^a \cdot 11^{-a} = 1$

$$xy = 2(xy \cdot 0,5) = 1 \cdot 2 = 2$$

Значит  $xy=2$  для и это ср. значение.

Ответ:  $xy=2$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



1,3

$$3 \log_{11}^5 x + 15 \log_{11} x - 16 = 0$$

$$3 \log_{11}^5(0,5y) + 15 \log_{11}(0,5y) + 16 = 0$$

$$\log_{11} x = a$$

$$\log_{11} x = \log_{11} 11^a$$

$x = 11^a$

$$\log_{11}(0,5y) = -a$$

$$0,5y = 11^{-a}$$

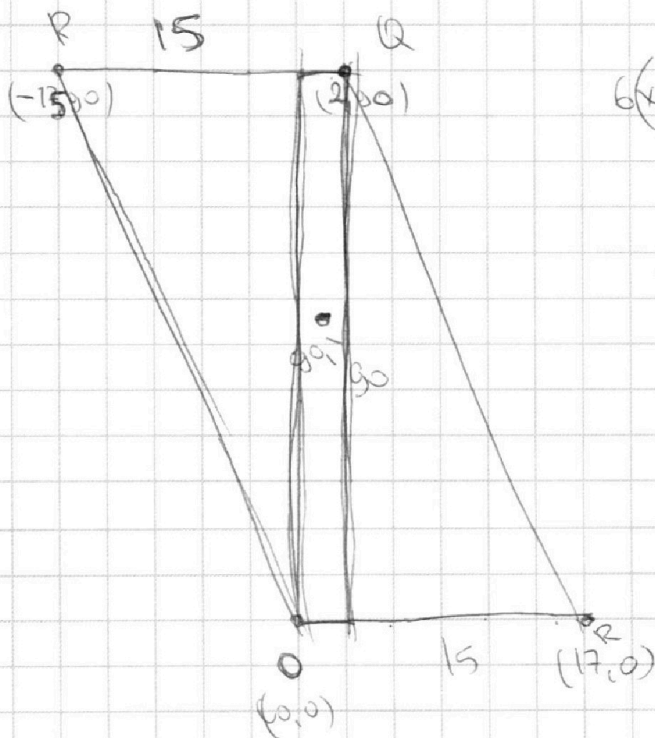
$$0,5xy = 11^{-a} \cdot 11^a = 1$$

$$xy = 2$$

$$x_2 - x_1 = -17, 17$$

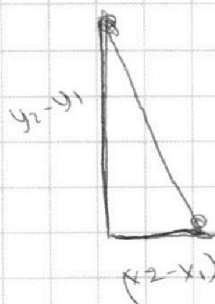
$$6(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 48$$

$$x_2 - x_1 > 0$$



or 0,0

(8, 0)



(15, -42)  
(14, -36)

$$\frac{5 \cdot \sqrt{32}}{6 \cdot x}$$

$$-5/6$$

$$\frac{8 \cdot \sqrt{32}}{x}$$

$$\frac{8 \cdot \sqrt{32}}{x}$$

$$=$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



8/8

$$\sqrt{25-x^2} = \frac{1}{2} \sqrt{25-x^2}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}$$

$$81-49=32$$

$$\begin{array}{l} a < b \\ a < c \\ a < b < c \end{array}$$

$$\frac{1}{2} \cdot (25-x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x)$$

$$\frac{1}{2} \cdot (25-x^2) \cdot -2x = -x(25-x)^{\frac{1}{2}}$$

$$\begin{array}{l} a > b > c \\ -a < -b < -c \end{array}$$

$$x^2 + (y+g)^2 = 4$$

$$g - \frac{18}{7} = \frac{63}{7} - \frac{18}{7} =$$

$$\frac{45}{7}$$

$$2 = e$$

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{2}{5}$$

$$5x_1 = 2x_2$$

$$x_1 + x_2 = 9$$

$$2x_1 + 2x_2 = 18$$

$$2x_1 = 18$$

$$x_1 = \frac{18}{2}$$

$$\left( \frac{45}{7}, 10 \right)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

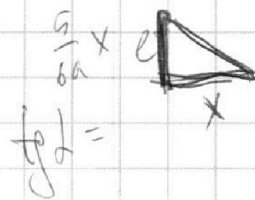
**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



