



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-13;26)$, $Q(3;26)$ и $R(16;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



15-01

$$abc : ac \Leftrightarrow abc : 7^{39} \text{ (так } ac : 7^{39})$$

$$(abc)^2 = ab \cdot bc \cdot ac : (2^{15} \cdot 7^{11} \cdot 2^{17} \cdot 7^{18} \cdot 2^{23} \cdot 7^{39}) \Leftrightarrow$$

$$(abc)^2 : 2^{55}, \text{ тогда } abc : 2^{28} \text{ (так как } abc$$

$$: 2^k \text{ (} k \leq 27 \text{), и } (abc)^2 : 2^{2k}, (abc)^2 \not: 2^{2k+1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (abc)^2 \not: 2^{55} \text{)}$$

$$\text{Значит, } abc : 2^{28} 7^{39} \Rightarrow abc \geq 2^{28} \cdot 7^{39}$$

Приведем пример, когда $abc = 2^{28} 7^{39}$:

$$a = 7^{11} \cdot 2^{11}, b = 2^5, c = 7^{28} \cdot 2^{12}$$

$$\text{Ответ: } 2^{28} \cdot 7^{39}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

15-2

$\frac{a+b}{(a^2-7ab+b^2)}$. — Если дробь сократима на $m > 1$,

то $(a+b) \div m$, $(a^2-7ab+b^2) \div m$, и $a \div m$, $b \div m$

(если $a \equiv b \equiv 0 \pmod m$, то при $m > 1$ возникает противоре-
чие, если только одно из чисел $a, b \div m$, то их
сумма $\not\equiv m$).

$$a^2-7ab+b^2 = (a+b)^2 - 9ab \div m, (a+b)^2 \div (a+b) \div m,$$

то есть $-9ab \div m \Leftrightarrow 9ab \div m$. Следовательно $9 \div m$,

и $m \leq 9$. Приведем примеры при $m=9$:

~~15~~ $a=4, b=5$. $a+b=9$, $a^2-7ab+b^2 = -99$ —

оба числа сокращаются на $m=9$.

Ответ: при $m=9$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

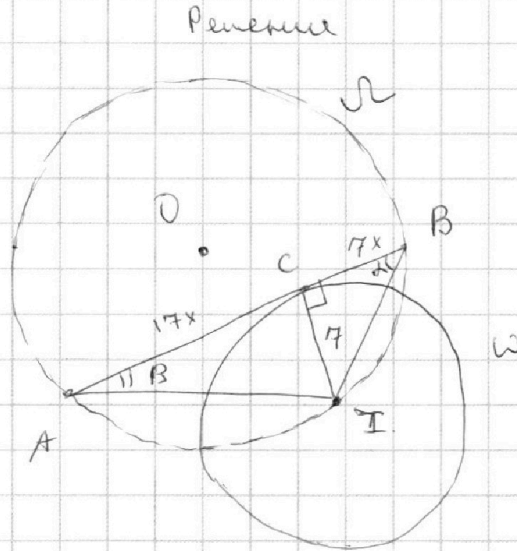
1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$N=3$
 Дано
 $\omega, \Omega,$
 $AB, C \in AB,$
 $AC:CB = 17:7.$
 $R_\omega = 7, R_\Omega = 13$
 Найти:
 $\angle B$



Сутью O - центр Ω , I - центр ω , $\alpha = \angle ABI$, $\beta = \angle BAI$.

$CI \perp AB$, т.к. ω касается AB в точке C . Спроецируем

$$AB = 24x \Rightarrow AC = 17x, BC = 7x.$$

$$\sin \alpha = \frac{CI}{BI} = \frac{CI}{\sqrt{CI^2 + BC^2}} = \frac{7}{\sqrt{7^2 + (7x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

$$\sin \beta = \frac{CI}{AI} = \frac{CI}{\sqrt{CI^2 + AC^2}} = \frac{7}{\sqrt{7^2 + (17x)^2}} =$$

$$= \frac{7}{\sqrt{49 + 289x^2}}.$$

Согласно теореме синусов в $\triangle ABI$ $2R_\Omega = \frac{AI}{\sin \alpha} =$

$$= \left(\frac{CI}{\sin \beta} \right) \cdot \frac{1}{\sin \alpha} = \frac{7}{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{7}{\sqrt{49+289x^2}}} = \sqrt{(x^2+1)(289x^2+49)}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Снова $4R_2^2 = 4 \cdot 169 = 676 = (x^2 + 1)(289x^2 + 49)$

$$289x^4 + 338x^2 - 627 = 0$$

$$x^2 = \frac{-338 + \sqrt{338^2 + 4 \cdot 627 \cdot 289}}{289 \cdot 2} = \frac{\sqrt{209764}}{289 \cdot 2}$$

$$= \frac{2\sqrt{52441} - 169}{289} = 1$$

~~$$AB = 24\sqrt{x^2} = 24\sqrt{\frac{2\sqrt{52441} - 169}{289}}$$~~

~~$$\text{Ответ: } AB = 24\sqrt{\frac{2\sqrt{52441} - 169}{289}}$$~~

~~AB = 24~~

$$AB = 24\sqrt{x^2} = 24$$

$$\text{Ответ: } AB = 24$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$x_1 = \frac{12 + \sqrt{(-12)^2 + 4 \cdot 4 \cdot 69}}{69 \cdot 2} = \frac{12 + 4\sqrt{78}}{69 \cdot 2} =$$

$$= \frac{6 + 2\sqrt{78}}{69} \quad - \text{удовлетворяет ОДЗ.}$$

$$x_2 = \frac{6 - 2\sqrt{78}}{69} \quad - \text{удовлетворяет ОДЗ}$$

$$\text{Ответ: } x = \left\{ \frac{6 - 2\sqrt{78}}{69}, \frac{1}{9}, \frac{6 + 2\sqrt{78}}{69} \right\}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

ОДЗ:

$$\begin{cases} 3x^2 - 6x + 2 \geq 0 \\ 3x^2 + 3x + 1 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x \in \left(-\infty; \frac{3-\sqrt{3}}{3}\right] \cup \left[\frac{3+\sqrt{3}}{3}; +\infty\right)$$

~~Сделаем $u^2 = 3x^2 - 6x + 2$, $t^2 =$~~

Сделаем $u = \sqrt{3x^2 - 6x + 2}$, $t = \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$.

