



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-13;26)$, $Q(3;26)$ и $R(16;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

обозначим степени вхождения в числа 2
в a, b, c за a_1, b_1, c_1 соответственно.

по условию

$$a_1 + b_1 \geq 15$$

$$b_1 + c_1 \geq 17$$

$$a_1 + c_1 \geq 23$$

суммируем

$$2(a_1 + b_1 + c_1) \geq 55$$

то есть

$$a_1 + b_1 + c_1 \geq 27,5, \text{ но } a_1 + b_1 + c_1 - \text{целое, значит}$$
$$a_1 + b_1 + c_1 \geq 28. \quad (1)$$

Также заметим, что $ac \geq 7^{39}$, значит

$$abc \geq 7^{39} \quad (2)$$

из (1) и (2) имеем $abc \geq 2^{28} 7^{39}$

Пример:

$$a = 2^{11} 7^{19}$$

$$c = 2^{12} 7^{19}$$

$$b = 2^5$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

 МФТИ

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

То, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима $\Leftrightarrow \text{НОД}(a; b) = 1$.

Найдем $\text{НОД}(a+b; a^2-7ab+b^2)$. Заметим, что
из $a^2-7ab+b^2$ мы можем вынести $k \cdot (a+b)$,
а значит, когда мы сократим. Выделим
 $(a+b)^2$

$$(a+b)(a+b; a^2-7ab+b^2) = (a+b; -9ab)$$

Заметим, что если $a \div p$, то $a+b \not\div p$,
т.к. $(a; b) = (a; a+b) = 1$. Аналогично
 $(b; a+b) = (a; b) = 1$. Это есть $(a+b; -9ab) =$
 $= (a+b; -9)$. Это есть $m \leq 9$.

Заметим, что если $a=4, b=5$ то
дробь сократится. и

Заметим, что для $a=4, b=5$ можно
сократить на 9.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

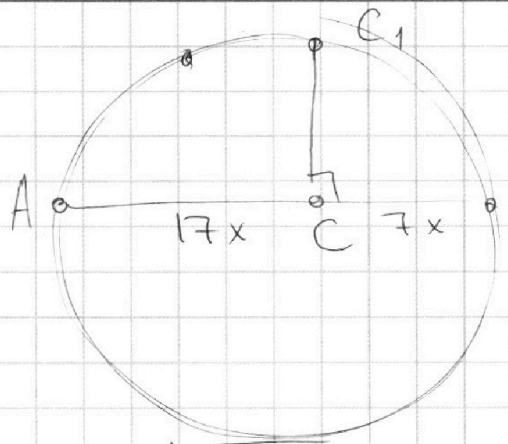
Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



C_1 - центр ω
 $C_1C \perp AB$ - касание

Заметим, что
для $\triangle AC_1B$ впис.

$$AC_1 \cdot C_1B \cdot AB = 4 \cdot S \cdot R$$

(S = пл. $\triangle AC_1B$, R - радиус Ω)

$$AC_1 = \sqrt{(17x)^2 + 49}$$

$$BC_1 = \sqrt{(7x)^2 + 49}$$

$$AB = 24x$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot C_1C \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 24x$$

$$R = 13$$

$$\sqrt{(17x)^2 + 49} \cdot \sqrt{(7x)^2 + 49} \cdot 24x = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 24x \cdot 13 \cdot 4$$

$$\sqrt{(17x)^2 + 49} \cdot \sqrt{(7x)^2 + 49} = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 24 \cdot 13 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 13$$

$$((17x)^2 + 49)(49x^2 + 49) = 4 \cdot 49 \cdot 169$$

$$(17x \rightarrow x) \\ (289x^2 + 49)(x^2 + 1) = 4 \cdot 169$$

$$t = x^2$$

$$(289t + 49)(t + 1) = 4 \cdot 169$$

Заметим, что $t > 0$. При $t = 1$ выполняется равенство а при $t > 0$ функция слева очевидно монотонно возрастает.

$$t = 1$$

$$x = 1$$

$$AB = 24x = 24$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Обозначим

$$\sqrt{A} = m$$

$$\sqrt{B} = n$$

$$m - n = m^2 - n^2$$

$$m^2 + m =$$

$$m^2 - m = n^2 - n$$

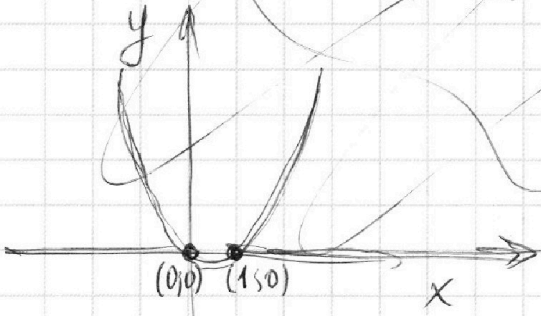
$$m, n \geq 0$$

рассмотрим

графики
функции

$$y = x^2 - x$$

Это парабола с
ветвями вверх,
также имеет корни
 $x_1 = 0, x_2 = 1$. Тогда
видно, что



