



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^{15}7^{11}$ ,  $bc$  делится на  $2^{17}7^{18}$ ,  $ac$  делится на  $2^{23}7^{39}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

3. [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , хорда  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC : CB = 17 : 7$ . Найдите длину  $AB$ , если известно, что радиусы  $\omega$  и  $\Omega$  равны 7 и 13 соответственно.
4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0;0)$ ,  $P(-13;26)$ ,  $Q(3;26)$  и  $R(16;0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$ .
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник  $ABC$  вписан в окружность. Пусть  $M$  – середина той дуги  $AB$  описанной окружности, которая не содержит точку  $C$ ;  $N$  – середина той дуги  $AC$  описанной окружности, которая не содержит точку  $B$ . Найдите расстояние от вершины  $A$  до центра окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ , если расстояния от точек  $M$  и  $N$  до сторон  $AB$  и  $AC$  соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



15-01

$$abc : ac \Leftrightarrow abc : 7^{39} \text{ (так } ac : 7^{39})$$

$$(abc)^2 = ab \cdot bc \cdot ac : (2^{15} \cdot 7^{11} \cdot 2^{17} \cdot 7^{18} \cdot 2^{23} \cdot 7^{39}) \Leftrightarrow$$

$$(abc)^2 : 2^{55}, \text{ тогда } abc : 2^{28} \text{ (также } abc$$

$$: 2^k \text{ (} k \leq 27 \text{)}, \text{ и } (abc)^2 : 2^{2k}, (abc)^2 \not: 2^{2k+1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (abc)^2 \not: 2^{55} \text{ )}$$

$$\text{Значит, } abc : 2^{28} 7^{39} \Rightarrow abc \geq 2^{28} \cdot 7^{39}$$

Приведем пример, когда  $abc = 2^{28} 7^{39}$ :

$$a = 7^{11} \cdot 2^{11}, b = 2^5, c = 7^{28} \cdot 2^{12}$$

$$\text{Ответ: } 2^{28} \cdot 7^{39}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

15-2

$\frac{a+b}{(a^2-7ab+b^2)}$  . — Если дробь сократима на  $m > 1$ ,

то  $(a+b) \div m$ ,  $(a^2-7ab+b^2) \div m$ , и  $a \div m$ ,  $b \div m$

(если  $a \equiv b \equiv 0 \pmod m$ , то при  $m > 1$  возникает противоре-

чие, если только одно из чисел  $a, b \div m$ , то их

сумма  $\not\div m$ ).

$$a^2-7ab+b^2 = (a+b)^2 - 9ab \div m, \quad (a+b)^2 \div (a+b) \div m,$$

то есть  $-9ab \div m \Leftrightarrow 9ab \div m$ . Следовательно  $9 \div m$ ,

и  $m \leq 9$ . Приведем примеры при  $m=9$ :

~~15~~  $a=4, b=5, \quad a+b=9, \quad a^2-7ab+b^2 = -99$  —

оба числа сокращаются на  $m=9$ .

Ответ: при  $m=9$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

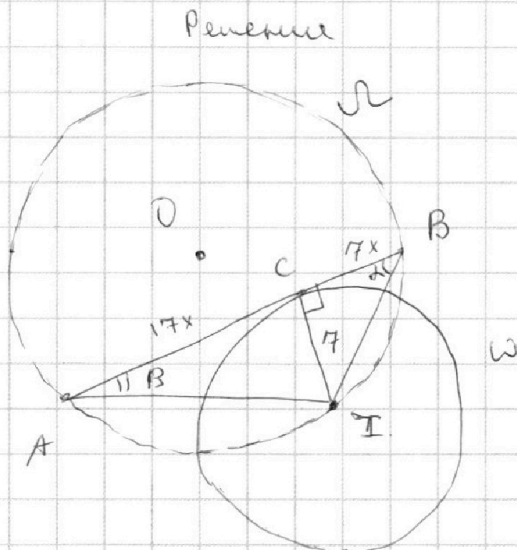
1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$N=3$   
 Дано  
 $\omega, \Omega$ ,  
 $AB, C \in AB$ ,  
 $AC:CB = 17:7$ .  
 $R_\omega = 7, R_\Omega = 13$   
 Найти:  
 $\angle B$



Сутью  $O$  - центр  $\Omega$ ,  $I$  - центр  $\omega$ ,  $\alpha = \angle ABI$ ,  $\beta = \angle BAI$ .

$CI \perp AB$ , т.к.  $\omega$  касается  $AB$  в точке  $C$ . Спроецируем

$$AB = 24x \Rightarrow AC = 17x, BC = 7x.$$

$$\sin \alpha = \frac{CI}{BI} = \frac{CI}{\sqrt{CI^2 + BC^2}} = \frac{7}{\sqrt{7^2 + (7x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

$$\sin \beta = \frac{CI}{AI} = \frac{CI}{\sqrt{CI^2 + AC^2}} = \frac{7}{\sqrt{7^2 + (17x)^2}} =$$

$$= \frac{7}{\sqrt{49 + 289x^2}}.$$

Согласно теореме синусов в  $\triangle ABI$   $2R_\Omega = \frac{AI}{\sin \alpha} =$

$$= \left( \frac{CI}{\sin \beta} \right) \cdot \frac{1}{\sin \alpha} = \frac{7}{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{7}{\sqrt{49+289x^2}}} = \sqrt{(x^2+1)(289x^2+49)}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Снова  $4R_2^2 = 4 \cdot 169 = 676 = (x^2 + 1)(289x^2 + 49)$

$$289x^4 + 338x^2 - 627 = 0$$

$$x^2 = \frac{-338 + \sqrt{338^2 + 4 \cdot 627 \cdot 289}}{289 \cdot 2} = \frac{\sqrt{209764}}{289 \cdot 2}$$

$$= \frac{2\sqrt{52441} - 169}{289} = 1$$

~~$$AB = 24\sqrt{x^2} = 24\sqrt{\frac{2\sqrt{52441} - 169}{289}}$$~~

~~$$\text{Ответ: } AB = 24\sqrt{\frac{2\sqrt{52441} - 169}{289}}$$~~

~~AB = 24~~

$$AB = 24\sqrt{x^2} = 24$$

$$\text{Ответ: } AB = 24$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1    2    3    4    5    6    7  
                 