Сложим $u^2 - t^2 = 1 - 9x$. Значит, мы должны решить

уравнение $u - t = u^2 - t^2$.

~~$(u-t)(u+t-1) = 0$~~ $(u-t)(u+t-1) = 0$

1) $u - t = 0 \Rightarrow u = t$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$3x^2 - 6x + 2 = 3x^2 + 3x + 1$$

$$x = \frac{1}{9} - \text{удовлетворяет ОДЗ}$$

2) $u + t - 1 = 0 \Rightarrow u + t = 1$

$$\begin{cases} \sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 \\ \sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x \end{cases} \quad / +$$

$$2\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = 2 - 9x$$

$$4(3x^2 - 6x + 2) = 81x^2 - 36x + 4$$

$$69x^2 - 12x - 4 = 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

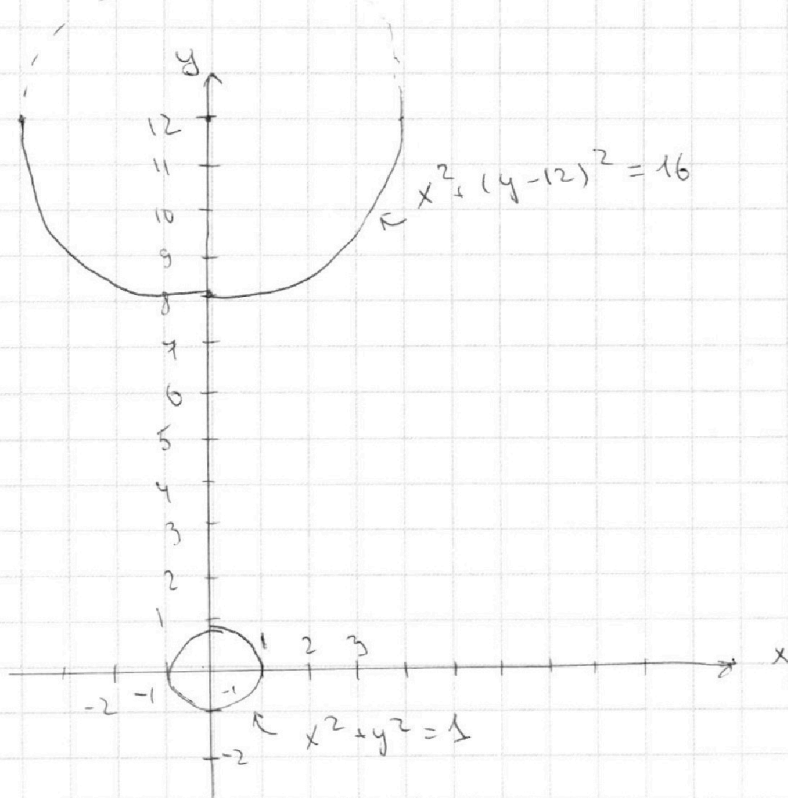
N°6

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) = 0 \end{cases}$$

$$(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) = 0$$

$$x^2 + y^2 - 1 = 0 \quad \text{и} \quad x^2 + (y - 12)^2 - 4^2 = 0 \quad -$$

уравнения окружностей с радиусами 1 и 4 и
центрами $(0; 0)$ и $(0; 12)$ соответственно



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~Найти значения a , при которых~~
Снак $(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0$, равно означ
то точка $(x; y)$ лежит ~~на~~ внутри ~~какой-то~~
из данных окружностей, или на ней.
Если прямая $y = -ax + 8b$ проходит через какую-
то окружность, но не касается её, то система будет
иметь ∞ решений, так как точек внутри окружности,
лежащих на прямой, будет бесконечно много.

Значит, ~~то~~ $y = -ax + 8b$ должна лишь касаться
окружностей. А так как решений ровно два, то

$y = -ax + 8b$ касается обеих окружностей:

$$\begin{cases} x_1^2 + (-ax_1 + 8b)^2 - 1 = 0 \\ x_2^2 + (-ax_2 + 8b - 12)^2 - 16 = 0 \end{cases}$$