$$(\sqrt{A} - \sqrt{B}) = (\sqrt{A} - \sqrt{B})(\sqrt{A} + \sqrt{B}) \quad \text{по разности квадратов}$$

$$\sqrt{A} = \sqrt{B} \quad \text{когда} \quad 1 - 9x = 0 \quad (x = \frac{1}{9}). \quad \text{иначе}$$

$$\sqrt{A} + \sqrt{B} = 1$$

тогда

$$(\sqrt{A} + \sqrt{B}) + (\sqrt{A} - \sqrt{B}) = 1 + 1 - 9x$$

$$2\sqrt{A}$$

$$2\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = 2 - 9x$$

$$4(3x^2 - 6x + 2) = 4 - 36x + 81x^2$$

$$12x^2 - 24x + 8 = 4 - 36x + 81x^2$$

$$69x^2 - 12x - 4 = 0$$

$$D = 144 + 16 \cdot 69$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

МФТИ



1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$3x^2 - 6x + 2 \geq 0 \quad (1)$$

$$D = 36 - 24 = 12$$

$$x_1 = \frac{6 + \sqrt{12}}{6} = 1 + \frac{2\sqrt{3}}{2 \cdot 3} =$$

$$= 1 + \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$x_2 = \frac{6 - \sqrt{12}}{6} = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$x \in (-\infty; 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}] \cup [1 + \frac{1}{\sqrt{3}}; \infty)$$

$$3x^2 + 3x + 1 \geq 0 \quad (2)$$

$$D = 9 - 12 < 0$$

$$x \in (-\infty; \infty)$$

нужно $3x^2 + 3x + 1 = a$
 $1 - 9x = b$

$$\sqrt{a+b} - \sqrt{a} = b$$

$$\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + b$$

$$a+b = a + b^2 + 2b\sqrt{a}$$

$$b = b^2 + 2b\sqrt{a}$$

$$(b - b^2) = 2b\sqrt{a}$$

$$1 - b = 2\sqrt{a}$$

$$(1 - b)^2 = 4a$$

$$(9x)^2 = 4 \cdot (3x^2 + 3x + 1)$$

$$81x^2 = 12x^2 + 12x + 4$$

$$69x^2 - 12x - 4 = 0$$

$$D = 144 + 4 \cdot 16 \cdot 69 = 16(9 + 69) = 16 \cdot 78$$

$$x_1 = \frac{12 + 4\sqrt{78}}{2 \cdot 69} = \frac{6 + 2\sqrt{78}}{69}$$

$$x_2 = \frac{12 - 4\sqrt{78}}{2 \cdot 69} = \frac{6 - 2\sqrt{78}}{69}$$

нужно $3x^2 - 6x + 2 = A$

$$3x^2 + 3x + 1 = B$$

тогда $\sqrt{A} - \sqrt{B} = A - B$. Тогда берите

наверно можно считать

если $b=0$, то $x = \frac{1}{9}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Тогда есть 17 основных отрезков и
16 пунктирных (на ~~на~~ интересуют не
предела, а отрезки)

На основном отрезке PO лежит 14
целых точек

На побочном отрезке PO_1 лежит 13
целых точек

(т.к. это сдвиг PO на $(1; -1)$, от отраз
точки O вылетает за пределы пар. границ)

Теперь проанализируем основные отрезки
основного A_1, \dots, A_{17}
и пунктирные B_1, \dots, B_{16}

Заметим, что для точки на A_i ~~ТМТ~~ B
вылетает предел A_{i+7} .

Для точки на B_i — B_{i+7} .

Тогда для пределов A_1, \dots, A_{10} найдутся
предела вида A_{i+7} , то есть это

10 · 14 · 14 пар точек

Также для B_1, \dots, B_9 найдутся B_{i+7} ,
то есть это 9 · 13 · 13 пар точек

$$\begin{array}{r} 14 \\ \times 14 \\ \hline 56 \\ 14 \\ \hline 196 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 13 \times 107 \quad 117 \\ \quad 13 \quad 13 \\ \hline 321 \quad 351 \\ 107 \quad 117 \\ \hline 41 \quad 1521 \end{array}$$

$$\text{Ответ: } \begin{array}{r} 1960 \\ + 1521 \\ \hline 3481 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

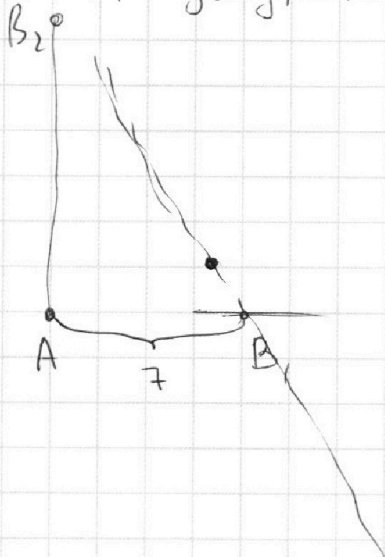
1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Для произвольной точки плоскости $A(x_1; y_1)$
найдем ГМТ точки $B(x_2; y_2)$ чтобы

