



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^6 3^{13} 5^{11}$ ,  $bc$  делится на  $2^{14} 3^{21} 5^{13}$ ,  $ac$  делится на  $2^{16} 3^{25} 5^{28}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $AC$  в точке  $A$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $E$ , а катет  $BC$  – в точке  $F$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AB : BD = 1,4$ . Найдите отношение площади треугольника  $ACD$  к площади треугольника  $CEF$ .
3. [4 балла] Решите уравнение  $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$ .
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4(0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3} (11^{-13}) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0;0)$ ,  $P(-15;90)$ ,  $Q(2;90)$  и  $R(17;0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$ .
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 180,  $SA = BC = 20$ .
  - а) Найдите произведение длин медиан  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$ .
  - б) Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 6$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 8.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Решение:  $a, b, c \in \mathbb{N}$

Пусть  $a_2$  - степень вхождения 2 в число  $a, a_2 \in \mathbb{N}_0$

$a_3$  - степень вхождения 3 в число  $a, a_3 \in \mathbb{N}_0$

$a_5$  - степень вхождения 5 в число  $a, a_5 \in \mathbb{N}_0$

( $\in \mathbb{N}$  - принадлежит натуральным,  $\in \mathbb{N}_0$  - принадлежит натуральным и 0)

$b_2, b_3, b_5, c_2, c_3, c_5$  - определим аналогично

$$ab: 2^6 3^{13} 5^{11} \Rightarrow ab: 2^6 \Rightarrow a_2 + b_2 \geq 6$$

$$ab: 3^{13} \Rightarrow a_3 + b_3 \geq 13$$

$$ab: 5^{11} \Rightarrow a_5 + b_5 \geq 11$$

Аналогично  $b_2 + c_2 \geq 14$

$$a_2 + c_2 \geq 16$$

$$b_3 + c_3 \geq 21$$

$$a_3 + c_3 \geq 25$$

$$b_5 + c_5 \geq 13$$

$$a_5 + c_5 \geq 28$$

Тогда  $2(a_2 + b_2 + c_2) \geq 6 + 14 + 16 = 36$

$$a_2 + b_2 + c_2 \geq 18$$

Аналогично:  $a_3 + b_3 + c_3 \geq 24,5$   $29,5$

$$a_3, b_3, c_3 \in \mathbb{N} \Rightarrow a_3 + b_3 + c_3 \geq 25$$
  $30$

$$a_5 + b_5 + c_5 \geq 26$$

Тогда  $\min(abc) = 2^{18} 3^{25} 5^{26}$

$$\text{НО } \left. \begin{array}{l} a_5 + c_5 \geq 28 \\ b_5 \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow a_5 + c_5 + b_5 \geq 28 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \min(abc) = 2^{18} 3^{25} 5^{28}$$

Нам удовлетворяет число  $a = 2^4 3^9 5^{12}$

$$b = 2^2 3^4$$

$$c = 2^{10} 3^{17} 5^{16}$$

Докажем, что  $a_2 + b_2 + c_2 = 18$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Предположим, что это не так  $\Rightarrow$

$$a_2 + b_2 + c_2 \leq 17$$

$$a_2 \leq 17 - b_2 - c_2$$

$$b_2 + c_2 \geq 14$$

$$-b_2 - c_2 \leq -14$$

$$17 - b_2 - c_2 \leq 3 \Rightarrow a_2 \leq 3$$

$$a_2 + b_2 + c_2 \leq 12$$

$$b_2 \leq 12 - a_2 - c_2$$

$$b_2 + c_2 \geq 16$$

$$-a_2 - c_2 \leq -16$$

$$12 - a_2 - c_2 \leq 1 \Rightarrow b_2 \leq 1$$

$\Rightarrow 4 \geq a_2 + b_2 \geq 6$  Противоречие.

Аналогично  $a_3 + b_3 + c_3 \geq 25$

$$a_5 + b_5 + c_5 \geq 28$$

Ответ:  $abc = 2^{18} 3^{25} 5^{28}$

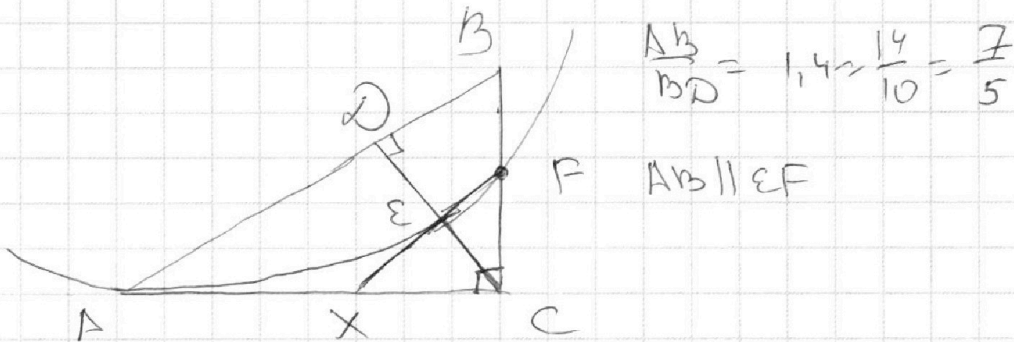
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



1)  $EF \cap AC = X$   $XA$  - кас.,  $EF$  - секущая  
По  $\triangle$   $AX^2 = XE \cdot EF$