1)  $x^2 + y^2 = 25$

2)  $x^2 + (y+9)^2 = 4$



$$\frac{5}{6a} \leq 5$$

$$x^2 + y^2 = 25$$

$$y^2 = 25 - x^2$$

$$y = \sqrt{25 - x^2}$$

$$(25 - x^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot (25 - x^2)^{\frac{1}{2}} \cdot 2x$$

пока будем  $y > 0$

$$y = \frac{5x - b}{-6a} = \frac{b - 5x}{6a}$$

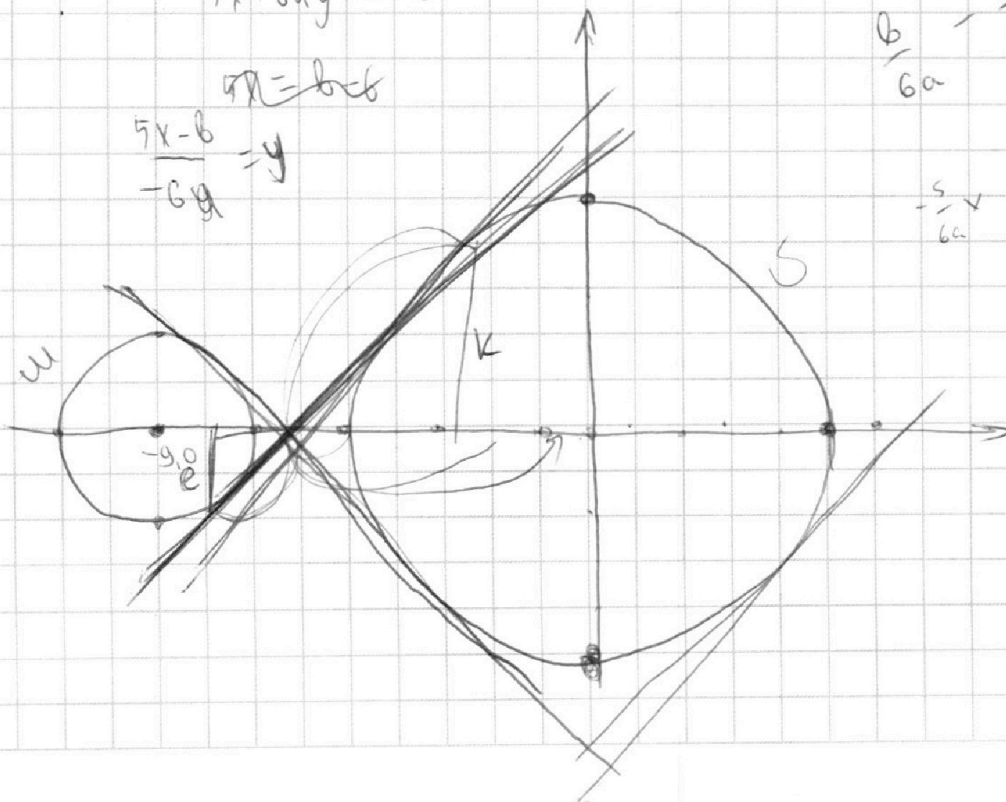
$$5x + 6ay - b = 0$$

$$5x - b = -6ay$$

$$\frac{5x - b}{-6a} = y$$

$$\frac{b}{6a} - \frac{5}{6a} \cdot x$$

$$-\frac{5}{6a} \cdot x$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\log_{x^2}^4 x - 6 \log_{x^2} 11 = \log_{x^2}^{2^2} 11^{-2} - 5 \quad x > 0, x \neq 1$$

$$\left(\frac{1}{\log_{x^2} 11}\right)^4 - 6 \log_{x^2} 11 = -\frac{2}{3} \log_{x^2} 11 - 5 \quad \log_{x^2} x = \frac{1}{\log_{x^2} 11}$$

$$a^{-4} - 6a = -\frac{2}{3}a - 5 \quad | \cdot a^4 \cdot 3$$

$$\log_{x^2} 11 = a$$

$a \neq 0$ , (т.к.  
тогда  
слева 0,  
справа -5)