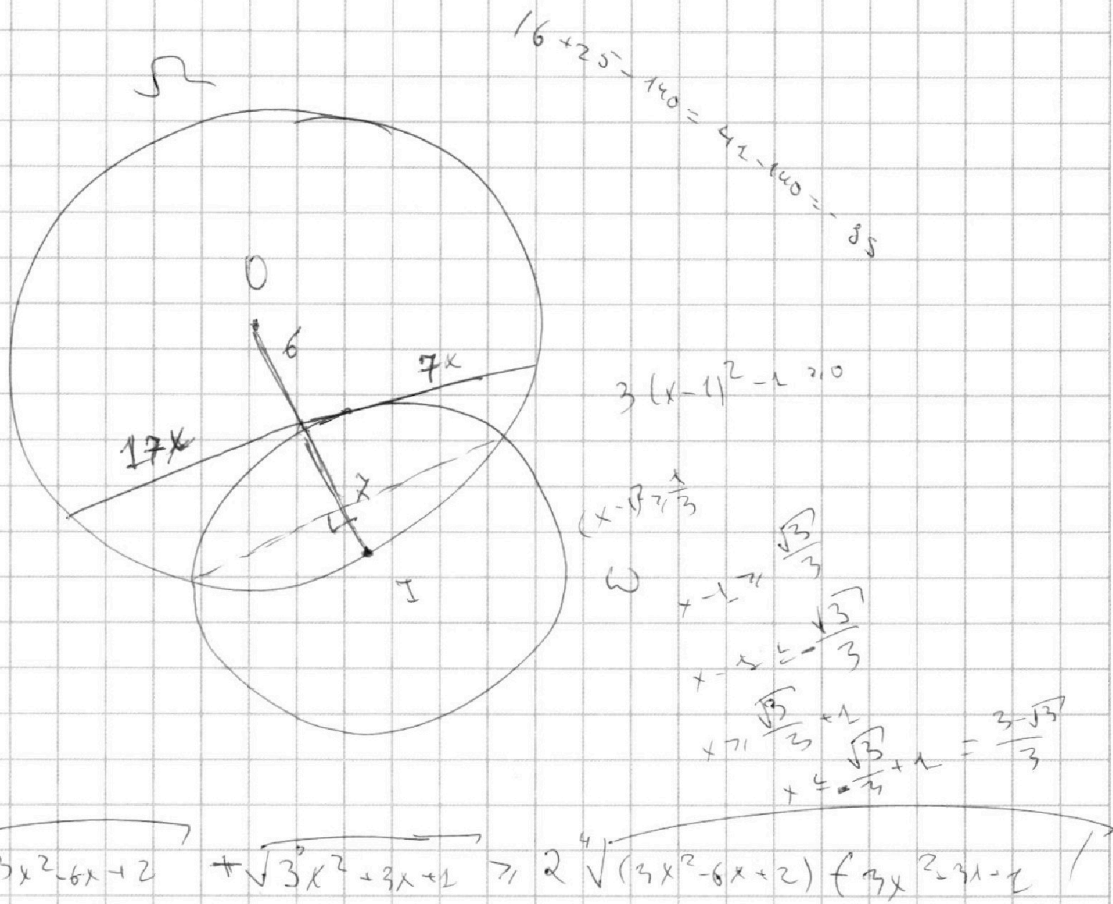
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 \Rightarrow 2 \sqrt{(3x^2 - 6x + 2)(3x^2 + 3x + 1)}$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1$$

$$3\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}x + 1 \quad \cdot \quad \left|x + \frac{1}{2}\right| \geq \frac{1}{4}$$

$$\left|x + \frac{1}{2}\right| \leq \frac{1}{4}$$

$$x + \frac{1}{2} \geq \frac{\sqrt{3}}{3} - 1 - \frac{1}{2} \geq 0$$

$$x + \frac{1}{2} \leq 1.5 - \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{9 - 2\sqrt{3}}{6}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

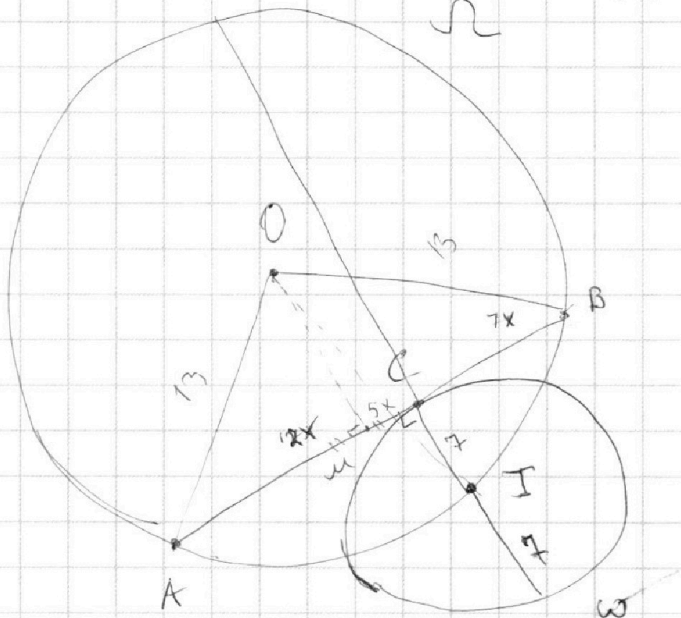


Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$R_{\omega} = R = 13$$

$$R_{\omega} = r = 7$$



$$AB = 24x$$

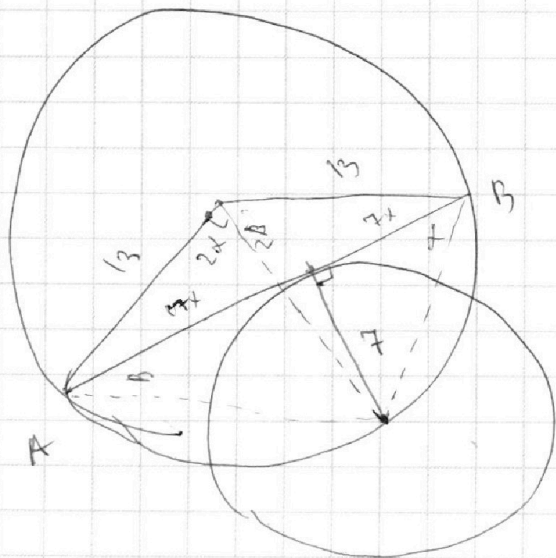
$$\frac{AB}{B} = 13$$

$$3(x + \frac{1}{2})^2 - \frac{3}{4} - 1 = \frac{1}{4} + 5x + \frac{1}{2} \cdot 2$$