$XF \parallel AB \Rightarrow \triangle CEX \sim \triangle CDA$  (1)  
 $\triangle CEF \sim \triangle CDB$  (2)  
 $\triangle CXF \sim \triangle CAB$  (3)

$$\left. \begin{aligned} (2) : \frac{CE}{CD} = \frac{XF}{CB} = \frac{EF}{BD} \\ (3) \frac{CX}{CA} = \frac{XF}{AB} = \frac{CF}{CB} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{XF}{AB} = \frac{EF}{BD} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{XF}{EF} = \frac{AB}{BD} = \frac{2}{5} \Rightarrow EF = \frac{5}{2} XF$$

$$AX^2 = \frac{5}{2} XF^2 \Rightarrow AX = \sqrt{\frac{5}{2}} XF$$

$$2) \frac{AD}{AB} = \frac{AB - DB}{AB} = 1 - \frac{DB}{AB} = 1 - \frac{5}{7} = \frac{2}{7} \Rightarrow AD = \frac{2}{7} AB$$

$$\triangle CAB - \triangle 90^\circ - CD \perp AB \Rightarrow \\ \Rightarrow AC^2 = AD \cdot AB = \frac{2}{7} AB^2 \Rightarrow AC = \sqrt{\frac{2}{7}} AB$$

$$3) (3) \frac{CX}{CA} = \frac{XF}{AB}$$

$$\frac{XF}{AB} = \frac{CA - AX}{CA} = 1 - \frac{AX}{CA} \Rightarrow 1 = \frac{XF}{AB} + \frac{AX}{CA}$$

см. на след. стр.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$1 = \frac{XF}{AB} + \frac{\sqrt{\frac{5}{7}} XF}{\sqrt{2} AB} = \frac{XF}{AB} + \frac{\sqrt{10} XF}{2 AB} \Rightarrow \frac{XF}{AB} = \frac{2}{2 + \sqrt{10}}$$

4)  $AB \parallel EF$ ,  $CD \perp AB \Rightarrow CD \perp EF \Rightarrow \angle CEF = 90^\circ$

$$\frac{S_{\Delta CD}}{S_{\Delta CEF}} = \frac{AD \cdot DC}{EF \cdot CE} = \frac{AD \cdot BD}{EF^2} = \frac{\frac{5}{7} AB \cdot \frac{2}{7} AB}{\frac{25}{49} XF^2} =$$
$$= \frac{2}{5} \left( \frac{AB}{XF} \right)^2 = \frac{2}{5} \cdot 2^2 = \frac{4 + 10 + 4\sqrt{10}}{10} = \frac{14 + 4\sqrt{10}}{10} = \frac{7 + 2\sqrt{10}}{5}$$

Ответ:  $\frac{S_{\Delta CD}}{S_{\Delta CEF}} = \frac{7 + 2\sqrt{10}}{5}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3

$$10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$$

$$\arccos(\sin x) = \frac{9\pi - 2x}{10}$$

$$0 \leq \arccos(\sin x) \leq \pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 \leq \frac{9\pi - 2x}{10} \leq \pi$$

$$0 \leq 9\pi - 2x \leq 10\pi$$

$$-9\pi \leq -2x \leq \pi$$

$$\frac{9\pi}{2} \geq x \geq -\frac{\pi}{2}$$

$$\cos(\arccos(\sin x)) = \cos\left(\frac{9\pi - 2x}{10}\right)$$

$$\sin x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{9\pi - 2x}{10}\right) = 0$$

$$\sin x - \sin\left(\frac{x - 2\pi}{5}\right) = 0$$

$$\frac{x - 2\pi}{5} = t \Rightarrow x = 5t + 2\pi$$

$$\sin(5t + 2\pi) - \sin t = 0$$

$$\sin 5t - \sin t = 0$$

$$\sin(3t + 2t) - \sin(3t - 2t) = 0$$

$$\sin 3t \cos 2t + \sin 2t \cos 3t - \sin 3t \cos 2t + \sin 2t \cos 3t = 0$$

$$2 \sin 2t \cos 3t = 0$$

$$\sin 2t = 0$$

$$2t = \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$t = \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{x - 2\pi}{5} = \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{5\pi n}{2} + 2\pi, n \in \mathbb{Z}$$

$$\cos 3t = 0$$

$$3t = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$t = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{x - 2\pi}{5} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi + \frac{5\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{9\pi}{2} \geq \frac{5\pi n}{2} + 2\pi \geq -\frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}$$

$$9\pi \geq 5\pi n + 4\pi \geq -\pi, n \in \mathbb{Z}$$

$$5\pi \geq 5\pi n \geq -5\pi, n \in \mathbb{Z}$$

$$1 \geq n \geq -1, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow n = -1; 0; 1$$

$$n = -1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2}$$

$$n = 0 \Rightarrow x = 2\pi$$

$$n = 1 \Rightarrow x = \frac{9\pi}{2}$$

$$\frac{9\pi}{2} \geq 2\pi + \frac{5\pi}{6} + \frac{5\pi k}{3} \geq -\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

$$27\pi \geq 12\pi + 5\pi + 10\pi k \geq -3\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$10\pi \geq 10\pi k \geq -20\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$1 \geq k \geq -2, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k = -2; -1; 0; 1$$

$$k = -2 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2}$$

$$k = -1 \Rightarrow x = \frac{7\pi}{6}$$

$$k = 0 \Rightarrow x = 2\pi$$

$$k = 1 \Rightarrow x = \frac{17\pi}{6}$$

$$\text{Ответ: } x = -\frac{\pi}{2}; \frac{7\pi}{6}; 2\pi; \frac{17\pi}{6}; \frac{9\pi}{2}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