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$x_1 = \frac{12 + \sqrt{(-12)^2 + 4 \cdot 4 \cdot 69}}{69 \cdot 2} = \frac{12 + 4\sqrt{78}}{69 \cdot 2} =$$

$$= \frac{6 + 2\sqrt{78}}{69} \quad - \text{удовлетворяет ОДЗ.}$$

$$x_2 = \frac{6 - 2\sqrt{78}}{69} \quad - \text{удовлетворяет ОДЗ}$$

$$\text{Ответ: } x = \left\{ \frac{6 - 2\sqrt{78}}{69}, \frac{1}{9}, \frac{6 + 2\sqrt{78}}{69} \right\}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

ОДЗ:

$$\begin{cases} 3x^2 - 6x + 2 \geq 0 \\ 3x^2 + 3x + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; \frac{3-\sqrt{3}}{3}\right] \cup \left[\frac{3+\sqrt{3}}{3}; +\infty\right)$$

~~Сделаем  $u^2 = 3x^2 - 6x + 2$ ,  $t^2 =$~~

Сделаем  $u = \sqrt{3x^2 - 6x + 2}$ ,  $t = \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$ .

Сложим  $u^2 - t^2 = 1 - 9x$ . Значит, мы должны решить

уравнение  $u - t = u^2 - t^2$ .

~~$(u-t)(u+t-1) = 0$~~   $(u-t)(u+t-1) = 0$

1)  $u - t = 0 \Rightarrow u = t$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$3x^2 - 6x + 2 = 3x^2 + 3x + 1$$

$$x = \frac{1}{9} - \text{удовлетворяет ОДЗ}$$

2)  $u + t - 1 = 0 \Rightarrow u + t = 1$

$$\begin{cases} \sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 \\ \sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x \end{cases} \quad / +$$

$$2\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = 2 - 9x$$

$$4(3x^2 - 6x + 2) = 81x^2 - 36x + 4$$

$$69x^2 - 12x - 4 = 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

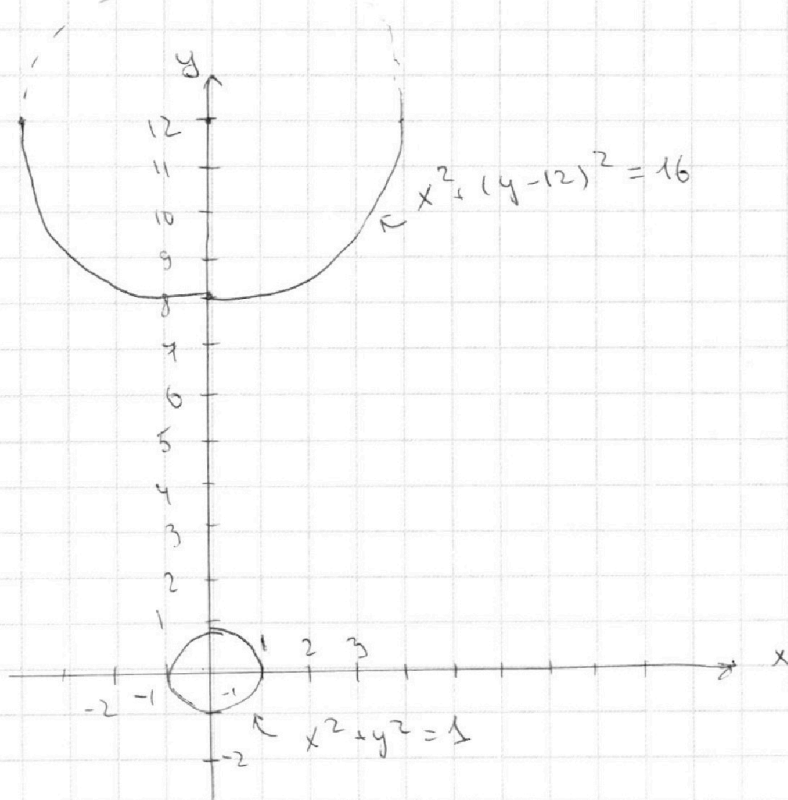
N°6

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) = 0 \end{cases}$$

$$(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) = 0$$

$$x^2 + y^2 - 1 = 0 \quad \text{и} \quad x^2 + (y - 12)^2 - 4^2 = 0 \quad -$$

уравнения окружностей с радиусами 1 и 4 и  
центрами  $(0, 0)$  и  $(0, 12)$  соответственно





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~Найти значения  $a$ , при которых~~  
Справ  $(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0$ , равно означ  
то точка  $(x; y)$  лежит ~~на~~ внутри ~~какой-то~~  
из данных окружностей, или на ней.  
Если прямая  $y = -ax + 8b$  проходит через какую-  
то окружность, но не касается её, то система будет  
иметь  $\infty$  решений, так как точек внутри окружности,  
лежащих на прямой, будет бесконечно много.

Значит, ~~то~~  $y = -ax + 8b$  должна лишь касаться  
окружностей. А так как решений ровно два, то

$y = -ax + 8b$  касается обеих окружностей:

$$\begin{cases} x_1^2 + (-ax + 8b)^2 - 1 = 0 \\ x_2^2 + (-ax + 8b - 12)^2 - 16 = 0 \end{cases}$$