0

$$17x - 4x + 526 = \frac{17}{10}$$

$$x = \frac{26}{25} = \frac{104}{100} = \frac{26}{25}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N^o 4

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

~~3x^2 + 3x + 1~~ $3x^2 + 3x + 1 + (1 - 9x) = 3x^2 - 6x + 2$

$$u^2 = 3x^2 + 3x + 1, \quad t = 1 - 9x$$

$$u^2 - \sqrt{u+t} = t$$

$$(u^2 - t)^2 = \sqrt{u+t}$$

$$u^4 - 2u^2t + t^2 = u+t$$

$$9x^2 + 3x + 1 =$$

$$(2+a)(x_2 - x_1) = 4$$

$$y_2 - y_1 = a(x_2 - x_1)$$

$$a = 5$$

$$3x^2 - 6x + 2 = 3(x^2 - 2x + 1) - 1 = 3(x-1)^2 - 1$$

N^o 41

$$3x^2 - 6x + 2 = 0$$

$$D = 36 - 8 \cdot 3 = 12$$

~~x = 1~~

$$3x^2 - 3x + 1 \geq 0$$

$$D = 9 - 12 < 0$$

$$x_1 = \frac{6 + 2\sqrt{3}}{6} = \frac{3 + \sqrt{3}}{3}$$

$$x_2 = \frac{3 - \sqrt{3}}{3}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$n=2$$

$$\frac{a}{b} : (a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}, \text{НОД}(a, b) = 1)$$

$$\begin{aligned} a+b &: m \\ a^2 - 7ab + b^2 &: m \end{aligned}$$

$$(a+b)^2 - 9ab : m$$

$$9ab : m$$

~~Гипотеза~~ $\text{НОД}(a, b) = m$, но противоречие

$$m=9$$

$$a=4, b=5$$

$$9:9, (6+25) - 7 \cdot 20 = 41 - 140 = -99 \neq 9$$

$$n=3$$

$$a, b, c :$$

$$ab : 2^{15} \cdot 7^{11}, bc : 2^{17} \cdot 7^{12}, ac : 2^{23} \cdot 7^{35}$$

$$abc \approx \text{НОД}(2^{15} \cdot 7^{11}, 2^{17} \cdot 7^{12}, 2^{23} \cdot 7^{35}) = 2^{23} \cdot 7^{35}$$

$$abc : 2^{23} \cdot 7^{35}$$

~~$$c = 7^{35}, a = 2^{15} \cdot 7^{11}$$~~

$$\begin{aligned} a &= 7^{11} \cdot 2^{15} \\ c &= 7^{25} \cdot 2^{12} \\ b &= 2^5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a+b &= 16 \\ a+c &= 23 \\ b+c &= 17 \end{aligned}$$

$$2a = 39 - 17 = 22$$

$$a-b = a=11$$

$$(abc)^2 : (2^{15+17+23} \cdot 7^{11+12+35}) = 2^{55} \cdot 7^{68}$$

$$abc : 7^{34}$$

$$abc : 2^{28}$$

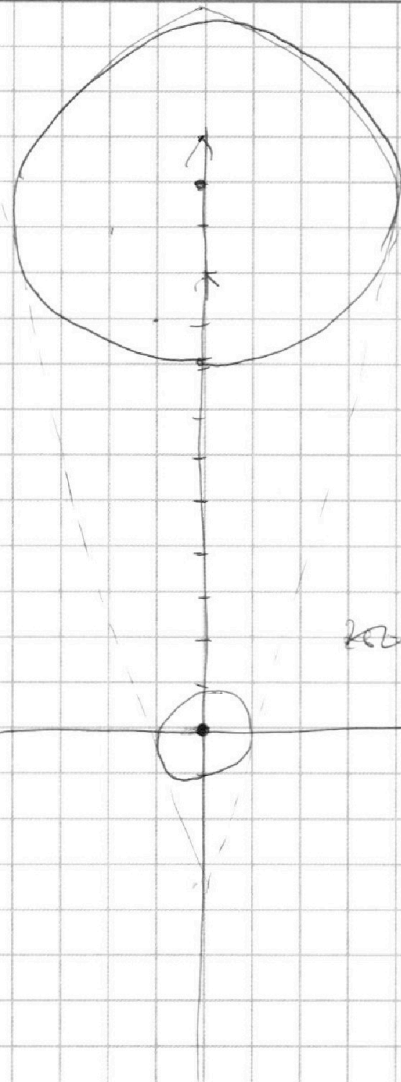
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$AB = 7 \cos \alpha$$

$$AB = 7(\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) = 7 \left(\frac{\cos \beta \sin \alpha + \cos \alpha \sin \beta}{\sin \alpha \sin \beta} \right)$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{\sin \beta}{\cos \beta} \cdot \sin \alpha \cdot \frac{1}{\cos \alpha} \cdot \frac{17}{7} = \frac{17}{26}$$

$$\frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta} = \frac{17}{17 \cdot 26}$$

$$26 \sin(\alpha + \beta) = AB$$

$$\frac{7}{\sin \beta} = 26 \sin \alpha$$

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \sin \alpha \sin \beta = \frac{7}{26}$$