ii)  $a \neq 0$

$500 : a > 0$  (где  $a < 0$  аналогично)

$$5x + 6ay - b = 0$$

$$6ay = -5x + b$$

$$y = \frac{-5x + b}{6a}$$

Заметим, что  $b$  не влияет на угол наклона  
прямой, а только  $a$

Проведем общую внутреннюю касательную  
к двум окружностям

Пусть она касается (2) в г. B, (3) в г. C  
и O<sub>y</sub> в точке A

$$\text{Центр}(2) - O \quad \text{Центр}(3) - O_1$$

$$\triangle BOA \sim \triangle CO_1A \quad (\angle OBA = \angle CO_1A = 90^\circ \\ \angle OAB = \angle O_1AC \text{ (верш)})$$

$$\frac{OA}{AO_1} = \frac{BO}{CO_1} = \frac{5}{2}$$

$$\frac{OA}{O_1A} = \frac{5}{2}$$

$$O_1A = 9 \Rightarrow 2OA = 45 - 5OA$$

$$3OA = 45 \Rightarrow AO = \frac{45}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A(0; -\frac{45}{3})$$

$$y_{кас} = kx + c$$

$$k < 0$$

$$\Delta \in y_{кас} \Rightarrow$$

$$c = -\frac{45}{3}$$

$$y_{кас} = kx - \frac{45}{3}$$

$$(2): x^2 + (kx - \frac{45}{3})^2 = 25$$

$$x^2 + k^2x^2 - \frac{90}{3}kx + \frac{45^2}{3^2} = 25$$

$$(1+k^2)x^2 - \frac{90}{3}kx + \frac{45^2 - 35^2}{3^2} = 0$$

см. по след. стр.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

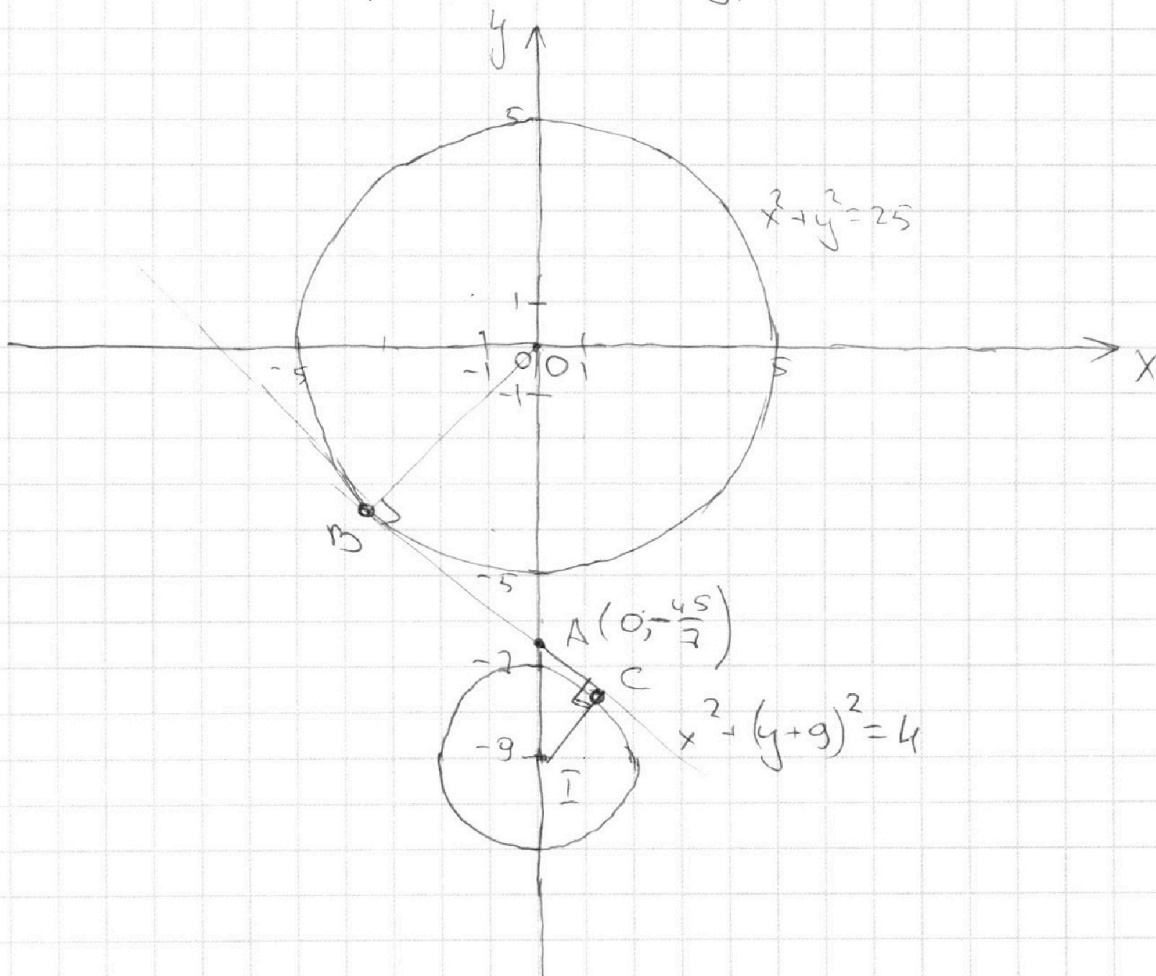
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} 5x + 6ay - b = 0 & (1) \\ x^2 + y^2 = 25 & (2) \\ x^2 + (y+9)^2 = 4 & (3) \end{cases}$$

