



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.
4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-13; 26)$, $Q(3; 26)$ и $R(16; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1 $a, b, c \in \mathbb{N}$

1) $ab: 2^{75} \cdot 7^{77}$

2) $bc: 2^{77} \cdot 7^{79}$

3) $ac: 2^{23} \cdot 7^{39}$

Перепишем найденные при выражении ϵ :

$a^2 b^2 c^2: 2^{55} \cdot 7^{68}$

Заметим, что числа abc делится на 2^{28} . Пусть $abc \in 2^{28}$, тогда $abc \in 2^{k+28}$

где $k \leq 27$. Тогда $(abc)^2: 2^{2k} \cdot 2^{2 \cdot 28}$. Тогда

$2k \geq 55 \Rightarrow k \geq 28$. ~~Но это невозможно, так как~~

$abc \in 2^{28} \notin ac: 7^{39} \Rightarrow abc: 7^{39}$ Вы-

чим, что $(abc: 2^{28} : 7^{39}) \Rightarrow abc: 2^{28} \cdot 7^{39}$

Тогда $abc \geq 2^{28} \cdot 7^{39}$. Проверим условие, когда

$abc = 2^{28} \cdot 7^{39}$. Пусть $a = 7^{77} \cdot 2^{70}$; $b = 2^5$;

$c = 7^{28} \cdot 2^{13}$

Тогда все условия выполнены и

$abc = 2^{28} \cdot 7^{39}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№2 Из условия $(a; b) = 7$. Пусть $m = d$.

Тогда $a+b \equiv 8d$; $a^2 - 7ab + b^2 \equiv d$. Заметим,

что тогда $(a; d) = 1$, значит $a \equiv k$; $d \equiv k \cdot k \pmod{7}$

$(a+b \equiv 8d; x \in \mathbb{Z}) \Rightarrow dx - a \equiv b \pmod{k}$. Так как

$(a; b) \geq k$ противоречие, значит, $(a; d) = 7$

$(b; d) = 7$ аналогично.

$(a+b) \equiv d \Rightarrow (a+b)(a-b) = a^2 - 7ab + b^2 \equiv d$

Выведем из $a^2 - 7ab + b^2$ наименьшее выра-

-ение, выучив $b^2 - (-7b^2) = 8b^2 \equiv d$. Тогда

$(b; d) = 7 \Rightarrow 8 \equiv d \pmod{7} \Rightarrow d \equiv 1 \pmod{7}$. Приведем

пример, когда $d = 9$. Пусть $a = 4$; $b = 5$. Тогда

$(a; b) = 1$; $a+b = 9 \equiv 9$; $a^2 - 7ab + b^2 =$

$$\iff = 16 - 140 + 25 = -99 \equiv 9$$

Ответ: $d = 9$



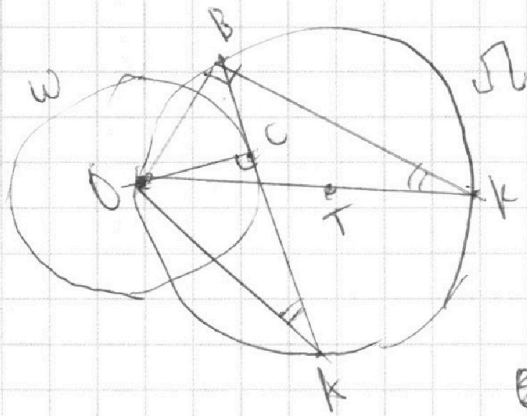
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



O - центр ω

$OC \perp BK$

$\Rightarrow T$ - центр Ω
 $OT \perp \Omega = k$

$\angle OBK = 90^\circ$

$$\frac{AC}{CB} = \frac{7}{7} \quad AC = 7 + x \quad CB = 7x$$

$\triangle OBK \sim \triangle OCA$ ~~по 2 углам~~ по 2 углам

$$\frac{OC}{OB} = \frac{OA}{OK}$$

$$OA \cdot OB = OC \cdot OK = 7 \cdot 7$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4 Обозначим $2-3x=t$; $3x^2-6x+2=k$