$$\sin \alpha - \alpha = 0, \text{ no } \beta \exists$$

$$y = -ax + 86$$

$$y(0) = 86$$

$$\frac{7}{\sin \alpha} = 138 \sin \beta$$

$$\frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{26}{7}$$

$$7 = 17 \times \tan \beta = 7 \times \tan \alpha$$

$$\frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}} = \frac{17}{7} \rightarrow \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{17}{7} \rightarrow \tan \alpha = \frac{17}{7} = \frac{17}{7 \cos \beta}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

$$6x^2 - 3x + 3 - 9x^2 + 18x - 1 = 2\sqrt{(3x^2 - 6x + 2)(3x^2 + 3x + 1)}$$

$$\leftarrow 8x^2 - 75x^2 + 15x + 2 = 2\sqrt{3(\dots)}$$

$$D = 225 + 8 \cdot 75 = 825 = 25 \cdot 33$$

$$x_1 = \frac{-15 + 5\sqrt{33}}{150} = \frac{-3 + \sqrt{33}}{30}$$

$$x_2 = \frac{-3 - \sqrt{33}}{30}$$

$$A = \frac{1}{6} - 2u = \sqrt{2}$$

$$\frac{6 + \sqrt{12}}{6} = \frac{3 + \sqrt{3}}{3}$$

$$3x^2 - 6x + 2 = u^2, \quad 3x^2 + 3x + 1 = t^2$$

$$u^2 - t^2 = 1 - 9x$$

$$u - t = \frac{u^2 - t^2}{u + t} \rightarrow (u - t)(u + t - 1) = 0$$

1) $u = t$

$$3x^2 - 6x + 2 = 3x^2 + 3x + 1, \quad 1 - 9x = 0, \quad x = \frac{1}{9}$$

2) $u + t = 1$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1$$
$$= 1 \quad \begin{array}{r} + 17 \\ 17 \\ \hline 119 \\ 17 \\ \hline 186 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N=04

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2}$$

2241

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1$$

$$2\sqrt{3x^2 + 6x - 2} = 2 - 5x$$

$$12x^2 + 24x + 8 = 9x^2 - 36x + 4 = 1$$

$$69x^2 - 60x - 4 = 0$$

$$D = 3600 + 46 \cdot 69 = 4704$$

$$60 \pm \sqrt{4704}$$

$$x_1 = \frac{60 + \sqrt{4704}}{69} = \frac{30 + \sqrt{1176}}{69} < 1$$

$$\begin{array}{r} \times 69 \\ \times 16 \\ \hline 414 \\ + 69 \\ \hline 1104 \end{array}$$

$$\frac{30 + 28\sqrt{3}}{69}$$

$$\frac{30 + \sqrt{1176}}{69} < \frac{3 - \sqrt{3}}{3}$$

$$2\sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 5x$$

$$12x^2 + 12x + 4 = 25x^2$$

$$69x^2 - 12x + 4 = 0$$

$$D = 144 - 16 \cdot 69 = 4848$$

$$x_{21} = 35 > 23\sqrt{3}$$

$$x_{22} = 1521 >$$

$$\begin{array}{r} 4704 \mid 4 \\ -4 \\ \hline 7 \\ -4 \\ \hline 30 \\ -28 \\ \hline 24 \end{array} \quad \begin{array}{r} 1176 \mid 4 \\ -4 \\ \hline 37 \\ -36 \\ \hline 27 \\ -26 \\ \hline 24 \end{array}$$

$$33^2 = 1600 - 80 - 1 = 1519$$

$$33^2 = 400 - 80 - 2 = 320$$

$$\frac{10}{23} = 1 - \frac{13}{23}$$

$$\frac{1 + 28\sqrt{3}}{69} = \frac{\sqrt{3} \cdot 23 + 28\sqrt{3}}{69}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



~~7tg~~ ~~7ctg~~ ~~7ctg~~ x

$$17x \operatorname{tg} \beta = 7x \operatorname{tg} \alpha, \operatorname{tg} \alpha = \frac{17}{7} \operatorname{tg} \beta \Rightarrow \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{17}{7} \frac{\sin \beta}{\cos \beta}$$

$$\sin^2 \alpha (1 - \sin^2 \beta) = \sin^2 \beta (1 - \sin^2 \alpha) \cdot \frac{17^2}{7^2}$$

$$\sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \beta = (\sin^2 \beta - \sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \beta) \cdot \frac{185}{49}$$

$$49 \sin^2 \alpha - 49 \sin^2 \alpha \sin^2 \beta = 185 \sin^2 \beta - 185 \sin^2 \alpha \sin^2 \beta$$

~~7tg~~ $26 \sin(\alpha + \beta) = 24x$

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{12x}{13}$$

$$17^2 = 400 - 17 \cdot 6 + 9 = 338$$

$$\begin{array}{r} 17 \\ 119 \\ \hline 12 \cdot 11 \\ \hline 135 \\ 49 \\ \hline 233 \end{array}$$

$$ON^2 = 169 \Rightarrow 13^2 - 12^2 x^2 = 06^2 - 5^2 x^2$$

$$\begin{array}{r} 11 \\ 289 \\ + 49 \\ \hline 338 \end{array}$$

$$AI^2 = 49 + 189x^2, BI^2 = 49 + 49x^2$$

$$(x^2 + 1)(189x^2 - 49) = 338 \cdot 2 = 676 \quad 7^2 + 17^2 = 2 \cdot 13^2 \quad 289 - 49 = 238$$

$$289x^4 + 209x^2 + 49 - 338 = 0$$

$$\begin{array}{r} 338 \\ - 49 \\ \hline 289 \end{array}$$

$$289x^4 + 209x^2 - 289 \quad 338x^2 - 209 = 0$$

$$x^4 + \frac{338}{289}x^2 - 120 = 0$$

$$\begin{array}{r} 676 \\ - 49 \\ \hline 627 \\ - 209 \\ \hline 418 \end{array}$$

$$D = 338^2$$

$$289x^4 + 338x^2 - 676$$

$$\begin{array}{r} 23 \\ 169 \\ \times 4 \\ \hline 676 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 11 \\ 289 \\ \times 49 \\ \hline 338 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{1}{27} - \frac{2}{3} \times 2 = \frac{54 - 108}{27} = \frac{-54}{27} = -2$$