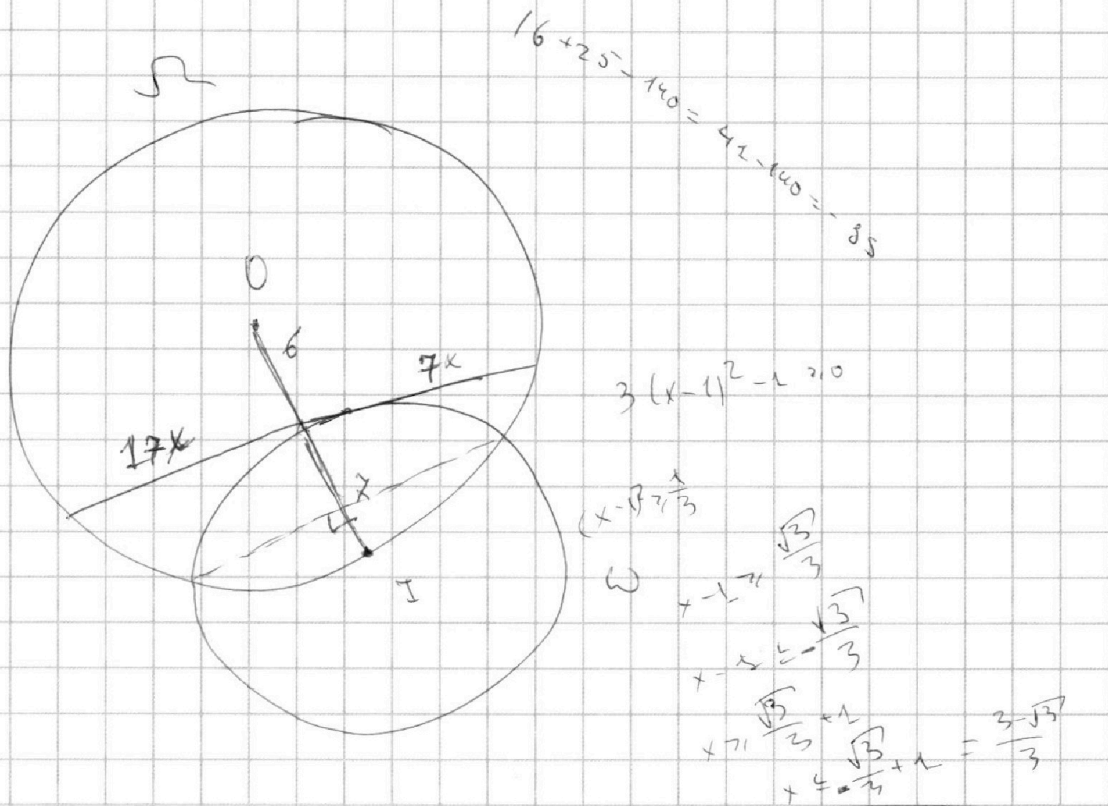
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 2 \sqrt{(3x^2 - 6x + 2)(3x^2 + 3x + 1)}$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1$$

$$3\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}x = 1 \quad \cdot \quad \left|x + \frac{1}{2}\right| \geq \frac{1}{4}$$

$$\left|x + \frac{1}{2}\right| \leq \frac{1}{4}$$

$$x + \frac{1}{2} \geq \frac{\sqrt{3}}{3} - 1 - \frac{1}{2} \geq 0$$

$$x + \frac{1}{2} \leq 1.5 - \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{9 - 2\sqrt{3}}{6}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

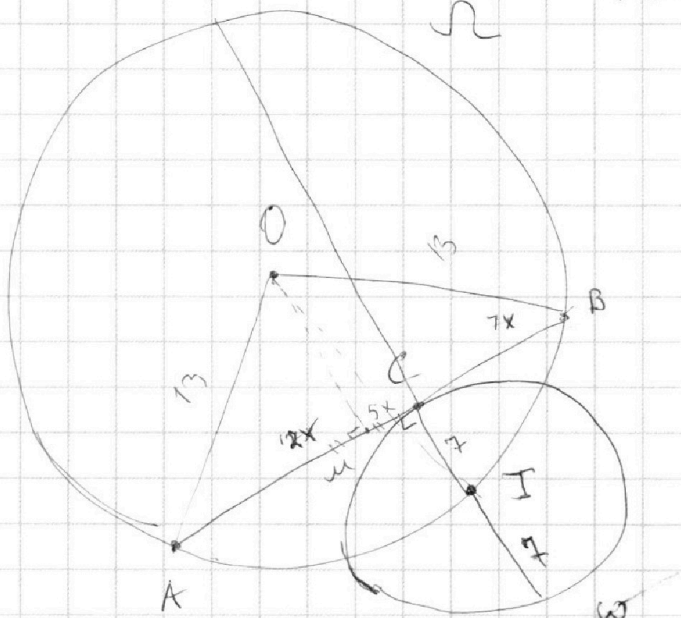


Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$R_{\omega} = R = 13$$

$$R_{\omega} = r = 7$$



$$AB = 24x$$

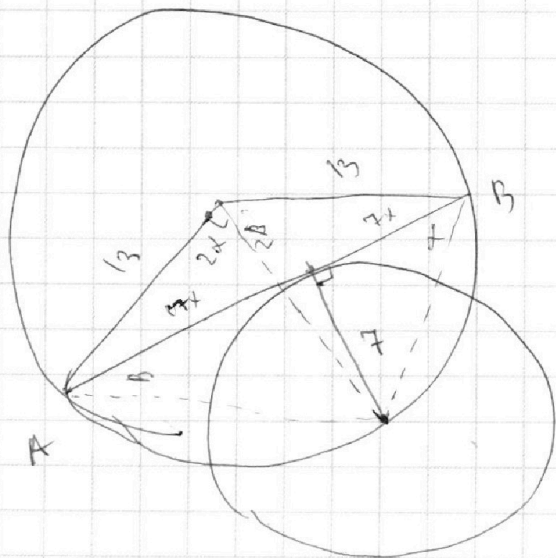
$$\frac{AB}{B} = 13$$

$$3(x + \frac{1}{2})^2 - \frac{3}{4} - 1 = \frac{1}{4} + 5x + \frac{1}{2} \cdot 2$$

0

$$17x - 4x + 526 = \frac{17}{10}$$

$$x = \frac{26}{25} = \frac{104}{100} = \frac{26}{25}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N 04