Тогда $3x^2+3x+1=k-t$. Перпишем уравнение:

$$\sqrt{k} - \sqrt{k-t} = t \quad k \geq 0; k-t \geq 0$$

$$\sqrt{k} = t + \sqrt{k-t} \quad \text{возведем в квадрат обе части}$$

$$k = t^2 + k - t + 2t\sqrt{k-t}$$

$$t - t^2 = 2t\sqrt{k-t} \quad (1)$$

Рассмотрим случай $t=0$, тогда $2-3x=0$

$$x = \frac{2}{3}, \text{ тогда } \sqrt{3x^2-6x+2} - \sqrt{3x^2+3x+1} =$$

$$= \sqrt{\frac{4}{3} - \frac{4}{3} + 2} - \sqrt{\frac{4}{3} + \frac{4}{3} + 1} =$$

$$= \sqrt{\frac{4}{3} + 1} - \sqrt{\frac{4}{3} + \frac{4}{3} + 1} = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{3} \text{ кор-}$$

нем.

Пусть $t \neq 0$. Разделим (1) на t

$$1-t = 2\sqrt{k-t}$$

$$t^2 + 1 - 2t = 4(k-t)$$

$$t^2 + 1 + 2t = 4k$$

$$4k = (t+1)^2 \quad \text{Квадратируем, что такое } k \text{ и } t$$

$$4(3x^2-6x+2) = (2-3x)^2$$

$$12x^2 - 24x + 8 = 4 + 8x^2 - 36x$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$69x^2 - 72x - 4 = 0$$

$$D = 744 + 4 \cdot 4 \cdot 69 = 76(9 + 69) = 76 \cdot 78$$

$$x_1 = \frac{72 - 4\sqrt{78}}{2 \cdot 69} = \frac{72 - 6 - 2\sqrt{78}}{69} < \frac{72 - 20}{69}$$

$$3x_1^2 + 3x_1 + 1 = 3 \frac{(6 - 2\sqrt{78})^2}{69^2} + 3 \frac{6 - 2\sqrt{78}}{69} + 1 =$$

$$= 3 \frac{6 - 2\sqrt{78}}{69} \left(\frac{6 - 2\sqrt{78}}{69} + 1 \right) + 1 > 0$$

$$3x_1^2 + 3x_1 + 1 > 0, \text{ следовательно } x_1 < 0$$

$$x_2 = \frac{72 + 4\sqrt{78}}{2 \cdot 69} = \frac{6 + 2\sqrt{78}}{69} > \frac{22}{69}$$

$$\text{Проверка: } 3x_2^2 - 6x_2 + 2 > 0; \quad 3x_2^2 + 3x_2 + 1 > 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№6 Решением ко второй неравенства. ~~Первое~~ $x^2 + y^2 =$

$= 25$ задает окружность с центром $(0; 0)$ и ради-

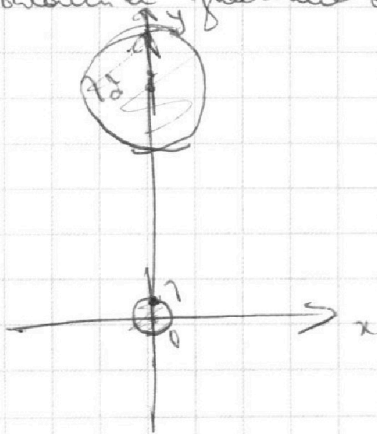
усом 5. $x^2 + (y-7)^2 = 16$ задает окружность

с радиусом 4 с центром $(0; 7)$. Тогда реше-

нием второго неравенства будут внутренняя часть

и граница этой окружности, но в аналогичной

области значение обеих сторон будет > 0 .



Первое уравнение переписываем:

$$y = -ax + 8b \text{ - это прямая.}$$

Если эта прямая пересекает
окружность заданную в 2

точках, то решение системы

заключается в том. Если прямая не имеет точек пересече-

ния с окружностью \Rightarrow она должна касаться обеих

окружностей. Каждое уравнение описывает внутр. ко-

сацию, а также описывает внешнюю касательную.