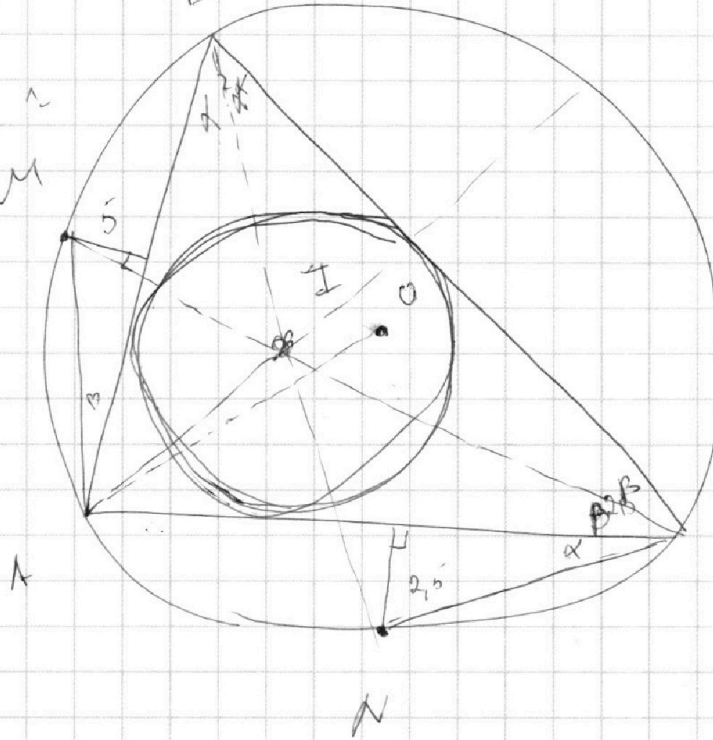
$$\frac{1}{27} - \frac{2}{3} - 2 = \frac{1 - 18 - 54}{27} = \frac{-71}{27}$$

$$\alpha = \frac{-71}{27}$$

$$\sin \alpha = 2x$$

$$R = \frac{a}{2 \sin \alpha}$$

$$\frac{1}{27} - \frac{1}{3} = \frac{1 - 9}{27} = \frac{-8}{27}$$



$$\frac{3 - \sqrt{3}}{3} > \frac{1}{3}$$

$$9 - 3\sqrt{3} < 1$$

$$8 < 3\sqrt{3}$$

$$64 < 27$$

$$\frac{3 - \sqrt{3}}{3} > \frac{1}{3}$$

$$3 - 3\sqrt{3} > 1$$

$$AOE \quad NC = \frac{25}{\sin \alpha}, \quad AM = \frac{5}{\sin \beta}$$

$$AO = R = \frac{NC}{2 \sin \alpha} = \frac{25}{2 \sin^2 \alpha} = \frac{25}{\sin^2 \beta}$$

$$\sin^2 \beta = \frac{25}{2 \sin^2 \alpha}$$

$$\sin \beta = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{2} \sin \alpha}$$

$$\frac{25}{4}$$

$$\times 92$$

$$276$$

$$\times 63^2$$

$$\frac{63}{189}$$

$$\frac{1}{27}$$

$$378$$

$$3969$$

$$1899$$

$$2070$$

$$1899 + 276 \sqrt{26} < 3969$$

$$\sqrt{276 \cdot 6}$$

$$276 \sqrt{26} < 2070$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{array}{r}
 338 \\
 \times 338 \\
 \hline
 2704 \\
 + 1014 \\
 \hline
 114244
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 627 \cdot 4 &= 2400 + 25 \cdot 4 + 2 \cdot 4 = \\
 &= 2508
 \end{aligned}$$

$$\sqrt{52441} = 229$$

$$\begin{array}{r}
 211 \\
 \times 211 \\
 \hline
 211 \\
 + 422 \\
 \hline
 44221
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 2508 \\
 \times 289 \\
 \hline
 20064 \\
 + 22572 \\
 \hline
 724812
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 724812 \\
 + 114244 \\
 \hline
 839056
 \end{array}$$

$$211^2 = 40000 + 2 \cdot 400 \cdot 11 + 121 = 468121$$

$$\begin{array}{r}
 839056 \quad 16 \\
 - 80 \\
 \hline
 39 \\
 - 32 \\
 \hline
 70 \\
 - 64 \\
 \hline
 65 \\
 - 64 \\
 \hline
 16 \\
 \frac{16}{0}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 233 \\
 \times 233 \\
 \hline
 2151 \\
 + 466 \\
 \hline
 54169
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 52441 \quad 19 \\
 - 38 \\
 \hline
 144 \\
 - 133 \\
 \hline
 114 \\
 - 114 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 2151 \\
 + 7717 \\
 + 478 \\
 \hline
 57121
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 52441 \\
 - 25 \\
 \hline
 52416
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 52441 \quad 211 \\
 - 422 \\
 \hline
 1024 \\
 - 844 \\
 \hline
 1801
 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