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$$



Очевидно подходит

$$B_1(x_1 + 7; y_1)$$

но ~~мы~~ ~~можем~~ ~~дать~~
~~нам~~ ~~у~~ ~~В~~

Все такие точки

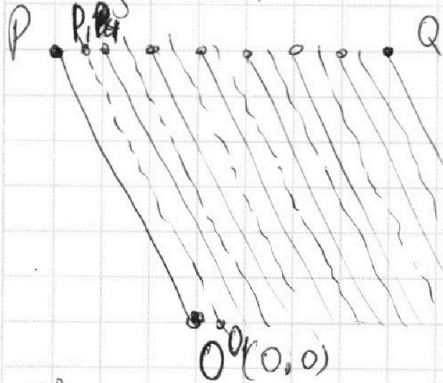
даются ~~нам~~ ~~на~~

прямой $y = -2x + 2x_1 + y_1 + 14$,
~~но~~ ~~есть~~ ~~каждая~~ ~~прямая~~
~~всех~~

подходит еще B_2

$(x_1; y_1 + 14)$. Но есть ГМТ - это целые
точки прямой B, B_2 .

Разобьем наш пар. грамм. на прямые



Через целые точки
на отрезке PQ проведем
прямые, $\parallel PO$ (это
прямая $y = -2x$)

Еще проведем ~~прямые~~

Средние линии между сосед. проведенными
(мульти.) Тогда все эти прямые содержат все
точки цел. точки пар-грамм (так как
если провести ординату, то найдем ~~прям.~~
содержат пересек. ее во всех полученных
точках, значит целые они содержат).

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

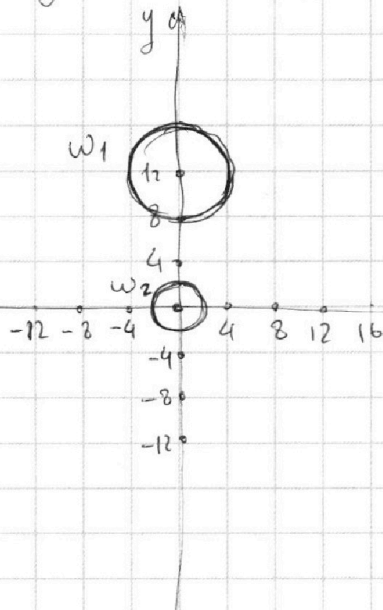
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

нарисуем коорд. плоскость Oxy .



Заметим, что
прямая $ax + y - 8b = 0$
должна касаться двух
окружностей.

Не пересекаются 2 круга
(включит. сфер. в данном случае
реш.) она не может —
второе уравне. неравенство
не выполняется.

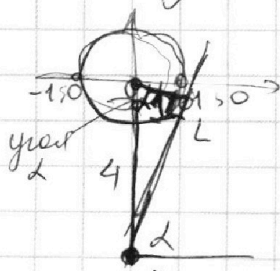
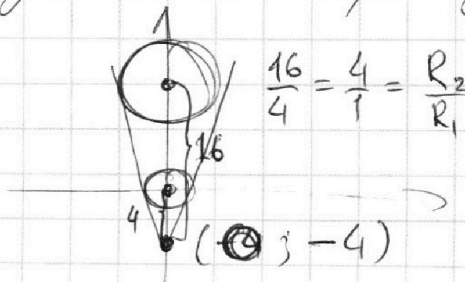
~~Пересечь круг прямой~~

~~Пересечь только один круг прямая не
может, так как у системы будет либо
1, либо беск. кол-во решений (круги не пересекаются,
значит если точка внутри ω_1 , то вне ω_2 ,
она или решение).~~

Так как круги не пересекаются (вкл. сфер.),
любая точка ω_1 или ω_2 является решением
С ур., значит у прямой должно быть 2
точки пересеч. с ними — общая кас.

Найдем ур. общ. кас.

1) дк внеш. проходит через $(0; -4)$ — центр ниж. окружн.



$$KL = \sqrt{16-1} = \sqrt{15}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{15}$$

$$y = -ax + 8b$$

$$a = -\operatorname{tg} \alpha = -\sqrt{15}$$

и снм. прямая
 $a = \sqrt{15}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



2) Внутр. касат. проходит через
центр окруж. найдем

~~(0; 4)~~ $(0; 2,4)$

проведем из ~~(0; 4)~~ $(0; 2,4)$ кас.
к ω_2

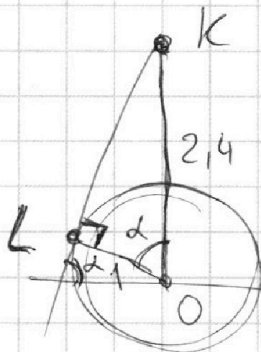
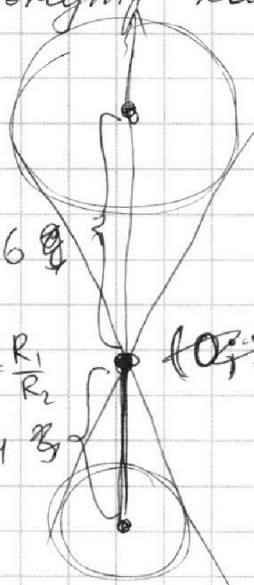
$$\frac{11,6}{3} = \frac{R_1}{R_2}$$

$$\frac{11,6}{2,4} = \frac{R_1}{R_2}$$

$$2,4 R_1 = 11,6 R_2$$

~~(0; 3)~~ $(0; 2,4)$

$$\begin{array}{r} 24 \\ \times 24 \\ \hline 96 \\ 48 \\ \hline 576 \end{array}$$



$$KL = \sqrt{5,76 - 1} = \sqrt{4,76}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{KL}{LO} = \sqrt{4,76}$$

$$y = -ax + 8b$$

$$-a = \operatorname{tg} \alpha = \sqrt{4,76}$$

и сим. прямая $a = \sqrt{4,76}$

ответ: $a = \pm \sqrt{4,76}$
 $a = \pm \sqrt{15}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