Общая касательная:

$$y = k_1 x + c_1$$

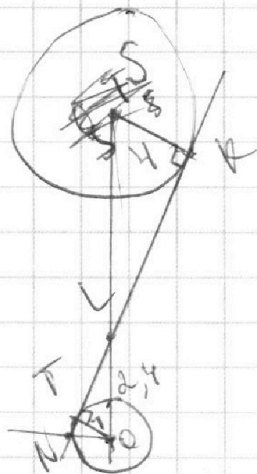
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\triangle SKL \sim \triangle OTL, \text{ что}$$

$$SK \parallel OT \text{ т.к. } \angle SKL = \angle LTO = 90^\circ$$

$$\frac{SL}{LO} = \frac{SR}{OT} = \frac{4}{7}$$

$$SL = 4x \quad LO = x$$

$$SL + LO = 5x = 12 \quad x = 2,4$$

$$OL = 2,4 \Rightarrow C_1 = 2,4$$

$$TL = \sqrt{2,4^2 - 7^2} = \sqrt{7,4 - 3,4}$$

$$OT^2 = NT \cdot TL = 7$$

$$NT \cdot \sqrt{9,4 - 3,4} = 7 \quad NT = \frac{7}{\sqrt{7,4 - 3,4}}$$

$$ON = \sqrt{7 + \left(\frac{7}{\sqrt{7,4 - 3,4}}\right)^2} = \sqrt{\frac{5,76}{4,76}} = \frac{2,4}{\sqrt{4,76}}$$

$$0 = y = k_1 \cdot \frac{2,4}{\sqrt{4,76}} + 7$$

$$k_1 \cdot \frac{2,4}{\sqrt{4,76}} = -7$$

$$k_1 = -\frac{7 \cdot \sqrt{4,76}}{2,4}$$

Получили, что точка - k_1 точка задана, что

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

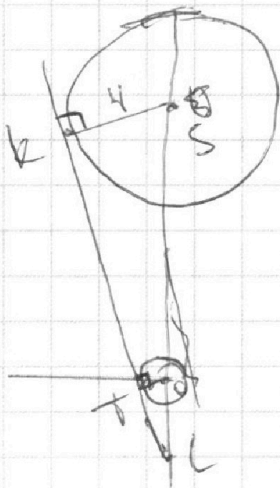
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Выводимые и вводимые касательные минимизируются

или $\tau = 0$. Введем касательную $z = k_2 x + c_2$



$$OT \perp KS$$

$$\angle KST + \angle KTO = 180^\circ$$

$$= 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$$

\triangle

$$\triangle LTO \sim \triangle LKS$$

$$\frac{LO}{LS} = \frac{1}{4} = \frac{TO}{KS}$$

$$LS = 4x \quad LO = x$$

$$SO = 3x = 12 \quad x = 4$$

$$LS = 16; \quad LO = 4 \Rightarrow c_2 = -4$$

k_2 можно считать произвольным.

Пусть для всех a значения, но $|a| = |k_1|$ или

$|a| = |k_2|$ мы можем в выражении в знак, тогда

~~a~~ касательная прямая была выведена или

введ. касательной. При всех значениях a при

любом b прямая $-ax + 8b$ будет касательной для двух окружностей \Rightarrow решение системы не будет равно 2

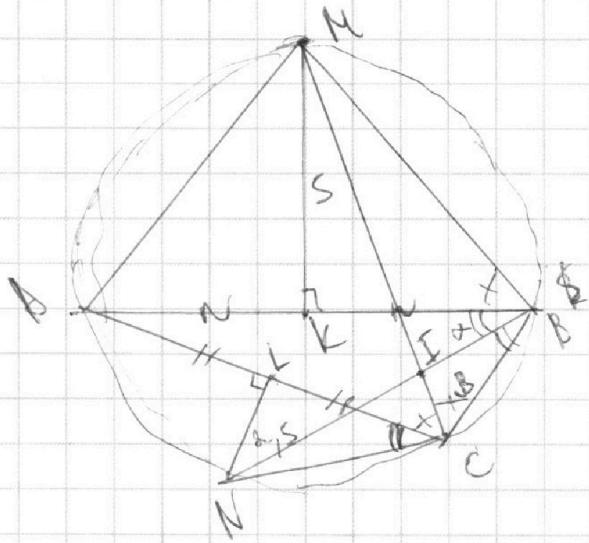
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$MK \perp AB$$

$$NL \perp AC$$

$$(\angle ABM = \angle ACM; \angle ACM = \angle ABN; \angle AMC = \angle ABC)$$

из вписанности $AMBCN$

Из условия, M - середина $AB \Rightarrow AM = MB$; N - середина $AC \Rightarrow AN = NC$; $AL = LC$.
 (BN - биссектриса $\angle ABC$)
 (CN - биссектриса $\angle ACB$)