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

~~3x^2 - 6x + 2~~  $3x^2 + 3x + 1 + (1 - 9x) = 3x^2 - 6x + 2$

$$u^2 = 3x^2 + 3x + 1, \quad t = 1 - 9x$$

$$u^2 - \sqrt{u+t} = t$$

$$(u^2 - t)^2 = \sqrt{u+t}$$

$$u^4 - 2u^2t + t^2 = u+t$$

$$9x^2 + 3x + 1 =$$

$$(2+a)(x_2 - x_1) = 4$$

$$y_2 - y_1 = a(x_2 - x_1)$$

$$a = 5$$

$$3x^2 - 6x + 2 = 3(x^2 - 2x + 1) - 1 = 3(x-1)^2 - 1$$

N 041

$$3x^2 - 6x + 2 = 0$$

$$D = 36 - 8 \cdot 3 = 12$$

~~x = 1~~

$$3x^2 - 3x + 1 \geq 0$$

$$D = 9 - 12 < 0$$

$$x_1 = \frac{6 + 2\sqrt{3}}{6} = \frac{3 + \sqrt{3}}{3}$$

$$x_2 = \frac{3 - \sqrt{3}}{3}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$n=2$$

$$\frac{a}{b} : (a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}, \text{НОД}(a, b) = 1)$$

$$\begin{aligned} a+b &: m \\ a^2 - 7ab + b^2 &: m \end{aligned}$$

$$(a+b)^2 - 9ab : m$$

$$9ab : m$$

~~Гипотеза~~  $a, b$  взаимно просты, но противоречие

$$m=9$$

$$a=4, b=5$$

$$9:9, (6+25) - 7 \cdot 20 = 41 - 140 = -99 \neq 9$$

$$n=3$$

$$a, b, c :$$

$$ab : 2^{15} \cdot 7^{11}, bc : 2^{17} \cdot 7^{12}, ac : 2^{23} \cdot 7^{35}$$

$$abc \approx \text{НОК}(2^{15} \cdot 7^{11}, 2^{17} \cdot 7^{12}, 2^{23} \cdot 7^{35}) = 2^{23} \cdot 7^{35}$$

$$abc : 2^{23} \cdot 7^{35}$$

~~$$c = 7^{20}, a = 2^{15} \cdot 7^{11}$$~~

$$\begin{aligned} a &= 7^{11} \cdot 2^{11} \\ c &= 7^{25} \cdot 2^{12} \\ b &= 2^5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a+b &= 16 \\ a+c &= 23 \\ b+c &= 17 \end{aligned}$$

$$2a = 39 - 17 = 22$$

$$a-b = a=11$$

$$(abc)^2 : (2^{15+17+23} \cdot 7^{11+12+35}) = 2^{55} \cdot 7^{68}$$

$$abc : 7^{34}$$

$$abc : 2^{28}$$

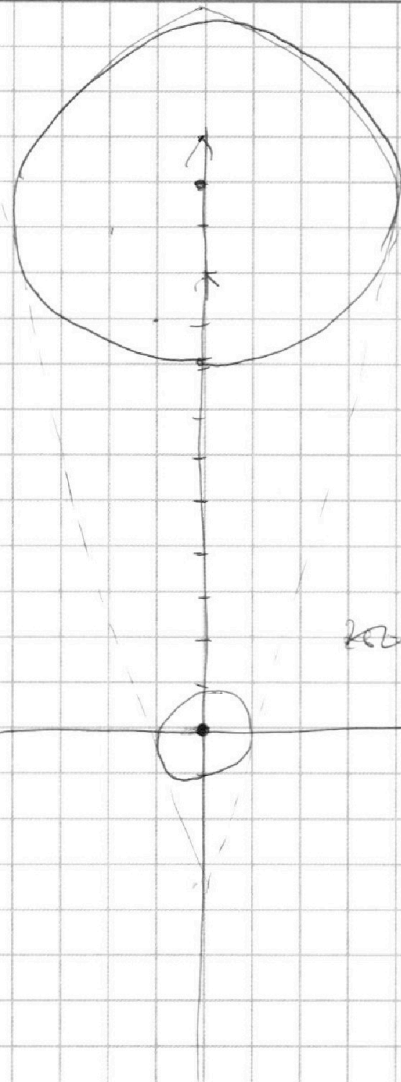
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$AB = 7 \cos \alpha$$

$$AB = 7(\cos \alpha + \cos \beta) = 7 \left( \frac{\cos \beta \sin \alpha + \cos \alpha \sin \beta}{\sin \alpha \sin \beta} \right)$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{\sin \beta}{\cos \beta} \cdot \sin \alpha \cdot \frac{1}{\cos \alpha} \cdot \frac{17}{7} = \frac{17}{26}$$

$$\frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta} = \frac{17}{26}$$

$$26 \sin(\alpha + \beta) = AB$$

$$\frac{7}{\sin \alpha} = 26 \sin \alpha$$

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{26 \sin \alpha \sin \beta}{\sin \beta} = \frac{7}{26}$$

$$\text{Еще } -a = 0, \text{ но } \beta \in \mathbb{R}$$

$$y = -ax + 86$$

$$y(0) = 86$$

$$\frac{7}{\sin \alpha} = \frac{138n}{26 \sin \beta}$$

$$\frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{26}{7}$$

$$7 = 17x \operatorname{tg} \beta = 7x \operatorname{tg} \alpha$$

$$\frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}} = \frac{17}{7} \cdot \frac{\operatorname{tg} \sin \beta}{\sqrt{1 - \sin^2 \beta}} \cdot \operatorname{tg} \alpha = \frac{17}{7} \cdot \frac{\sin \beta}{\cos \beta \cdot \cos \alpha}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

$$6x^2 - 3x + 3 - 9x^2 + 18x - 1 = 2\sqrt{(3x^2 - 6x + 2)(3x^2 + 3x + 1)}$$

$$\leftarrow 8x^2 - 75x^2 + 15x + 2 = 2\sqrt{3(\dots)}$$

$$D = 225 + 8 \cdot 75 = 825 = 25 \cdot 33$$

$$x_1 = \frac{-15 + 5\sqrt{33}}{150} = \frac{-3 + \sqrt{33}}{30}$$

$$x_2 = \frac{-3 - \sqrt{33}}{30}$$

$$A = \frac{1}{6} - 2u = \sqrt{2}$$

$$\frac{6 + \sqrt{12}}{6} = \frac{3 + \sqrt{3}}{3}$$

$$3x^2 - 6x + 2 = u^2, \quad 3x^2 + 3x + 1 = t^2$$

$$u^2 - t^2 = 1 - 9x$$

$$u - t = \frac{u^2 - t^2}{u + t} \rightarrow (u - t)(u + t - 1) = 0$$

1)  $u = t$

$$3x^2 - 6x + 2 = 3x^2 + 3x + 1, \quad 1 - 9x = 0, \quad x = \frac{1}{9}$$

2)  $u + t = 1$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1$$
$$= 1 \quad \begin{array}{r} + 17 \\ 17 \\ \hline 119 \\ 17 \\ \hline 186 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N.04