$$3 - 18a^5 = -2a^5 - 15a^4$$

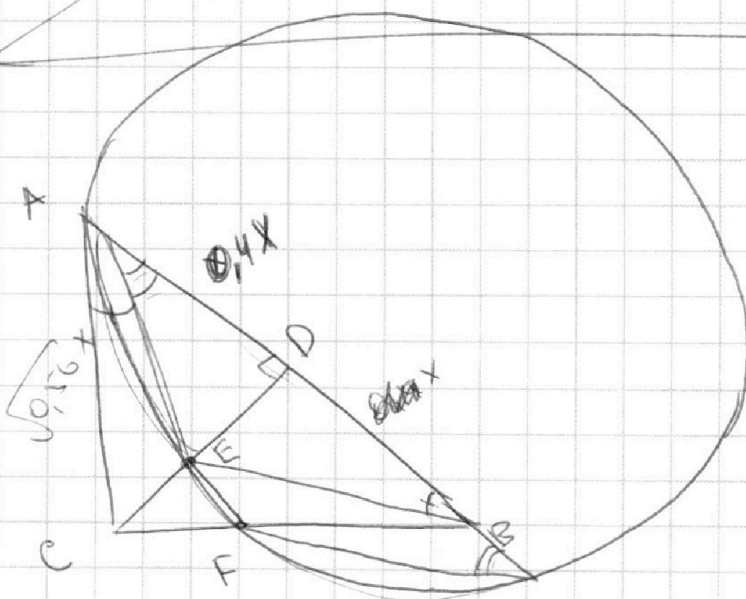
$$16a^5 - 15a^4 - 3 = 0$$

$AB \parallel EF$

$$\frac{AB}{BD} = 1,4$$

$$0,4x \cdot x = 0,4x^2$$

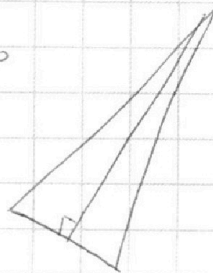
$$\frac{CO}{PB} = \frac{AD}{CO}$$



$$CO = \sqrt{0,4}x$$

$$0,4x^2 + 0,4x^2 = 0,16$$

$$0,16 \cdot 0,4 = 0,16$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



2  
3  
4  
5  
6  
7

$$\log_{11}^4 x + 6 \log_{11} x = \log_{11}^3 11^{-2} = 5$$

$$\log_{11}^4 x - \frac{6}{\log_{11} x} = -\frac{2}{3} = \frac{6}{\log_{11} x} = 5$$

$$\log_{11} x = 0 \implies x = 1$$

$$3 \log_{11}^5 x - 18 = -2 - 15 \log_{11} x$$

$$x^3 a =$$

$$3 \log_{11}^5 x + 15 \log_{11} x - 16 = 0$$

$$11^a = x \implies \sqrt[11]{11^a}$$

0, 1

$$\log_{11} x = \log_{11} 11 = 1$$

$$\log_{11}^3 11^{-2}$$

$$\log_{2^3} 8 = \frac{1}{3} \log_2 8 = \frac{3}{3} = 1$$

$$(a^x)^y = b$$

ⓐ

$$a^{xy} = b$$

$$\log_{11}^4 (0,5y) + \log_{11} (0,5y) = \log_{11}^3 11^{-13} = 5$$

$$0,5y \neq 1 \\ 0,5y > 0 \\ y > 0$$

$$3 \log_{11}^5 (0,5y) + 3 = -13 - 15 \log_{11} x = 0$$

$$3 \log_{11}^5 (0,5y) + 15 \log_{11} (0,5y) - 16 = 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$-\frac{\pi}{2} + \frac{5\pi}{2}$      $-\frac{\pi}{2}$

$\sqrt{2\pi} = x$

$AB \parallel EF$

$\frac{AB}{BD} = 1,4$

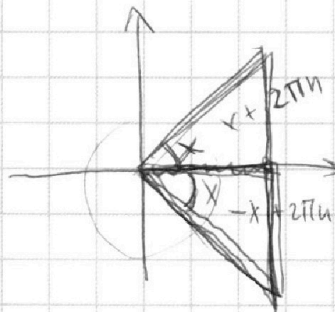
$\frac{ACD}{\overline{CEP}}$

$\odot \neq 5\pi$

$x + 2\pi$   
 $-x + 2\pi$

$10 \arccos$

$\arccos \cos x$



$10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$

$\neq$

$10 \arccos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 9\pi - 2x$

$0 \leq \frac{\pi}{2} - x + 2\pi \leq \pi$

$10\left(\frac{\pi}{2} - x + 2\pi\right) = 9\pi - 2x$

$5\pi - 10x + 20\pi = 9\pi - 2x$

$-4\pi + 20\pi = 8x$

$-\frac{\pi}{2} + \frac{20\pi}{8} = x$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