По м. синусов $\frac{BM}{\sin B} = \frac{CN}{\sin C}$ (1)

Из $\triangle LCN$ $\sin \alpha = \frac{NL}{CN} = \frac{2,5}{CN}$; из $\triangle MKB$

$$\sin B = \frac{MK}{MB} = \frac{5}{MB} \text{ - подставим в (1)}$$

$$\frac{MB^2}{5} = \frac{CN^2}{2,5}$$

$$MB^2 = CN^2 \cdot 2 \quad MB = \sqrt{2} \cdot CN$$

$$\frac{MB}{CN} = \sqrt{2} = \frac{AM}{AN} \quad AM = \sqrt{2} \cdot AN$$

По м. синусов $\triangle ACM$: $\frac{AC}{AM} = \frac{\sin 2\alpha}{\sin B} = \frac{2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{\sin B}$ (2)



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Обозначим $\angle I = \angle CM \cap BN$ тогда в заданном треугольнике найдём AI

из т. синусов $\angle I = \angle AIC$

$$\frac{AI}{AC} = \frac{\sin \beta}{\sin \angle AIC} = \frac{AI}{\sin \beta} = \frac{AC}{\sin \angle AIC} = \frac{AC}{\sin(90^\circ + \alpha)} = \frac{AC}{\cos \alpha}$$

т.е. $\frac{AC}{\cos \alpha} = \frac{2 \cdot \sin \alpha \cdot AM}{\sin \beta}$. Попробуем

то $AI = \frac{AC}{\cos \alpha} \cdot \sin \beta$

$AI = \frac{2 \cdot \sin \alpha \cdot AM}{\sin \beta}$. ~~sin beta~~

т.е. $\sin \alpha = \frac{2,5}{CN} = \frac{2,5}{AN} = \frac{2,5 \cdot \sqrt{2}}{AM} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin \alpha \cdot AM = 2,5 \sqrt{2}$, тогда

~~AI =~~ $AI = 2 \cdot \sin \alpha \cdot AM = 2 \cdot 2,5 \sqrt{2} =$

$= 5\sqrt{2}$

$AI = 5\sqrt{2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1 $a, b, c \geq 1$

1) $ab \geq 2^{75} \cdot 7^{11} \Rightarrow ab \geq 2^{75} \cdot 7^{11}$

2) $bc \geq 2^{77} \cdot 7^{18} \Rightarrow bc \geq 2^{77} \cdot 7^{18}$

3) $ac \geq 2^{23} \cdot 7^{39} \Rightarrow ac \geq 2^{23} \cdot 7^{39}$

Проверим все три найденные неравенства:

$a^2 b^2 c^2 \geq 2^{55} \cdot 7^{68}$. Заметим, что пара abc

делится на ~~2^{27}~~ 2^{28} . Пусть $abc = \cancel{2^{27}} \cdot 2^{28}$

Пара $abc \geq 2^k$, где $k \leq 27$. Пара ~~$a^2 b^2 c^2$~~

~~$(abc)^2 \geq 2^{2k} < 2^{2k+1}$~~ . Пара ~~$abc \geq 2^{55}$~~ , что

~~$55 \geq 2 \cdot 27 + 1$~~



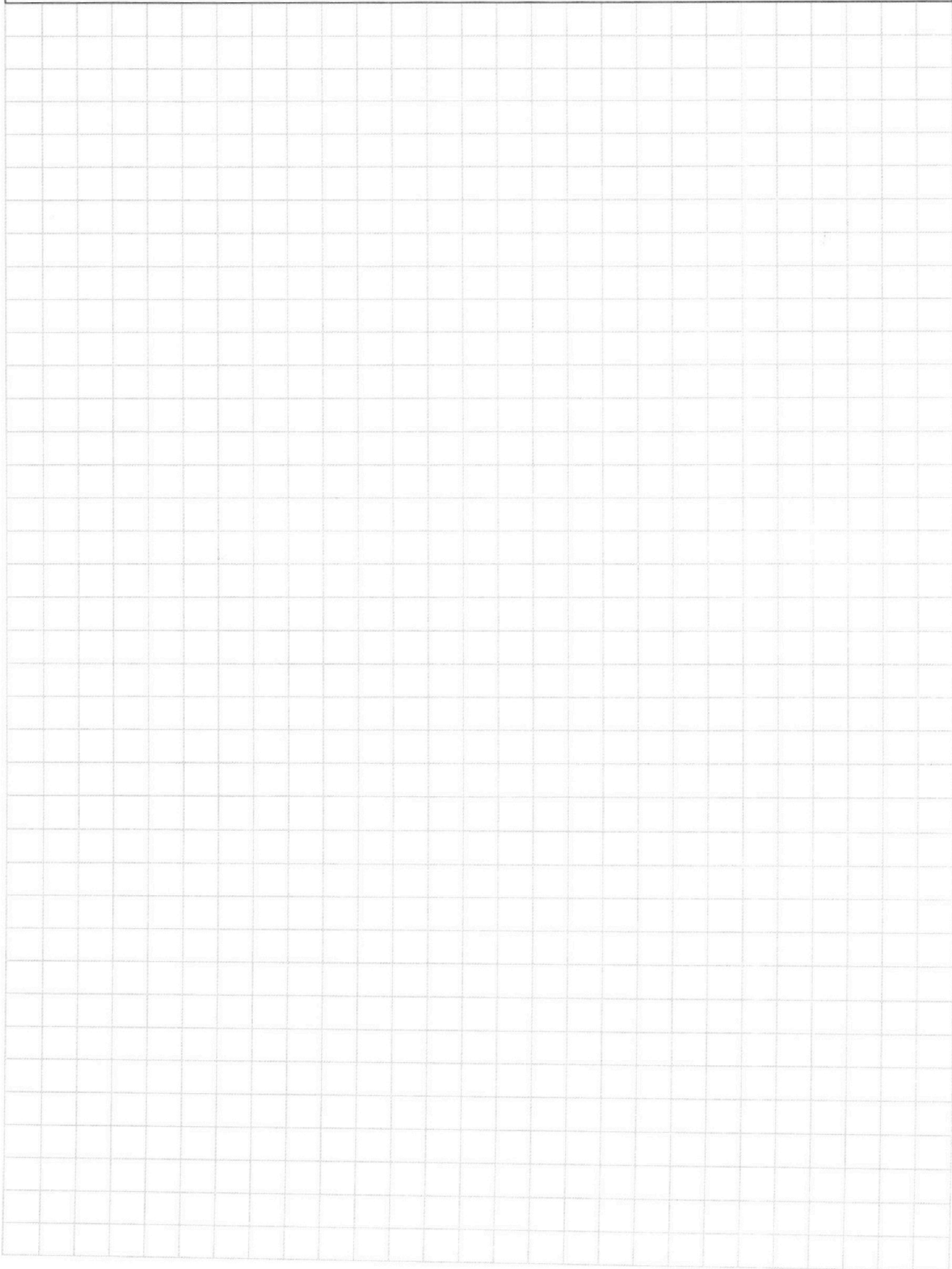
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