Построим графики этих уравнений



1)  $a=0$  (1)  $5x - b = 0$   
При  $b=0$   $x=0$  пересекать окружности  
в 4 точках  $\Rightarrow$  4 решения

см. на след. сгр

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



касательная  $\Rightarrow$  одно решение должно иметь  
уравнение  $\Rightarrow D=0 \Rightarrow D_1=0$

$$D_1 = \frac{45^2}{7^2} k^2 - \frac{45^2 - 35^2}{7^2} (1+k^2) = 0$$

$$45^2 k^2 - (45^2 - 35^2)(1+k^2) = 0$$

$$9^2 k^2 - (9^2 - 7^2)(1+k^2) = 0$$

$$81k^2 - 32(1+k^2) = 0$$

$$81k^2 - 32k^2 = 32$$

$$49k^2 = 32$$

$$k^2 = \frac{32}{49} \Rightarrow k = -\frac{4\sqrt{2}}{7} \quad (\text{т.к. } k < 0)$$

При  $k = -\frac{4\sqrt{2}}{7}$   $c \in (-\infty; +\infty) \Rightarrow$   
прямая будет пересекать всего график (2) и (3)  
не более чем два раза

При  $k \in (-\infty; -\frac{4\sqrt{2}}{7})$   $c \in (-\infty; +\infty)$  прямая  
будет пересекать график (2) и (3) в трех  
различных точках

При  $k \in (-\frac{4\sqrt{2}}{7}; 0)$   $c \in (-\infty; +\infty)$  прямая  
будет пересекать график (2) и (3) не более чем  
в двух точках.

$$k \in \left(-\frac{4\sqrt{2}}{7}; 0\right) \quad \left(-\infty; -\frac{4\sqrt{2}}{7}\right)$$

$$k < -\frac{4\sqrt{2}}{7}$$

$$-\frac{5}{6a} < -\frac{4\sqrt{2}}{7}$$

$$\frac{1}{a} > \frac{24\sqrt{2}}{35} \Rightarrow 0 < a < \frac{35}{24\sqrt{2}}$$

$$a \in \left(-\frac{35}{24\sqrt{2}}; \frac{35}{24\sqrt{2}}\right) \Leftrightarrow a \in \left(-\frac{35\sqrt{2}}{48}; \frac{35\sqrt{2}}{48}\right)$$

(аналогично для  $a < 0$ )

$$\text{Ответ: } a \in \left(-\frac{35\sqrt{2}}{48}; \frac{35\sqrt{2}}{48}\right)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 5

1) Пусть  $\log_{11} x = a$   
 $\log_{11} (0,5y) = b$

$$a+b = \log_{11} x + \log_{11} (0,5y) = \log_{11} (0,5xy) \Rightarrow$$

$$0,5xy = 11^{a+b} \Rightarrow xy = 2 \cdot 11^{a+b}$$

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_{11} x = \log_{11} x^3 \cdot \frac{1}{121} = -5$$

$$\log_{11}^4 x - \frac{6}{\log_{11} x} + \frac{2}{3 \log_{11} x} = -5$$

$$a^4 - \frac{6}{a} + \frac{2}{3a} = -5$$

$$a^4 - \frac{16}{3a} = -5$$

$$\log_{11}^4 (0,5y) + \log_{11} (0,5y) = \log_{11} (0,125y^3) = -5$$

$$\log_{11}^4 (0,5y) + \frac{1}{\log_{11} (0,5y)} + \frac{13}{3 \log_{11} (0,5y)} = -5$$

$$b^4 + \frac{1}{b} + \frac{13}{3b} = -5$$

$$b^4 + \frac{16}{3b} = -5$$

$$2) a^4 - \frac{16}{3a} = -5 \quad \frac{3a^5 + 15a - 16}{3a} = 0$$

$$f(a) = \frac{3a^5 + 15a - 16}{3a}$$

$$f'(a) = \frac{1}{3} \left( \frac{(15a^4 + 15) \cdot a - (3a^5 + 15a - 16)}{a^2} \right) =$$
$$= \frac{15a^5 + 15a - 3a^5 - 15a + 16}{3a^2} = \frac{12a^5 + 16}{3a^2}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



$$f'(a) = 0 \quad a = -\sqrt[5]{\frac{4}{3}}$$

Sign chart for  $f'(a)$ :

$a < -\sqrt[5]{\frac{4}{3}}$	$-\sqrt[5]{\frac{4}{3}}$	$0$	$\sqrt[5]{\frac{4}{3}}$	$a > \sqrt[5]{\frac{4}{3}}$
-	0	+	0	+
↓	↗	↖	↗	

$$\text{При } a < 0 \quad \left. \begin{array}{l} a^4 > 0 \\ -\frac{16}{3a} > 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} a^4 - \frac{16}{3a} > 0 \\ a^4 - \frac{16}{3a} + 5 > 0 \end{array}$$