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2}$$

2241

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1$$

$$2\sqrt{3x^2 + 6x - 2} = 2 - 5x$$

$$12x^2 + 24x + 8 = 11x^2 - 36x + 4 = 1$$

$$69x^2 - 60x - 4 = 0$$

$$D = 3600 + 4 \cdot 6 \cdot 69 = 4704$$

$$\begin{array}{r} \times 69 \\ \times 16 \\ \hline 414 \\ + 69 \\ \hline 1104 \end{array}$$

$$\frac{30 + 28\sqrt{2}}{69}$$

$$\frac{30 + \sqrt{4704}}{69} < \frac{3 - \sqrt{3}}{3}$$

$$2\sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 5x$$

$$12x^2 + 12x + 4 = 81x^2$$

$$69x^2 - 12x + 4 = 0$$

$$D = 144 - 16 \cdot 69 = 4848$$

$$\begin{array}{r} 4704 \mid 4 \\ -4 \\ \hline 7 \\ -4 \\ \hline 30 \\ -28 \\ \hline 24 \end{array} \quad \begin{array}{r} 1176 \mid 4 \\ -4 \\ \hline 37 \\ -36 \\ \hline 27 \\ -24 \\ \hline 3 \end{array}$$

$$33^2 = 1600 - 80 - 1 = 1520$$

$$\begin{array}{r} \times 69 \\ \times 68 \\ \hline 544 \\ + 408 \\ \hline 4624 \end{array}$$

$$x_1 = \frac{60 + \sqrt{4704}}{69} = \frac{30 + \sqrt{1176}}{69} < 1$$

$$\frac{10}{23} = 1 - \frac{13}{23}$$

$$\frac{1 + 28\sqrt{2}}{69} = \frac{\sqrt{3} \cdot 23 + 28\sqrt{2}}{69}$$

$$x_2 = 33 > 23\sqrt{3}$$

$$x_6 = 1521 >$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



~~7tg~~ ~~7ctg~~ ~~7ctg~~  $\alpha$

$$17x \operatorname{tg} \beta = 7x \operatorname{tg} \alpha, \operatorname{tg} \alpha = \frac{17}{7} \operatorname{tg} \beta \Rightarrow \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{17}{7} \frac{\sin \beta}{\cos \beta}$$

$$\sin^2 \alpha (1 - \sin^2 \beta) = \sin^2 \beta (1 - \sin^2 \alpha) \cdot \frac{17^2}{7^2}$$

$$\sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \beta = (\sin^2 \beta - \sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \beta) \cdot \frac{185}{49}$$

$$49 \sin^2 \alpha - 49 \sin^2 \alpha \sin^2 \beta = 185 \sin^2 \beta - 185 \sin^2 \alpha \sin^2 \beta$$

~~7tg~~  $26 \sin(\alpha + \beta) = 24x$

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{12x}{13}$$

$$17^2 = 400 - 17 \cdot 6 + 9 = 338$$

$$\begin{array}{r} 17 \\ 119 \\ \hline 12 \cdot 11 \\ \hline 135 \\ 49 \\ \hline 233 \end{array}$$

$$ON^2 = 169 \Rightarrow 13^2 - 12^2 x^2 = 06^2 - 5^2 x^2$$

$$\begin{array}{r} 11 \\ 289 \\ + 49 \\ \hline 338 \end{array}$$

$$AI^2 = 49 + 189x^2, BI^2 = 49 + 49x^2$$

$$(x^2 + 1)(189x^2 - 49) = 338 \cdot 2 = 676 \quad 7^2 + 17^2 = 2 \cdot 13^2 \quad 289 - 49 = 238$$

$$289x^4 + 209x^2 + 49 - 338 = 0$$

$$\begin{array}{r} 338 \\ - 49 \\ \hline 289 \end{array}$$

$$289x^4 + 209 - 281 \quad 338x^2 - 209 = 0$$

$$x^4 + \frac{338}{289}x^2 - 120 = 0$$

$$\begin{array}{r} 676 \\ - 49 \\ \hline 627 \\ - 209 \\ \hline 418 \end{array}$$

$$D = 338^2$$

$$289x^4 + 338x^2 - 676$$

$$\begin{array}{r} 23 \\ 169 \\ \times 4 \\ \hline 676 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 11 \\ 289 \\ \times 49 \\ \hline 338 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{1}{27} - \frac{2}{3} \times 2 = \frac{54 - 108}{27} = \frac{-54}{27} = -2$$

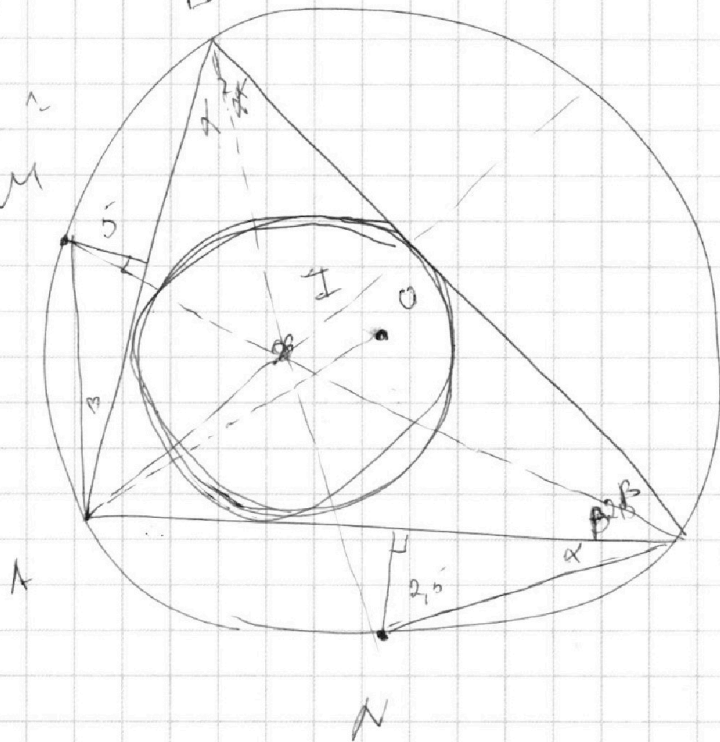
$$\frac{1}{27} - \frac{2}{3} - 2 = \frac{1 - 18 - 54}{27} = \frac{-71}{27}$$