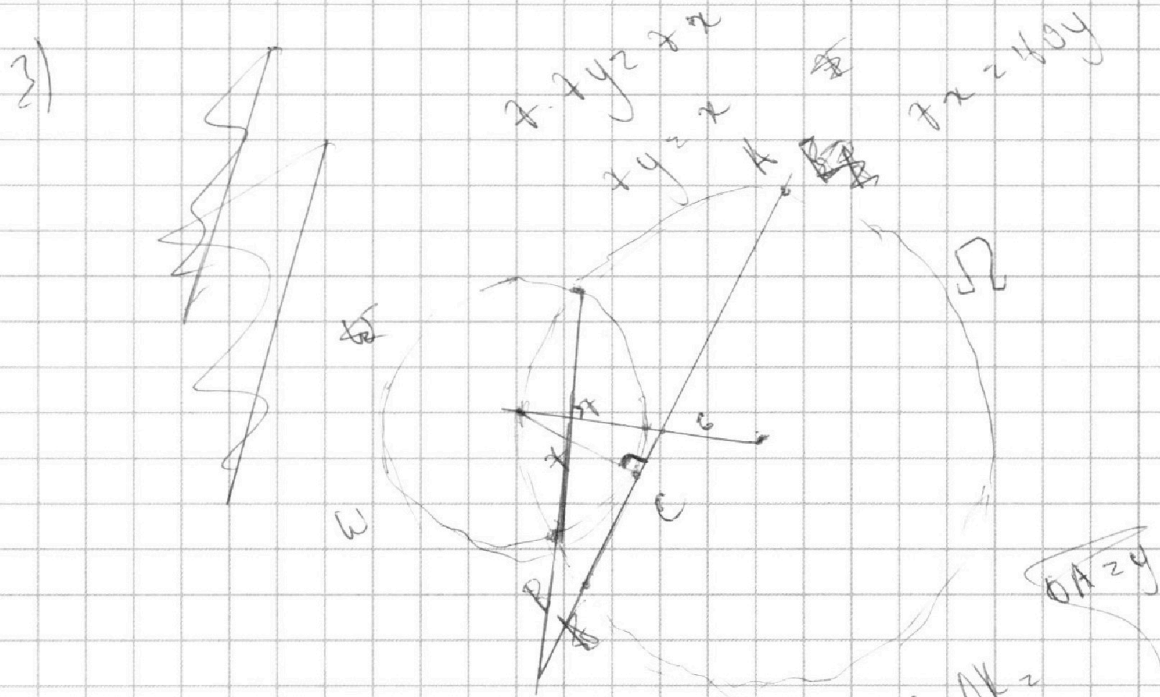
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{AC}{CB} = \frac{AC}{CB} = \frac{7r}{r}$$

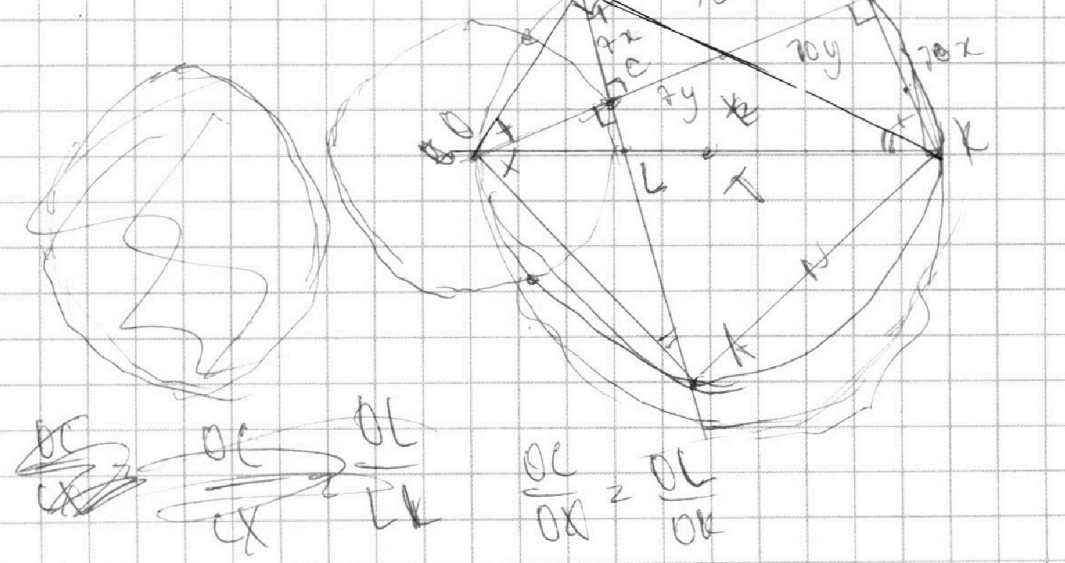
$$AC = 7r$$

$$CB = r$$

$$OB \cdot OA = OC \cdot OK = 7 \cdot 2r$$

$$\frac{OC}{OK} = \frac{OB}{OA}$$

$$OB = \frac{7r}{2}$$



$$\frac{OC}{OK} = \frac{OL}{LK}$$

$$\frac{OC}{OK} = \frac{OL}{OK}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