При  $a > 0$   $f'(a) > 0 \Rightarrow$   
 $f(a) > 0$  не более одного корня

$$f(0,1) < 0 \quad f(1) > 0 \Rightarrow \text{корень есть}$$

$$g(b) = b^4 + \frac{16}{3b} + 5 \quad b = -a$$

$$g(-a) = a^4 - \frac{16}{3a} + 5 \quad \text{те же рассуждения}$$

Если  $x_1$  - корень  $f(a)$ , то  $-x_1$  корень  $g(b)$

$$\text{Действительно } f(x_1) = x_1^4 - \frac{16}{3x_1} + 5 = 0$$

$$g(-x_1) = x_1^4 - \frac{16}{3x_1} + 5 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a + b = x_1 - x_1 = 0 \Rightarrow$$

$$xy = 2 \cdot 11^0 = 2$$

$$\text{Ответ: } xy = 2$$



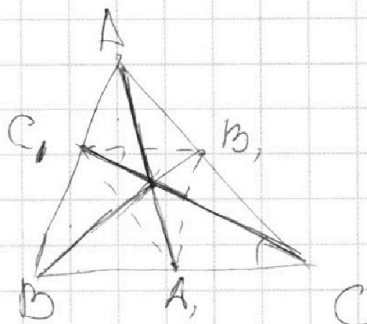
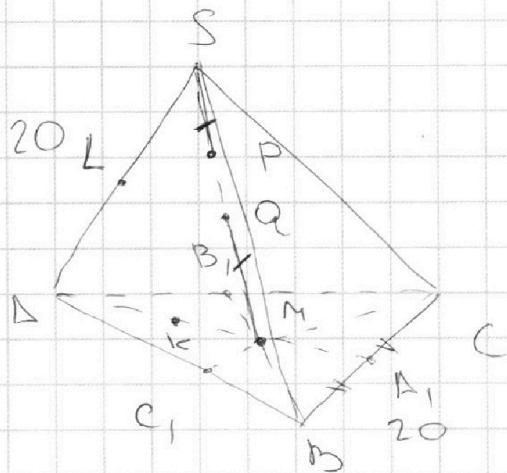
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

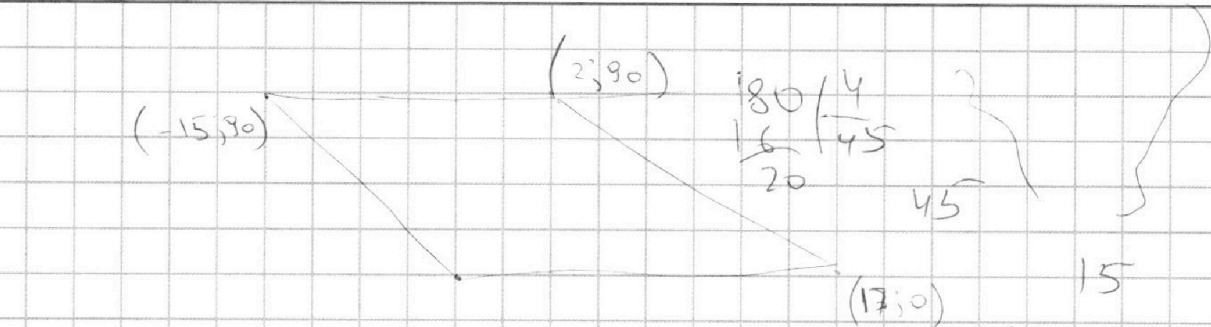
Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- 1     2     3     4     5     6     7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{3b^5 + 15b + 16}{3b}$$

$$a + b + c \leq 17$$

$$a^5 = \frac{16}{12}$$

$$17 - b + c \leq 16$$

$f_{min}$

$$AA_1, BB_1, CC_1 = a \leq 12 - (b - c)$$

$$f(1) = 0,1$$

$$f(-2) > 0 \quad 0,1$$

$$AA_1, BB_1, \frac{9}{2} \sin \alpha, \quad a \leq 1$$

$$BC \cdot CC_1 \cdot \sin \alpha = 90 \quad 4 - \frac{6}{7} + \frac{2}{3} + 15 = 0 \quad 5\sqrt{4}$$

$$CC_1 \sin \alpha = \frac{9}{2}$$

$$\frac{+5 - 16}{36}$$

$$\frac{16}{0,3}$$

$$\begin{aligned} (15b^4 + 15)b - 3b^2 - 15b - 16 \\ 15b^5 + 15b - 3b^2 - 15b - 16 \\ 12b^5 = 16 \\ b = \frac{16}{12} = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

$$f(1) > 0$$

$$f(-1) > 0 \quad \frac{-2}{3}$$

$$f(-2) > 0$$

$$\begin{aligned} &+5 - 16 \\ 5+5 &- +5 - 3+ \\ 4+5 &- +5 - 16 \\ &+5 = 16 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 12 + 15\sqrt{4} - 16 \\ 15\sqrt{4} - 12 \end{aligned}$$

$$+5 = 4$$

$$\frac{-4}{5\sqrt{4}}$$

$$\frac{4 - 16}{3\sqrt{4}} = \frac{-12}{3}$$

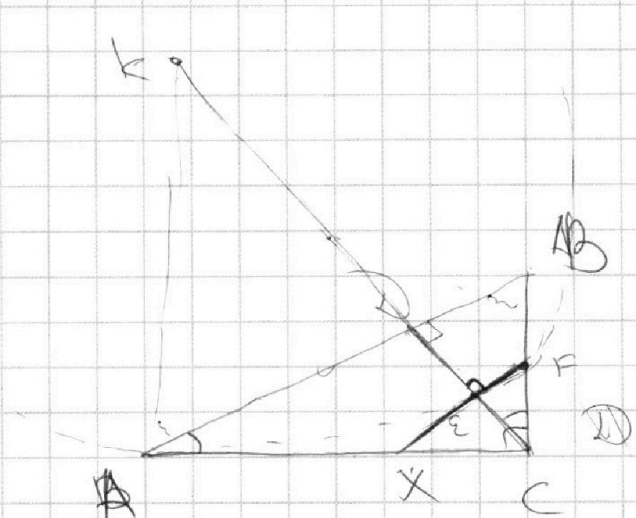
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{XE}{XF} = \frac{AB}{BD} = 1,4$$