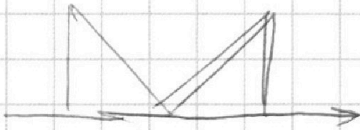
1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

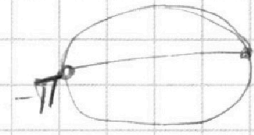
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sin x =$$

arccos



$$\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$$



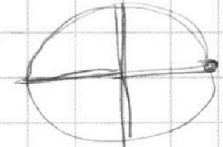
arccos(-1)

$$x = -\frac{\pi}{2}$$

$$x = -\frac{\pi}{2}$$

$$10 \arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = 9\pi - 2x$$

$$10 \arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = 9\pi + \pi = 10\pi$$



$$10\pi = 10\pi$$

$$-\frac{\pi}{2} + \frac{9\pi}{2} = \frac{4\pi}{2} = 2\pi$$

$$\sin 2\pi = 0$$

$$\arccos 0 = 10 \frac{\pi}{2} = 9\pi \neq 4\pi$$

5π



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

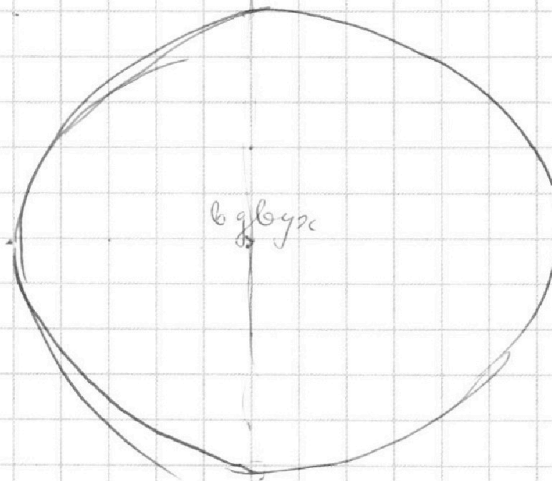
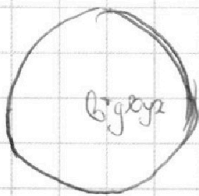
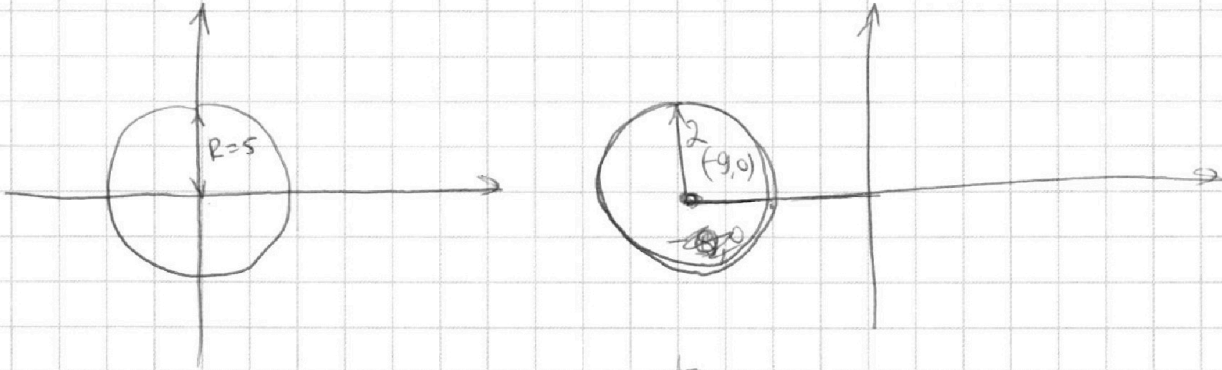
1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 + y^2 = 25$$

$$x^2 + (y+9)^2 = 4$$



$$5x + 6ay - b = 0$$

$$\text{Реш } 5x - b = -6ay$$

$$y = \frac{5x - b}{6a} = \left(\frac{5}{6a}\right)x - \frac{b}{6a}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\deg(a+b) \geq 6$$