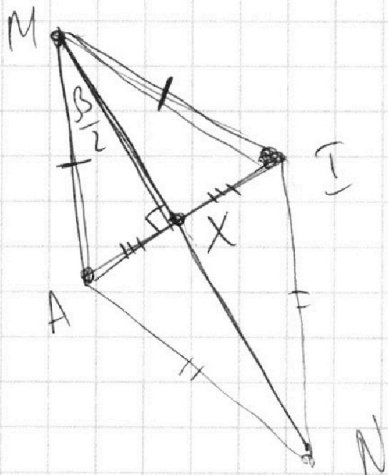
Перепишем

(X)

$$\frac{5}{\sin \frac{\gamma}{2}} \cdot \frac{r}{\sin \frac{\gamma}{2}} =$$
$$= \frac{2rB}{\sin \frac{\beta}{2}} \cdot \frac{r}{\sin \frac{\beta}{2}}$$

$$\frac{2}{\sin^2 \frac{\gamma}{2}} = \frac{1}{\sin^2 \frac{\beta}{2}} \Rightarrow \frac{\sin^2 \frac{\beta}{2}}{\sin^2 \frac{\gamma}{2}} = \frac{1}{2} \quad (\odot)$$

Рассмотрим $\triangle MAI$.



$MN \perp AI$ (MN это
сер. пер. по медианам ос
треугольце)

$\angle AMX$ опирается на $\cup AN$
также как $\angle ABN \Rightarrow$
 $\Rightarrow \angle AMX = \frac{\beta}{2}$

Заметим, что

$$AX = \sin \frac{\beta}{2} \cdot MA$$

$$\frac{AI}{2} =$$

$$AI = 2 \cdot \sin \frac{\beta}{2} \cdot \frac{5}{\sin \frac{\gamma}{2}}$$

$$AI^2 = 100 \cdot \frac{\sin^2 \frac{\beta}{2}}{\sin^2 \frac{\gamma}{2}} \stackrel{(\odot)}{=} 50$$

$$AI = \sqrt{50}$$

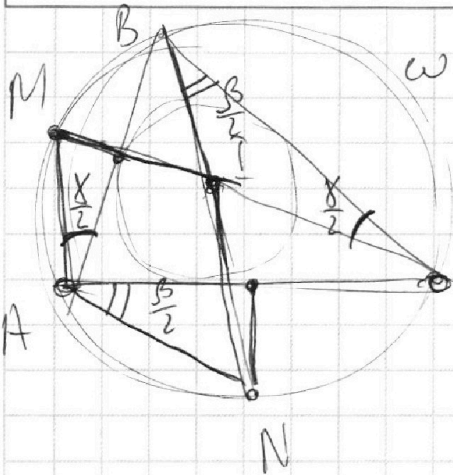
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



ω ^{центр} Заметим, что E, I, M
лежат на дуге $\angle C$
 B, I, N лежат на дуге
 $\angle B$

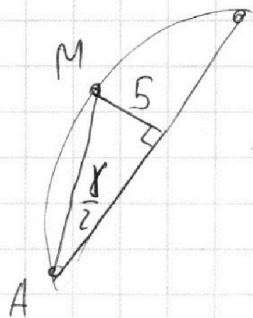
То мы имеем о треугольнике.
 $MI = MA$
 $NI = NA$.

Заметим, что $MI \cdot IC = BI \cdot IN$ (степени
точки I относительно ω)

Тогда $MA \cdot IC = NA \cdot IB$. \odot

Заметим, что $MA = \frac{5}{\sin \frac{\alpha}{2}}$ (угол треуголь-
ника обозначим за α, β, γ соответственно)

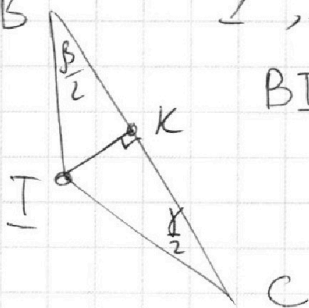
так как



$$\frac{5}{MA} = \sin \frac{\alpha}{2}$$

Аналогично $NA = \frac{2,5}{\sin \frac{\beta}{2}}$

Рассмотрим $\triangle BIC$. Опустим высоту из
 B на IC , обозначим ее длину за r .



$$BI = \frac{r}{\sin \frac{\beta}{2}} \quad CI = \frac{r}{\sin \frac{\gamma}{2}}$$