$$XE = \frac{XF}{1,4}$$

$$\frac{5}{3} XF = \frac{18}{34}$$

$$XF = \frac{23}{34}$$

$$CE \cdot CK = AC^2$$

$$AD \cdot DB = ED \cdot DK$$

$$\frac{EF}{BD} = \frac{CE}{CD} = \frac{CF}{CB} = \frac{1,4 EF}{AB}$$

$$AD \cdot DB = CD^2$$

$$\frac{AD}{AB} = AB - 1$$

$$\frac{AD \cdot DC}{EF \cdot EC} = \frac{AD \cdot AC}{CF \cdot CE} = \frac{AC \cdot CD}{EF \cdot CF}$$

$$1 - \frac{10}{14}$$

$$\frac{2}{7}$$

$$CD^2 = ED \cdot DK = (CK - CD)(CD - CE) \cdot \frac{AB}{AD} =$$

$$XF = \frac{CE^2}{AD \cdot DB} = \frac{CE^2}{CE^2}$$

$$\frac{OD}{DC} = \frac{AD}{DB}$$

$$AX = \sqrt{\frac{5}{2}}$$

$$OD \cdot DC = AD^2$$

$$AC^2 = AB \cdot AD = \frac{2}{3} AB^2$$

$$AX^2 = XE \cdot XF$$

$$AC^2 = \frac{2}{3} AB^2$$

$$\frac{XF + \frac{\sqrt{5}}{2} XF}{AB} = \frac{\sqrt{2} AB}{2}$$

$$AX^2 = \frac{5}{3} XF^2$$

$$\frac{CX}{AC} = \frac{XF}{AB}$$

$$\frac{XF}{AB} = \frac{2\sqrt{5}}{2} \frac{\sqrt{10}}{2}$$

$$\frac{AC - AX}{AC} = \frac{XF}{AB}$$

$$1 = \frac{XF}{AB} + \frac{AX}{AC} = \frac{2\sqrt{5}}{2} + \frac{2}{2\sqrt{10}}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

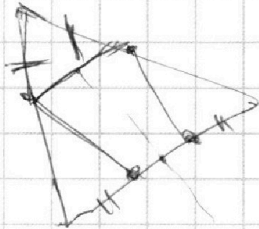


$$ab: 2^6 3^{13} 5^{11} \quad 2^{14} \quad 2^{16} \quad a = -b$$

$$bc: 2^{14} 3^{21} 5^{13} \quad a+b=6 \quad 2(a+b+c) = 36 \quad 0^4 - \frac{16}{30} + 5 = 0$$

$$ac: 2^{16} 3^{25} 5^{28} \quad b+c=14 \quad a+b+c=18$$

$$a+c=16 \quad a=12 \quad b=2 \quad c=10$$



$$a_2 \leq 3 \quad 30^5$$

$$b_2 \leq 1 \quad 30^5$$

$$(5b^4 + 15) \cdot 3b - 3(b^5 + 5b + 16)$$

$$9b^2 \quad c=10 \quad c=8$$

$$a+b \geq 6$$

$$b+c \geq 14$$

$$a+c \geq 16$$

$$a+b+c = \min$$

$$a+b+c \geq 18$$

$$4b - 2b(b^5 - 1)$$

$$4b^5 - 2b^2 + 8b$$

$$2b^6 + 8b$$

$$15b^5 + 45b - 3b^5 - 45b - 48$$

$$12b^5 = 48$$

$$x^2 + y^2 = 25b^5 + 15b + 16$$

$$x^2 = y^2$$

$$2b^5 + 8b$$

$$b^3$$

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_{11} x = \frac{1}{3} \log_{11} x - 5$$

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_{11} x + \frac{2}{3} \log_{11} x + 5 = 0$$

$$\log_{11}^4 x - \log_{11} x + \frac{2}{3} \log_{11} x + 5 = 0$$

$$\log_{11}^4 x - \frac{16}{3} \log_{11} x - 5 = 0$$

$$b^5 = 4$$

$$a+b \geq 13$$

$$b+c \geq 21$$

$$a+c \geq 25$$

$$3t^5 - 16 + 15t = 0$$

$$3t^5 + 15t - 16 = 0$$

$$\leq 29$$

$$a+b+c \geq 30$$

$$y = -15x + 17$$

$$D = \left(\frac{45}{2k}\right)^2 - \frac{45^2 - 35^2}{2^2} (1+k^2) = 0$$

$$45^2$$

$$y = -15x$$

$$y = -15(x-17)$$

$$x = 0$$

$$x = 90$$

$$\frac{Ab}{bD} = \frac{114}{10} = \frac{14}{5} = \frac{7}{5}$$

$$45^2 - (45^2 - 35^2)(1+k^2) = 0$$

$$45^2 - 45^2 -$$

$$45k^2 - 45^2 + 35^2 - 45k^2$$

$$+ 35k^2$$

$$35k^2 + 35^2 = 45^2$$

$$49k^2 + 49 = 81$$

$$49k^2 = 81 - 49 \quad x^2 + k^2 x^2 - \frac{90}{2} kx + \frac{45^2}{2^2} = 25$$

$$k^2 = \frac{81-49}{49} \quad x^2 + k^2 x^2 - \frac{90}{2} kx + \frac{45^2 - 35^2}{2^2} = 0$$