2, 4

$$-1 \leq \sin x \leq 1$$

$$\deg(b+c) \geq 14$$

arccos - функция

$$\deg(a+c) \geq 16$$

$$-\pi \leq \arccos \leq \pi$$

$$(a+b+c) \geq 18$$

$$\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$$

$$10 \arccos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 9\pi - 2x$$

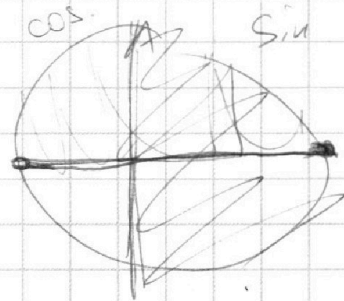
$$10\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 9\pi - 2x$$

$$5\pi - 10x = 9\pi - 2x$$

$$-4\pi = 8x$$

$$x = -\frac{\pi}{2}$$

$$\sin x = \frac{\pi}{2}$$



10π

$$x \neq 1 \quad x > 0$$

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5$$

$$\log_{11} x \cdot \log_x 11 = 1$$

$$\left(\frac{1}{\log_x 11}\right)^4 - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} 11^{-2} - 5$$

$$\log_x 11 = a$$

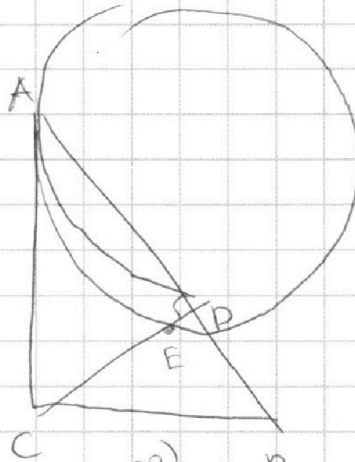
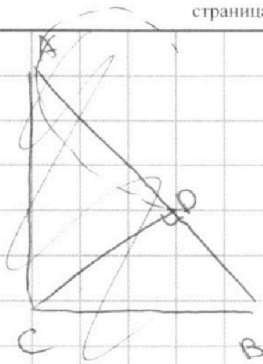
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

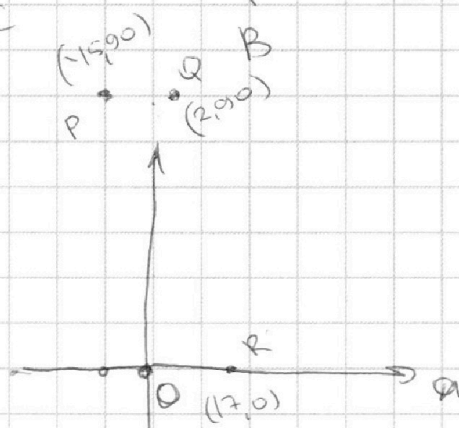
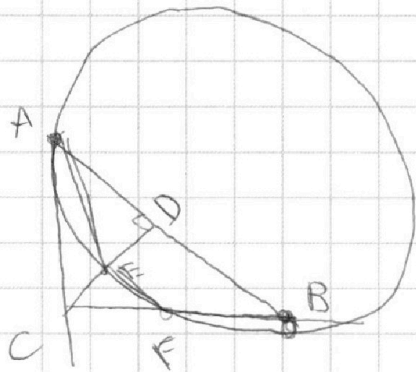


Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



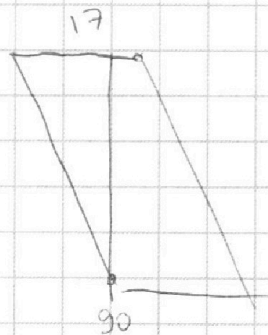
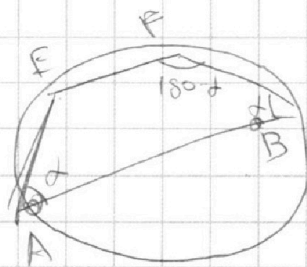
$$a = c = 18$$

$$a = c + 2b = 713$$



$$y = 0,90$$

$$x = 2 - 17$$



$$h = 90$$

$$\Delta y = \dots$$

$$\dots$$

$$-90 \leq y \leq 90$$

$$\dots \leq$$

$$\begin{aligned} a^5 - 6 &= \dots \\ 3a^5 - 18 &= \dots \\ 3a^5 - 18 &= \dots \\ 3a^5 - 18 &= \dots \\ 3a^5 - 18 &= \dots \\ 3a^5 - 18 &= \dots \end{aligned}$$