$$\alpha = \frac{-71}{27}$$

$$\sin \alpha = 2x$$

$$R = \frac{a}{2 \sin \alpha}$$

$$\frac{1}{27} - \frac{1}{3} = \frac{1 - 9}{27} = \frac{-8}{27}$$



$$\frac{3 - \sqrt{3}}{3} > \frac{1}{3}$$

$$9 - 3\sqrt{3} < 1$$

$$8 < 3\sqrt{3}$$

$$64 < 27$$

$$\frac{3 - \sqrt{3}}{3} > \frac{1}{3}$$

$$3 - 3\sqrt{3} > 1$$

$$AOE \quad NC = \frac{2.5}{\sin \alpha}, \quad AM = \frac{5}{\sin \beta}$$

$$AO = R = \frac{NC}{2 \sin \alpha} = \frac{2.5}{\sin^2 \alpha} = \frac{2.5}{\sin^2 \beta}$$

$$\sin^2 \beta = \sin^2 \alpha$$

$$\sin \beta = \sin \alpha$$

$$\frac{2.5}{4}$$

$$\frac{9}{3}$$

$$276$$

$$\begin{array}{r} \times 63^2 \\ 63 \\ \hline 189 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 378 \\ \hline 3969 \end{array}$$

$$3969$$

$$1899$$

$$\hline 2070$$

$$1899 + 276 \sqrt{26} < 3969$$

$$\sqrt{276 \cdot 6}$$

$$276 \sqrt{26} < 2070$$

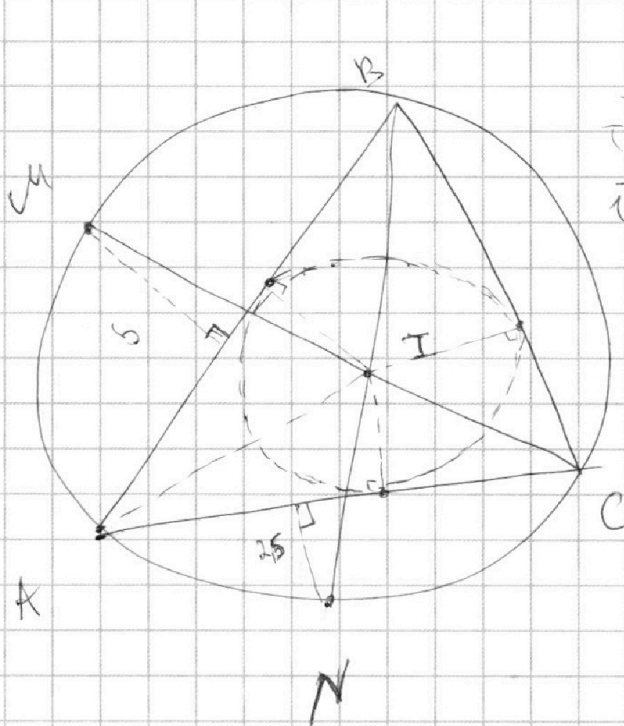
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

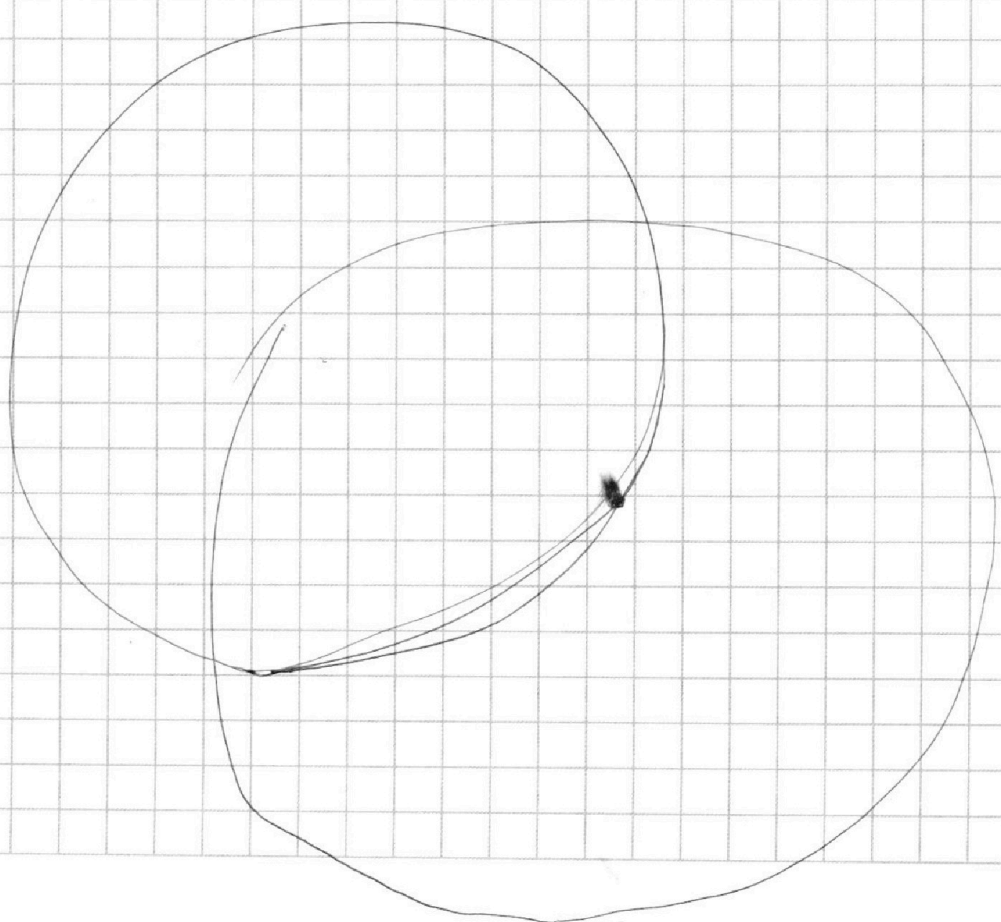
**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{array}{r} \times 69 \\ 16 \\ \hline 414 \\ \overline{) 69} \\ 1104 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1248 \mid 16 \\ 112 \mid 78 \\ \hline 128 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{array}{r} 338 \\ \times 338 \\ \hline 2704 \\ + 1014 \\ \hline 114244 \end{array}$$