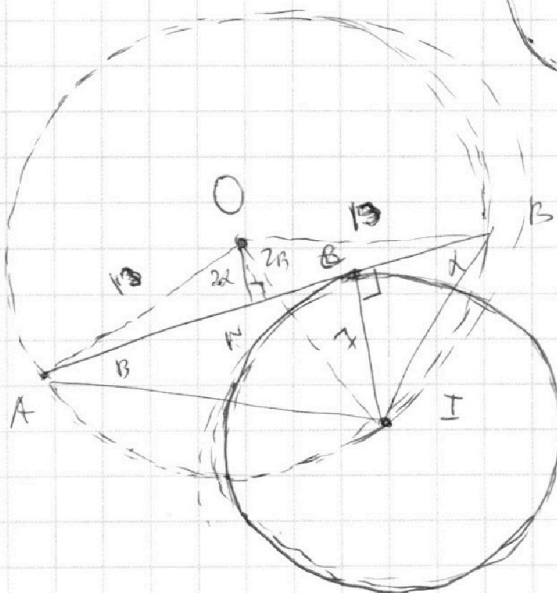
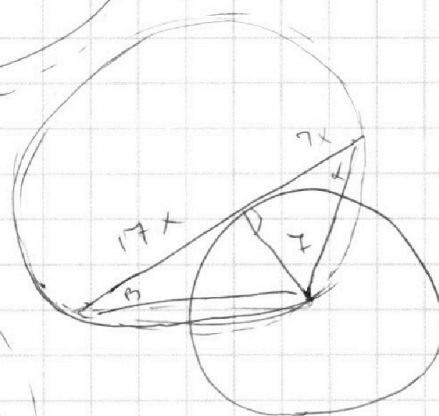
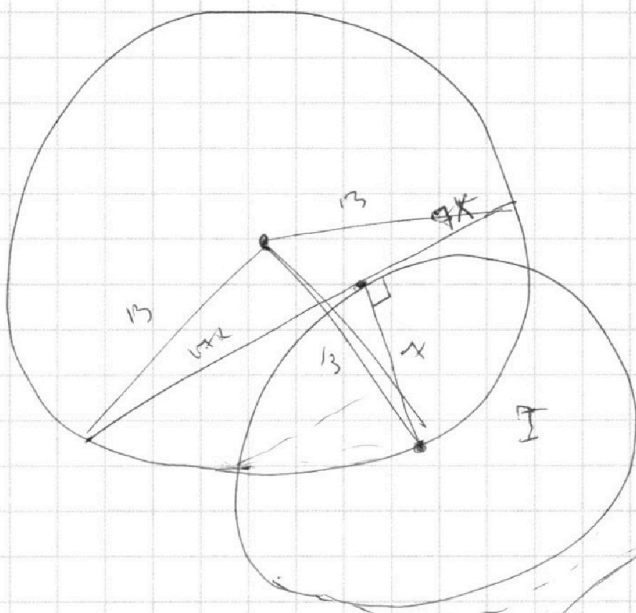
1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$2R \cdot \sin \alpha = 100$



$$2R = \frac{7 \cdot \sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{7}{\sin \beta \cdot \sin \alpha}$$

$$\sin \alpha = \frac{7}{4\sqrt{1+x^2}}$$

$$\cos \alpha = \frac{7}{\sqrt{49+17x^2}}$$

$$= \frac{7}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{7}{\sqrt{49+17x^2}} = \sqrt{1+x^2} \cdot \sqrt{185x^2+49} = 2R$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



388

$$\begin{array}{r} 839056 \\ - 8 \\ \hline 39 \\ - 38 \\ \hline 30 \\ - 28 \\ \hline 25 \\ - 24 \\ \hline 16 \\ - 16 \\ \hline 0 \end{array} \quad \Bigg| \quad \begin{array}{r} 41 \\ 29764 \end{array}$$

$$5 \quad \begin{array}{r} 4413 \\ - 29 \\ \hline 51 \end{array} \quad \begin{array}{r} 85+51 \\ = 136 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 52441 \\ - 51 \\ \hline 52441 \end{array} \Bigg| \quad \begin{array}{r} 13 \\ 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 28764 \\ - 28 \\ \hline 17 \\ - 16 \\ \hline 16 \\ - 16 \\ \hline 0 \end{array} \quad \Bigg| \quad \begin{array}{r} 4 \\ - \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 209764 \\ - 20 \\ \hline 9 \\ - 8 \\ \hline 14 \\ - 16 \\ \hline 16 \\ - 16 \\ \hline 04 \\ - 4 \\ \hline 0 \end{array} \quad \Bigg| \quad \begin{array}{r} 4-5 \\ 52441 \\ 144 \\ 196 \\ 81 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 28 \\ \times 229 \\ \hline 2061 \\ 458 \\ \hline 52441 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 229 \\ \times 229 \\ \hline 2061 \\ 458 \\ \hline 52441 \end{array}$$

$$2 \cdot 229 = 458$$
$$\begin{array}{r} 458 \\ - 169 \\ \hline 289 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$231 \text{ ~~22~~}$$

$$\begin{array}{r}
 \times 291 \\
 231 \\
 \hline
 231 \\
 + 693 \\
 \hline
 462 \\
 + 462 \\
 \hline
 53361
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 52441 \overline{)11} \\
 - 44 \\
 \hline
 84 \\
 - 84 \\
 \hline
 77 \\
 - 77 \\
 \hline
 06 \\
 - 06 \\
 \hline
 81
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \times 229 \\
 229 \\
 \hline
 - 2461 \\
 458 \\
 \hline
 458 \\
 52841
 \end{array}$$

$$6 \cdot 54 + 18\sqrt{78} < 69$$

$$144 + 16 \cdot 15$$

$$\begin{array}{r}
 \times 69 \\
 16 \\
 \hline
 + 414 \\
 69 \\
 \hline
 1104
 \end{array}$$