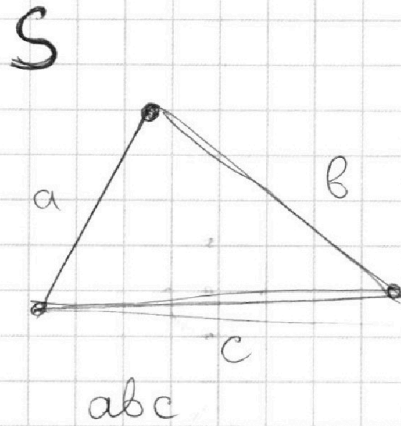
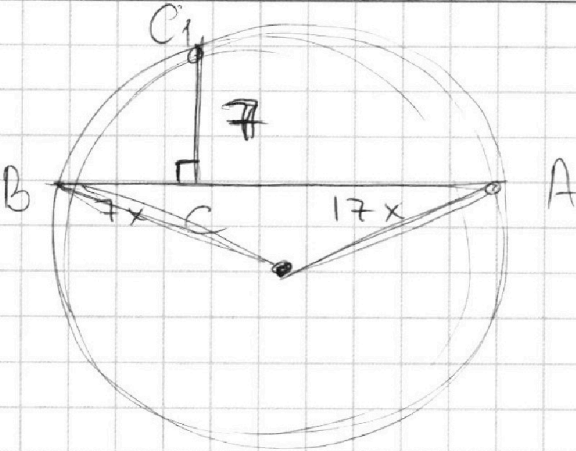
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МОТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



~~ab: 2¹⁵ 7¹¹~~
~~bc:~~

ac: 2²³ 7³⁹

ac = 2²³ 7³⁹

a c = 2¹² 7¹⁹

a = 2¹¹ 7¹⁹

b = 2⁸

c = 2¹³

a = 2¹²

b = 2⁴

c = 2²⁸

15 + 17 + 23 = ~~48~~

ab sin γ = ~~8~~ 2S

abc = 4SR

$\sqrt{49+49x^2} \cdot \sqrt{289x^2+49} \cdot 24x = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 24x \cdot 13$

289 + 49 = 338

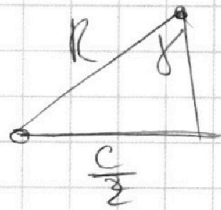
676

$$\begin{array}{r} \times 169 \\ 4 \\ \hline 676 \end{array}$$

$\frac{1}{2} ab \sin \gamma = S$

$\frac{c}{\sin \gamma} =$

$\sin \gamma = \frac{c}{2R}$



$\frac{c}{\sin \gamma} = 2R$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

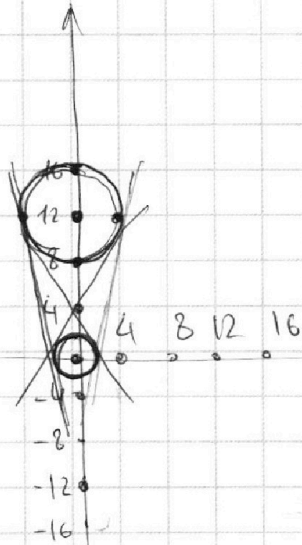
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0$$



прямая $ax + y - 8\sqrt{a} = 0$
имеет 2 точки

$$y = -ax + 8\sqrt{a}$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} - 1 + 9x = \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$\sqrt{a+b} - \sqrt{a} = b$$

$$a+b = (b+\sqrt{a})^2$$

$$a+b = a + b^2 + 2b\sqrt{a}$$

$$b(b+2\sqrt{a})$$

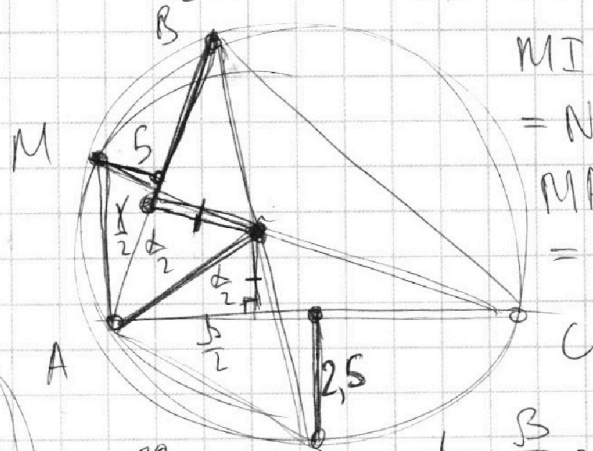
$$b - b^2 = 2b\sqrt{a}$$

$$1 - b = 2\sqrt{a}$$

$$81x^2 = 4(3x^2 + 3x + 1)$$

$$3x^2 + 3x + 1 \geq 0$$

$$3x^2 + 3x - 6x + 2 \geq 0$$



$$MI \cdot IC =$$

$$= NI \cdot IB$$

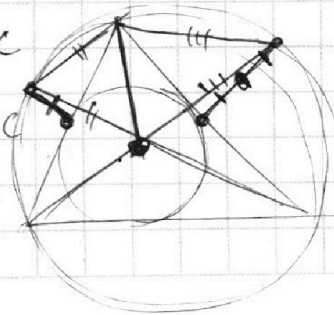
$$MA \cdot IC =$$

$$= NA \cdot IB$$

$$2b(p-c) = (p-b)c$$

$$2b(a+b) = (a+c)c$$

$$2ab + 2b^2 = ac + c^2$$



$$\frac{p-b}{(p-b)c} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{B}{2} \cdot AC}{\operatorname{tg} \frac{A}{2} \cdot AB} = \frac{1}{2}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