$$627 \cdot 4 = 2400 + 25 \cdot 4 + 2 \cdot 4 = 2508$$

$$\sqrt{52441} = 229$$

$$\begin{array}{r} 211 \\ \times 211 \\ \hline 211 \\ + 422 \\ \hline 4421 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2508 \\ \times 289 \\ \hline 20064 \\ + 22572 \\ \hline 724812 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 724812 \\ + 114244 \\ \hline 839056 \end{array}$$

$$211^2 = 40000 + 2 \cdot 400 \cdot 11 + 121 = 468121$$

$$\begin{array}{r} 839056 \\ - 80 \\ \hline 39 \\ - 32 \\ \hline 70 \\ - 64 \\ \hline 65 \\ - 64 \\ \hline 16 \\ \hline 16 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$341$$

$$\begin{array}{r} 233 \\ \times 233 \\ \hline 2151 \\ + 466 \\ \hline 5417 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 52441 \\ - 38 \\ \hline 144 \\ - 133 \\ \hline 114 \\ - 114 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2151 \\ + 7717 \\ \hline 478 \\ \hline 57121 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 52441 \\ - 25 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 52441 \\ - 422 \\ \hline 1024 \\ - 844 \\ \hline 1801 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

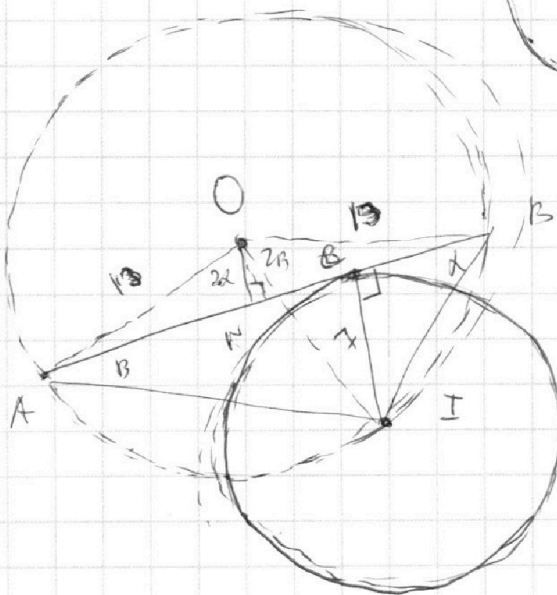
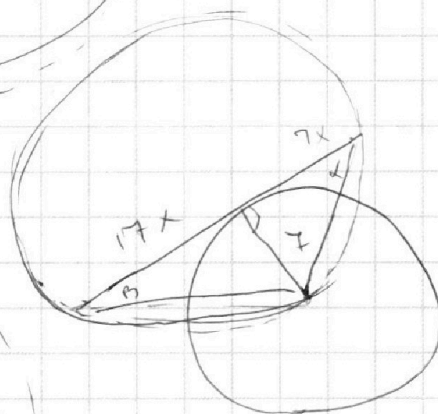
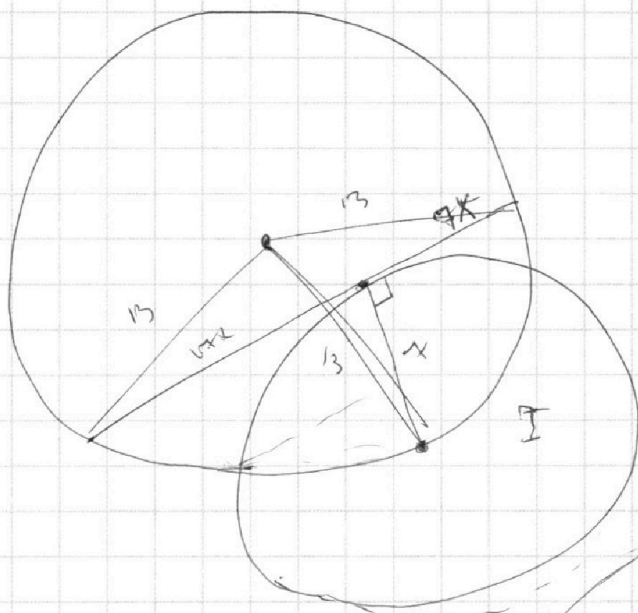
1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$2R \cdot \sin \alpha = 100$



$$2R = \frac{7}{\sin \beta} = \frac{7}{\sin \alpha \sin \alpha}$$

$$\sin \alpha = \frac{7}{4\sqrt{1+x^2}}$$

$$\cos \alpha = \frac{7}{\sqrt{49+17x^2}}$$

$$= \frac{7}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{7}{\sqrt{49+17x^2}} = \sqrt{1+x^2} \cdot \sqrt{185x^2+49} = 2R$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



388

$$\begin{array}{r} 839056 \\ - 8 \\ \hline 39 \\ - 38 \\ \hline 30 \\ - 28 \\ \hline 25 \\ - 24 \\ \hline 16 \\ - 16 \\ \hline 0 \end{array} \quad \Bigg| \quad \begin{array}{r} 41 \\ 29764 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4413 \\ - 29 \\ \hline 51 \end{array} \quad \begin{array}{r} 85+51 \\ = 136 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 52441 \\ - 51 \\ \hline 52441 \end{array} \Bigg| \quad \begin{array}{r} 13 \\ 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 28764 \\ - 28 \\ \hline 17 \\ - 16 \\ \hline 16 \\ - 16 \\ \hline 0 \end{array} \quad \Bigg| \quad \begin{array}{r} 4 \\ - \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 209764 \\ - 20 \\ \hline 9 \\ - 8 \\ \hline 14 \\ - 16 \\ \hline 16 \\ - 16 \\ \hline 04 \\ - 4 \\ \hline 0 \end{array} \quad \Bigg| \quad \begin{array}{r} 4-5 \\ 52441 \\ 144 \\ 196 \\ 81 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 28 \\ \times 229 \\ \hline 2061 \\ 458 \\ \hline 52441 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 229 \\ \times 229 \\ \hline 2061 \\ 458 \\ \hline 52441 \end{array}$$

$$2 \cdot 229 = 458$$
$$\begin{array}{r} 458 \\ - 169 \\ \hline 289 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$231$$

$$\begin{array}{r}
 231 \\
 \times 231 \\
 \hline
 231 \\
 + 693 \\
 \hline
 53361
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 52441 \\
 - 44 \\
 \hline
 84 \\
 - 77 \\
 \hline
 75 \\
 - 66 \\
 \hline
 81
 \end{array}$$

$$22$$

$$\begin{array}{r}
 225 \\
 \times 229 \\
 \hline
 2461 \\
 458 \\
 \hline
 458 \\
 52841
 \end{array}$$

$$6 \cdot 54 + 18\sqrt{78} < 69$$

$$144 + 16 \cdot 15$$

$$\begin{array}{r}
 69 \\
 \times 16 \\
 \hline
 414 \\
 + 69 \\
 \hline
 1104
 \end{array}$$