$$3a^5 - 5a - 16 = 0$$

$$a \neq 0$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$u = -2$$

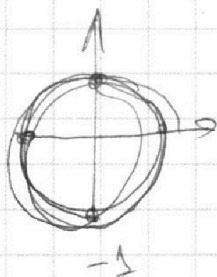
$$u = -1$$

$$u = 0$$

$$u = 1$$

$$v = \frac{14\pi}{12} - \frac{20\pi k}{12}$$

$$u = -2 \quad x = \frac{14\pi}{12} + \frac{40\pi}{12} = \frac{54}{12} = \frac{9}{2}\pi$$



$$10(-\pi) =$$

$$9\pi - \frac{7\pi}{6} \cdot 2 = 9\pi - \frac{14\pi}{6}$$

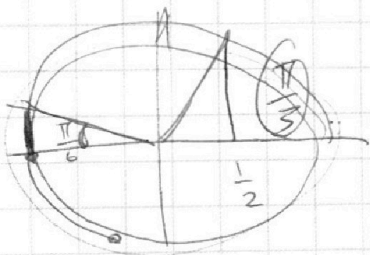
$$27\pi - 7\pi = 20$$

$$x = \frac{17\pi}{6}$$

$$x = \frac{17\pi}{6}$$

$$9\pi - 2 \cdot \frac{17\pi}{6} =$$

$$\frac{27\pi - 17\pi}{3} = \frac{10\pi}{3}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$9\pi - 2 \cdot \frac{9\pi}{2} = 0$$

$$\arccos(\sin \frac{9\pi}{2})$$

$$\arccos 1$$

$$9\pi - 2 \cdot 2\pi = 5\pi$$

$$u = -2 \quad x =$$

$$\sin 2\pi$$

$$\frac{\pi}{2}$$

$$\frac{7\pi}{6} + \frac{10\pi}{3}$$

$$-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$$

$$-\frac{\pi}{2} - 2,5\pi = -3\pi$$

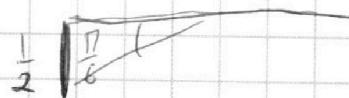
$$x = \frac{14\pi}{12} - \frac{20\pi}{12} = \frac{14\pi}{12}$$

$$\frac{7\pi}{6} - \frac{5\pi}{3}$$

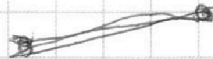
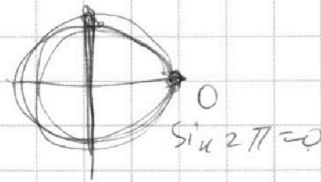


$$\frac{2\pi}{3} \cdot 10 = \frac{20\pi}{3}$$

$$\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)$$



$$9\pi - \frac{7\pi}{6} \cdot 2 = \frac{27\pi}{6}$$



$$9\pi - 2 \cdot -3\pi = 15\pi$$

$$1,5\pi$$

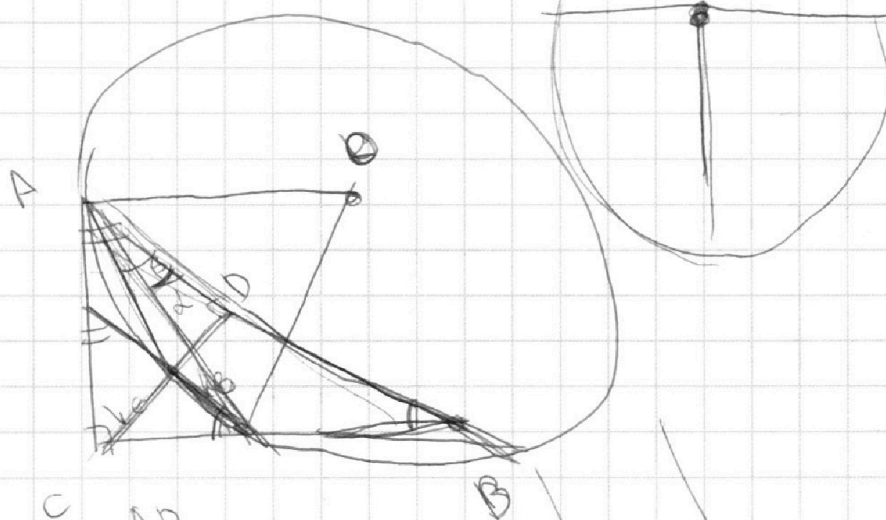
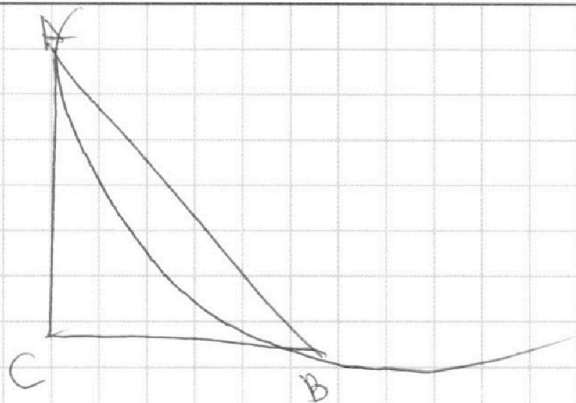
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