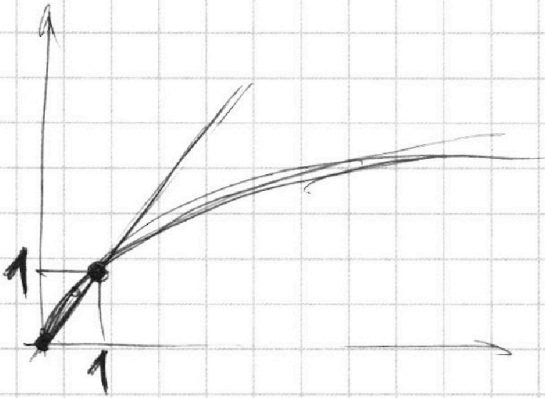
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~$\sqrt{A} - \sqrt{B}$~~

$$\sqrt{A} - \sqrt{B} = A - B$$

$$A + B - 2\sqrt{AB} = A^2 - 2AB + B^2$$

$$A^2 + B^2$$





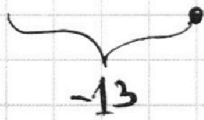
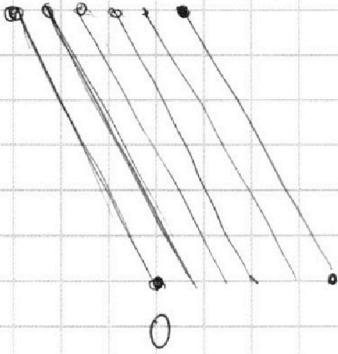
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

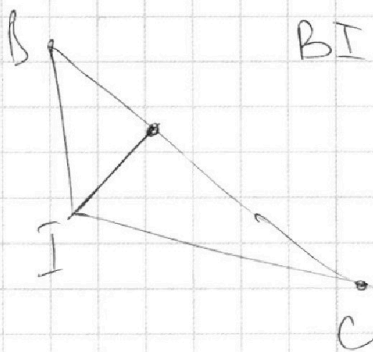
1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$MA = \frac{5}{\sin \frac{\alpha}{2}} \quad NA = \frac{2,5}{\sin \frac{\beta}{2}}$$

$$\frac{2}{\sin \frac{\alpha}{2}} \cdot IC = \frac{1}{\sin \frac{\beta}{2}} \cdot IB$$



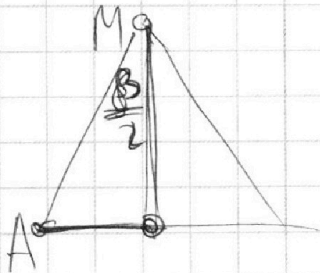
$$BI = \frac{r}{\sin \frac{\beta}{2}} \quad IC = \frac{r}{\sin \frac{\alpha}{2}}$$

$$\frac{2}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{\sin^2 \frac{\beta}{2}}$$

$$2 \sin^2 \frac{\beta}{2} = \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

или хитрым

AI



$$\frac{AI}{2MA} = \sin \frac{\beta}{2}$$

$$\frac{AI}{2 \cdot \frac{5}{\sin \frac{\alpha}{2}}}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$3x^2 - 6x + 2 = 81x^2 - 18x + 1 + 3x^2 + 3x + 1$$