$\sqrt{36} \approx 6,1$   
 $6 \times$

$$\begin{array}{l}
 36 - 22 = 14 \\
 6 + \sqrt{14} = 3 \frac{14}{3}
 \end{array}$$

$$1248 \mid 4 = 312 \mid$$

$$78$$

$$78 \mid 2 = 39 \cdot 2$$

$$4\sqrt{78}$$

$$\begin{array}{r}
 23 \\
 \times 23 \\
 \hline
 69 \\
 + 46 \\
 \hline
 525 \\
 \times 3 \\
 \hline
 1587 \\
 + 7818 \\
 \hline
 781855 \\
 \times 4 \\
 \hline
 312
 \end{array}$$

$$\frac{12 + 4\sqrt{78}}{69 \cdot 2} = \frac{6 + 2\sqrt{78}}{69} > \frac{1}{2}$$

$$\frac{12 - 4\sqrt{78}}{69 \cdot 2} = \frac{6 - 2\sqrt{78}}{69}$$

$$\begin{array}{l}
 12 + 4\sqrt{78} > 69 \\
 4\sqrt{78} > 57 \\
 16 \cdot 78 > 572
 \end{array}$$

$$\frac{6 + 2\sqrt{78}}{69}$$

$$\frac{3 - \sqrt{3}}{3}$$

$$11 + 6\sqrt{78}$$

$$\frac{6 + 2\sqrt{78}}{23} < \frac{3 - \sqrt{3}}{3}$$

$$6 + 2\sqrt{78} < 69 + 23\sqrt{3}$$

$$23\sqrt{3} + 2\sqrt{78} < 63$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 + ax^2 - 4bavx + 64b^2 - 1 = 0$$

$$\text{или } a(x^2$$

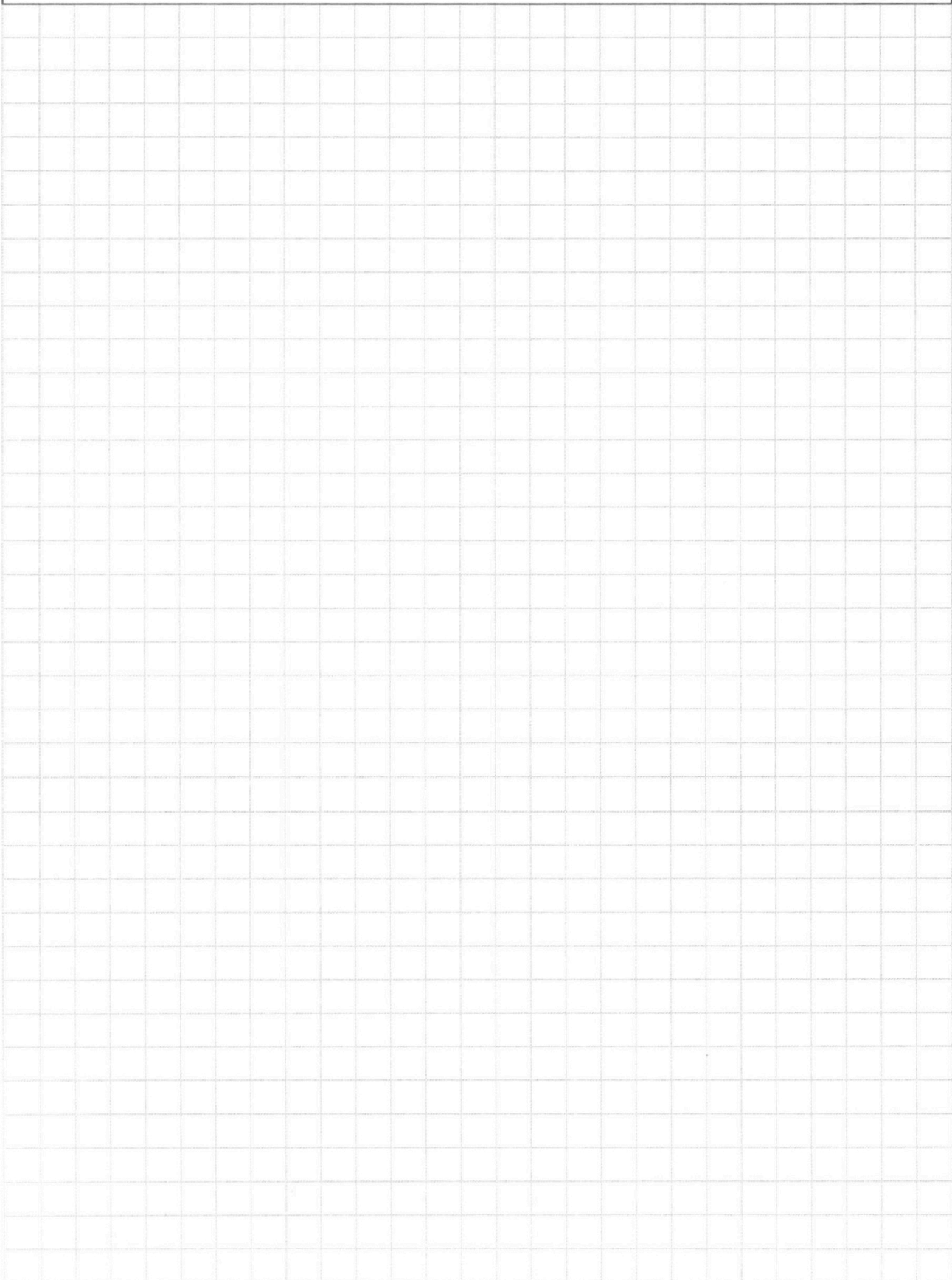


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.  
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