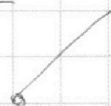
- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |



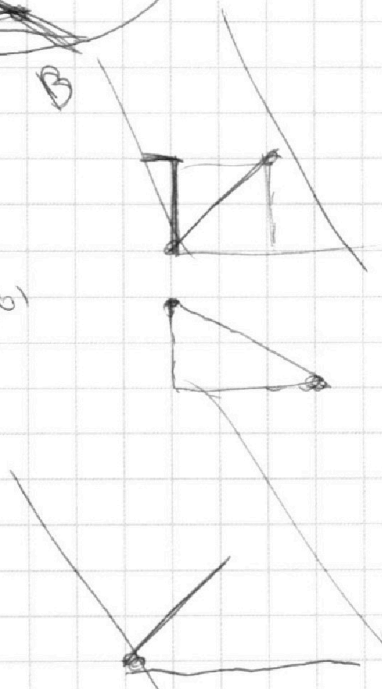
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{AD}{KE} = e$$



a, b)



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

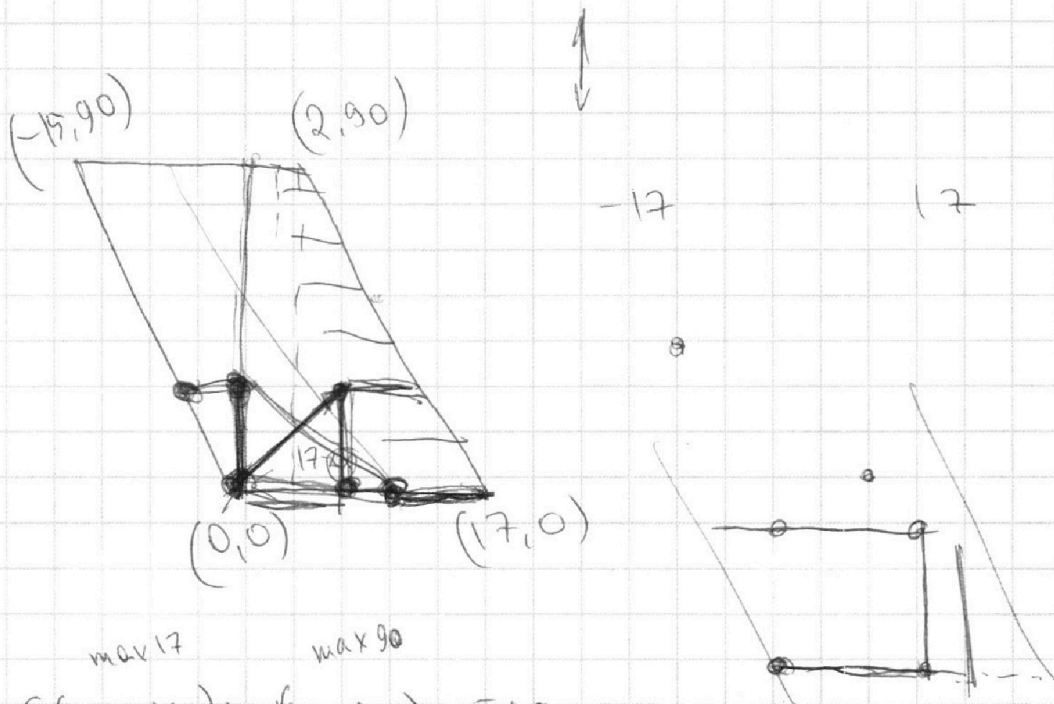
1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1345

2,67



$\max 17$        $\max 90$

$$6(x_1 - x_2) + (y_2 - y_1) = 48$$

для такой суммы



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