$$\sqrt{a+b} - \sqrt{a} = b$$

$$\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + b$$

$$a+b = a + b^2 + 2\sqrt{a}b$$

$$b = b^2 + 2\sqrt{a}b$$



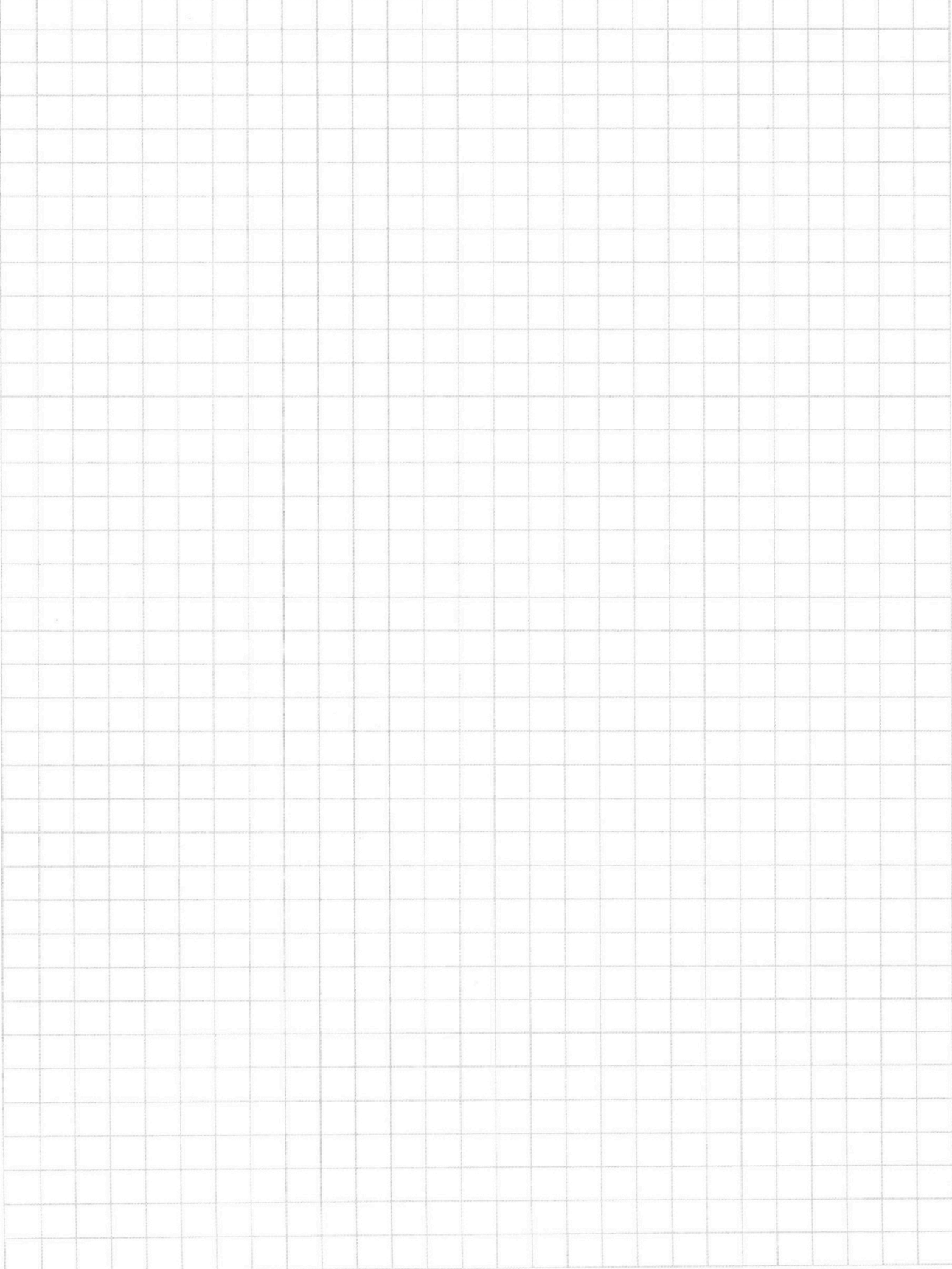
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



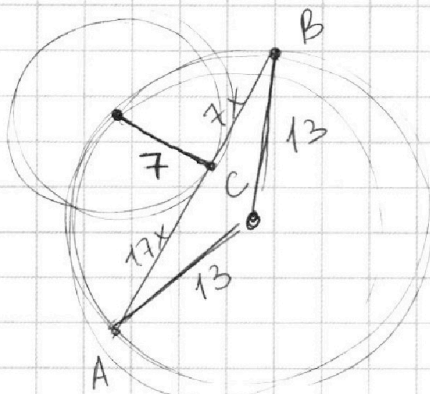
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

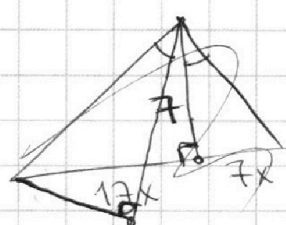
1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$24x = ?$



$$\begin{array}{r} 17 \\ \times 17 \\ \hline 119 \\ 17 \\ \hline 289 \end{array}$$

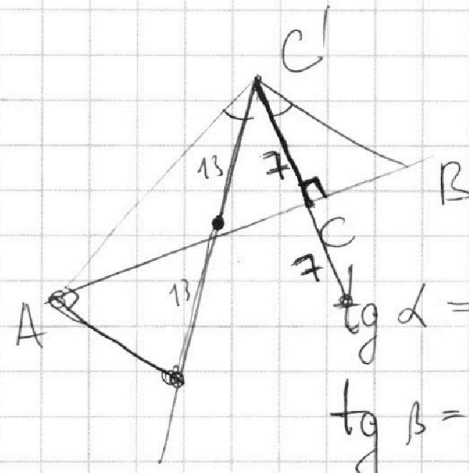
$$\begin{array}{r} (13 \times 14)^2 \\ 13^2 = 169 \\ 169 \\ \times 4 \\ \hline 676 \end{array} \quad \begin{array}{r} 676 \\ - 49 \\ \hline 627 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 338^2 = \\ 338 \\ \times 338 \\ \hline 2704 \\ 1014 \\ \hline 1014 \\ \hline 114244 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 289 \\ \times 627 \\ \hline 2023 \\ 578 \\ \hline 1734 \\ \hline 181203 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 181203 \\ \times 4 \\ \hline 724812 \\ + 114244 \\ \hline 839056 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 29 \\ 29 \\ \hline 261 \\ 58 \\ \hline 841 \\ \times 2898 \\ 2898 \\ \hline 2898 \\ 84 \end{array}$$