$\triangle ACD$   
 $\triangle CEF$

$$\frac{45^2}{2^2} - 5^2 \quad 12b^5 - 48$$

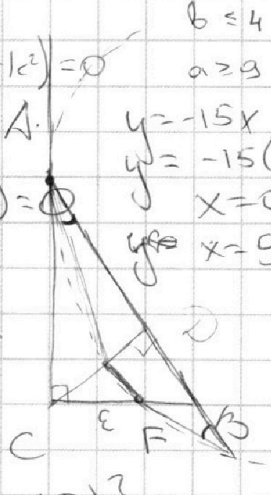
$$9b^2$$

$$k \quad \frac{32}{49} \quad \frac{4b^5 - 16}{3b^2}$$

$$\sim 25k = -\frac{4}{2}\sqrt{2}$$

$$= 0$$

$$\frac{4}{3} \left( \frac{b^5 - 4}{b^2} \right)$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

10π/3

10π/3

24/28

28

26

9π-4π+5π/3

15π+5π

3π-4π-5π/3

5π-5π/3

15π-5π

5

10π/3

arccos(sin x) =  $\frac{9\pi-2x}{10}$        $\frac{x-2\pi}{5} = t$

sin x = cos( $\frac{9\pi-2x}{10}$ )      x = 2π = 5t

sin x - cos( $\frac{9\pi-2x}{10}$ ) = 0      x = 5t + 2π

360 - α - β

-α - β

x = 2π +  $\frac{5\pi}{2}$

x = 2π +  $\frac{5\pi}{2}$

x = 2π -  $\frac{5\pi}{2}$

x = 2π -  $\frac{5\pi}{2}$

20

0 ≤  $\frac{9\pi-2x}{10}$  ≤ π

0 ≤ 9π - 2x ≤ 10π

-9π ≤ -2x ≤ π

$\frac{9\pi}{2} ≥ x ≥ -\frac{\pi}{2}$       C, M, M'

9π - 4π + 5π = 10

cos( $\frac{9\pi-2x}{10}$ ) = sin( $\frac{\pi}{2} - \frac{9\pi-2x}{10}$ ) =

sin( $\frac{5\pi - 9\pi + 2x}{10}$ ) = ( $\frac{2x - 4\pi}{10}$ ) = ( $\frac{x - 2\pi}{5}$ )

sin x - sin( $\frac{x - 2\pi}{5}$ )

sin 5t - sin t = 0

sin(3t+2t) - sin(3t-2t) = 0

sin 3t cos 2t + sin 2t cos 3t - sin 3t cos 2t + cos 3t sin 2t

2 sin 2t cos 3t = 0

sin 2t cos 3t = 0

sin 2t = 0      cos 3t = 0

2t = πn, n ∈ Z       $\frac{x-2\pi}{5} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}, k \in Z$

t =  $\frac{4\pi}{2}, n \in Z$       x - 2π =  $\frac{5\pi}{6} + \frac{5\pi k}{3}, k \in Z$

$\frac{x-2\pi}{5} = \frac{\pi n}{2}, n \in Z$       x = 2π +  $\frac{5\pi}{6} + \frac{5\pi k}{3}$

x - 2π =  $\frac{5\pi n}{2}$       sin α + sin β + sin γ

x =  $\frac{5\pi n}{2} + 2\pi$        $-\frac{\pi}{2} ≤ \frac{5\pi n}{2} + 2\pi ≤ \frac{9\pi}{2}$

x = - $\frac{\pi}{2}$       -π ≤ 5πn + 4π ≤ 9π

x = 2π      -5π ≤ 5πn ≤ 5π

x =  $\frac{9\pi}{2}$       -1 ≤ n ≤ 1

$\frac{9\pi}{2} ≥ 2\pi + \frac{5\pi}{6} + \frac{5\pi k}{3} ≥ -\frac{\pi}{2}$

27π ≥ 12π + 5π + 10πk ≥ -3π

10π ≥ 10πk ≥ -20π

1 ≥ k ≥ -2

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\log_4 x - 6 \log_x 11 = \log_x 3 \cdot 11^{-2} - 5 \quad \log_4 x + \log_{11} 0.5y = t+2$$

$$\log_4 x - 6 \log_x 11 = -\frac{2}{3} \log_x 11 - 5 \quad \log_4 0.5xy = t+2$$

$$t^4 - \frac{6}{t} + \frac{2}{3t} + 5 = 0 \quad | \times 3t \quad 0.5xy = 11^{t+2}$$