$\sqrt{45} \approx 6,7$
 $6 \cdot$

$$\begin{array}{l}
 36 - 2\sqrt{78} = 2 \\
 6 + \sqrt{78} = 3 \\
 \frac{6 + \sqrt{78}}{6} = \frac{3}{3}
 \end{array}$$

$$1248 \overline{)4} = 312$$

$$78$$

$$78 \overline{)2} = 39 \cdot 2$$

$$4\sqrt{78}$$

$$\begin{array}{r}
 \times 23 \\
 23 \\
 \hline
 46 \\
 \hline
 525 \\
 \times 3 \\
 1587 \\
 + 781895 \\
 \hline
 312
 \end{array}$$

$$\frac{12 + 4\sqrt{78}}{69 \cdot 2} = \frac{6 + 2\sqrt{78}}{69} > \frac{1}{2}$$

$$12 + 4\sqrt{78} > 69$$

$$4\sqrt{78} > 57$$

$$16 \cdot 78 > 572$$

$$\frac{12 - 4\sqrt{78}}{69 \cdot 2} = \frac{6 - 2\sqrt{78}}{69}$$

$$\frac{6 + 2\sqrt{78}}{69} < \frac{3 - \sqrt{3}}{3}$$

$$11 + 6\sqrt{78} < 3 - \sqrt{3}$$

$$6 + 2\sqrt{78} < 69 + 23\sqrt{3}$$

$$23\sqrt{3} + 2\sqrt{78} < 63$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 + ax^2 - 4bavx + 64b^2 - 1 = 0$$

$$\text{или } a(x^2$$

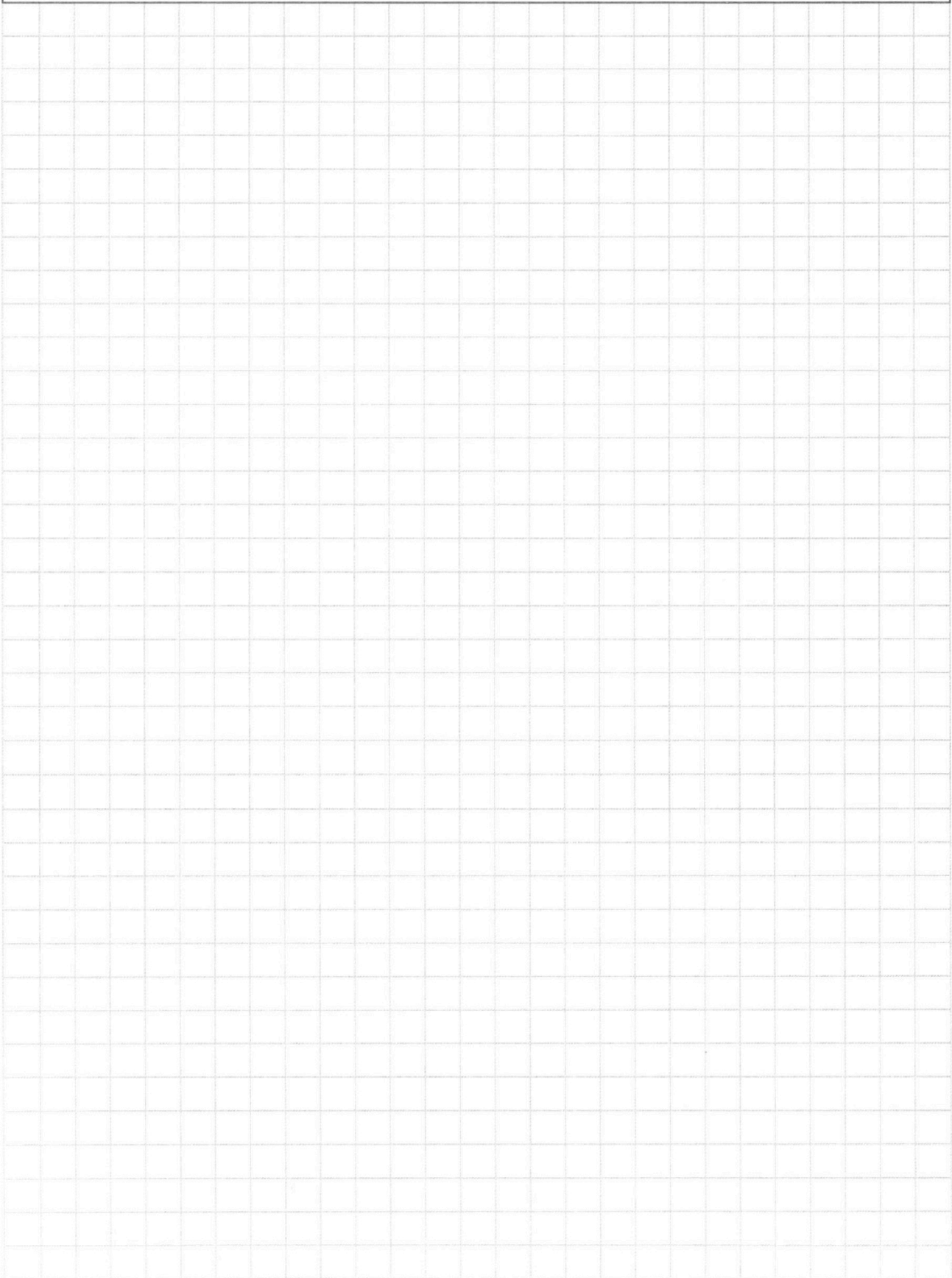


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