$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \frac{7}{17x} \\ \operatorname{tg} \beta &= \frac{7}{7x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 13 \cdot 14 &= AC' \cdot C'B \\ (AC' \cdot C'B)^2 &= (13 \cdot 14)^2 \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \end{aligned}$$

$$(49 + (17x)^2)(49 + (7x)^2)$$

$t = x^2$

$$\begin{aligned} (49 + 289t)(49 + 49t) &= 13^2 \cdot 4 \cdot 7^2 \\ (49 + 289t)(1 + t) &= 13^2 \cdot 4 \\ 289t^2 + (289 + 49)t + 49 - 13^2 \cdot 4 &= 0 \\ 289t^2 + 338t - 627 &= 0 \end{aligned}$$

$$D = 338^2 + 4 \cdot 289 \cdot 627 = 839056$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ab : 2^{15} 7^{11}$$

$$bc : 2^{17} 7^{18}$$

$$ac : 2^{23} 7^{39}$$

$$a_1, a_2 \quad (a, b) = 1$$

$$b_1, b_2 \quad (a+b; a^2 - 7ab + b^2) =$$

$$c_1, c_2$$

$$a_1 + b_1 \geq 15$$

$$b_1 + c_1 \geq 17$$

$$a_1 + c_1 \geq$$

$$a^2 b^2 c^2 : 2^{55} 7^{68}$$

$$abc : 2^{28} 7^{34}$$

$$abc = 2^{22} 7^{34}$$

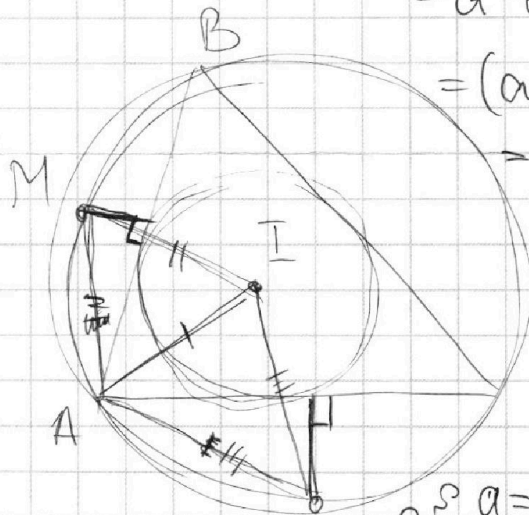
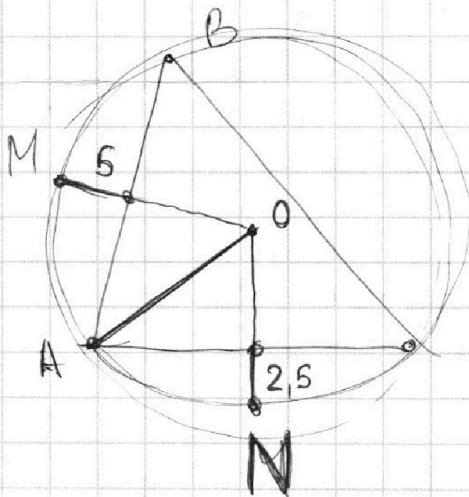
$$c = 2^{13} 7 = (a+b; a^2 - 7ab + b^2 - a^2 - b^2 - 2ab) =$$

$$= (a+b; -9ab) =$$

$$= (a+b; 9ab)$$

$$a : p \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a+b/p$$

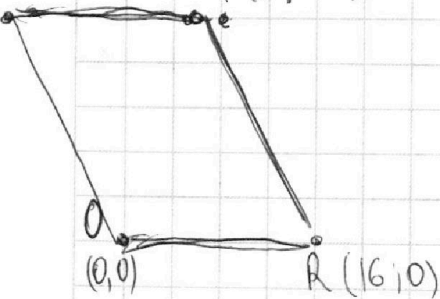


$$a_1 + b_1 = 15$$

$$b_1 + c_1 = 17$$

$$a_1 + c_1 =$$

$$P(-13; 26) \quad Q(3; 26)$$



$$2,5 = \sin \frac{\beta}{2} \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{c}{2}$$

$$5 = \frac{b}{2} \cdot \frac{c}{2}$$

$$10 = \frac{b}{2} \cdot \frac{c}{2}$$

$$\text{найдем: } \frac{(b-a)^2}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{b+c}{2 \cos \frac{\alpha}{2}}$$

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$$

$$(x_1, y_1) \quad (x_1, y_1 + 14)$$

$$a_1 + b_1 = 11$$

$$b_1 + c_1 = 12$$

$$a_1 + b_1 + c_1 = 39$$

$$c_1 = 23$$

$$a_1 = 7$$

$$b_1 = 4$$

$$c_1 = 23$$

$$a = 2 \cdot 7$$

$$b = 2^{14} \cdot 7^{10}$$

$$c = 2^{22} \cdot 7^{38}$$

$$ab : 2^{15} 7^{11}$$

$$bc : 2^{17} 7^{18}$$