$$3t^5 - 18 + 2 + 15t = 0$$

$$3t^5 + 15t - 16 = 0$$

$$xy = \sqrt{\frac{11^{t+2}}{0.5}} = 2 \cdot 11^{t+2}$$

$$\log_4 (0.5y) - \log_{0.5y} 11 = -\frac{13}{3} \log_{0.5y} 11 - 5$$

$$y^4 z^4 + \frac{1}{2} + \frac{13}{3z} = t^4 - \frac{6}{t} + \frac{2}{3t}$$

$$z^4 + \frac{16}{3z} = t^4 - \frac{16}{3t}$$

$$z^4 - t^4 + \frac{16}{3} (z - t) = 0$$

$$z + t = 0$$

$$xy = 2$$

$$z^4 - t^4 + \frac{16}{3} \left( \frac{1}{z} + \frac{1}{t} \right) = 0$$

$$(z^2 + t^2)(z - t) + \frac{16}{3} \left( \frac{t+z}{zt} \right) = 0 \quad z = t$$

$$(z+t) \left( (z^2 + t^2)(z-t) + \frac{16}{3zt} \right) = 0$$

$$3zt(z^2 + t^2)(z-t) + 16 = 0$$

$$zt(z-t) < 0$$

$$3ab(a^2 + 2b) + 16 = 0$$

$$z-t = a$$

$$3a^3b + 6b^2a + 16 = 0$$

$$zt = b$$

$$6ba^2 + 3a^3b + 16 = 0$$

$$a^2 = z^2 - 2zt + t^2$$

$$D = 9a^2 - 6 \cdot 16 \cdot 4a$$

$$a^2 + 2b = (z^2 + t^2)$$

$$5b = 5 \cdot \frac{16}{9}$$

$$a = \sqrt[5]{\frac{3 \cdot 16}{9}}$$

$$a^2 + 4b = (z+t)^2$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

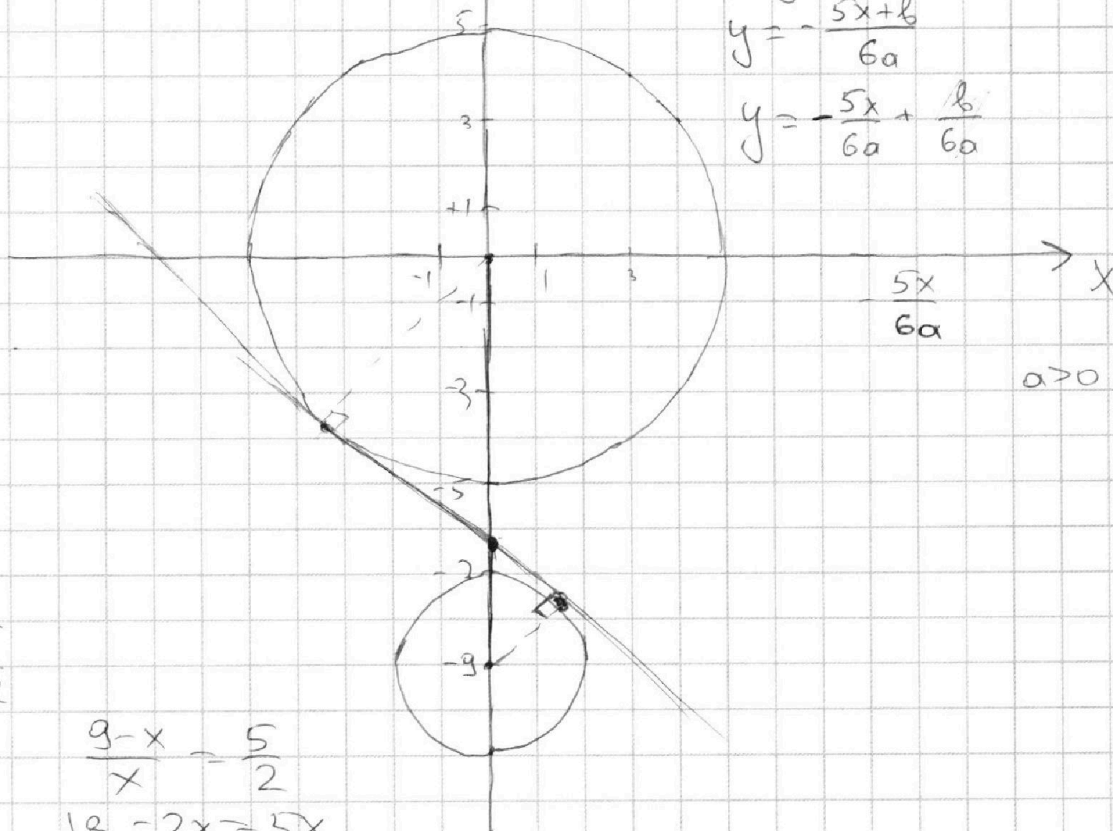


$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 25 \\ x^2 + y^2 + 18y + 81 &= 0 \\ x^2 + y^2 + 18y + 81 &= 4 \\ x^2 + (y+9)^2 &= 4 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} a &= 0 & 5x - b &= 0 \\ & & 5x &= b \\ & & b &= 0 \\ a &\neq 0 & x &= \frac{b}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6ay &= -5x + b \\ y &= -\frac{5x + b}{6a} \\ y &= -\frac{5x}{6a} + \frac{b}{6a} \end{aligned}$$



$$\frac{5}{2}$$

$$\frac{9-x}{x} = \frac{5}{2}$$

$$18 - 2x = 5x$$

$$y = -\frac{18}{7}$$

$$\frac{x}{9-x} = \frac{5}{2}$$

$$2x = 45 - 5x$$

$$7x = 45$$

$$x = \frac{45}{7} = 6\frac{3}{7}$$

$$\left(\frac{45}{7}\right)^2$$

$$\begin{aligned} y &= kx + b \\ y &= kx - \frac{45}{7} \end{aligned}$$