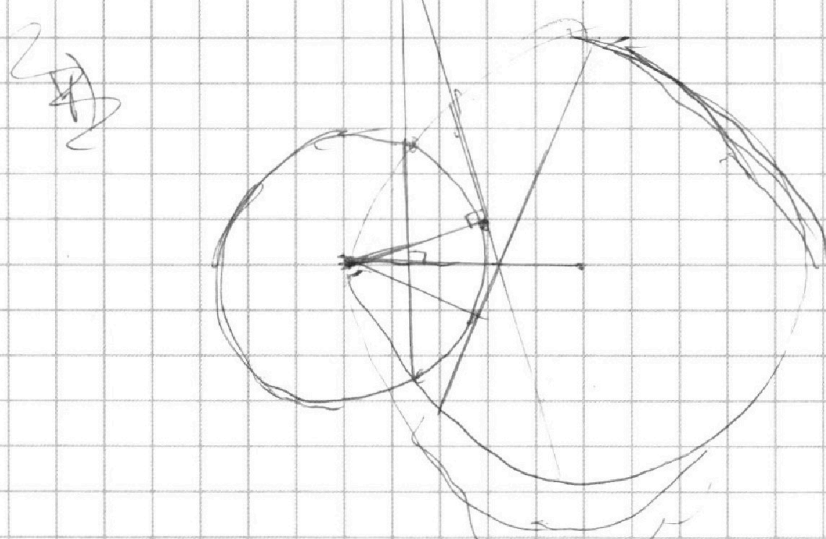
- 1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$y^2 - r^2 = (r+x)^2$$

$$\left(\frac{26}{y}\right)^2 - r^2 = (r+x)^2$$

$$y^2 - \left(\frac{26}{y}\right)^2 = 2rx + 24x$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

2) $d = m$

~~(a, b)~~ $(a, b) = 1$ $(b, d) = 1$

~~(a, b)~~ ~~(a, b, d)~~ ~~(a, b, d)~~ ~~(a, b, d)~~

~~$(a+b) \cdot d$~~ $a^2 - 7ab + b^2 ; d$

~~$(a+b)(a-b) ; d$~~

$(a+b)(a-b) ; d$

~~$a^2 + ab - 8ab - 8ba ; d$~~

$a^2 - 7ab - 8b^2 ; d$

$9b^2 ; d$

~~$(a+b) \cdot 9b ; d$~~

~~$9ab ; d$~~

$9 ; d$

$d \leq 9$

~~$a = 4, b = 5$~~ $47 - 740$

~~$26 \cdot 55 - 740$~~

Или $d = 9$

$a = 4, b = 5$ $a + b = 9 \neq 9$

~~$a + b = 9$~~ $a^2 - 7ab + b^2 = 47 - 740 = 5 - 99$

9

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$a \rightarrow ac \geq 2^{23} \cdot 7^{39}$$

$$\cancel{a = 2^{23} \cdot 7}$$

$$\cancel{abc} \geq 2^{23} \cdot 2^{75} \cdot 2^{77} \cdot 7^{77} \cdot 7^{78} \cdot 7^{39} =$$
$$= 2^{55} \cdot 7^{68}$$

$$\cancel{abc} \rightarrow$$

$$abc \geq \sqrt{2^{55} \cdot 7^{68}} \geq 2^{27} \cdot 7^{34}$$

$$\cancel{a = 7^{11}}$$
$$\cancel{b = 7^{17}}$$
$$\cancel{c = 7}$$

$$abc \geq 2^{27} \cdot 7^{34}$$

$$abc \geq 7^{39}$$

$$\cancel{abc} \geq 7^{39}$$

$$\cancel{abc} \geq 7^{39}$$

$$abc \geq 2^{27} \cdot 7^{39}$$

$$a \mid 7^{11} \quad c \mid 7^{18}$$

$$a = 7^{11} \cdot 2^{10}$$

$$b = 2^5$$

$$c = 7^{18} \cdot 2^{13}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$LT = \sqrt{74 \frac{7}{7,4 \cdot 3,4}}$$

$$\rightarrow \sqrt{\frac{7,4 \cdot 3,4 + 7}{7,4 \cdot 3,4}}$$

~~$$7,4 \cdot 3,4 =$$~~

$$\begin{array}{r} 74 \\ \times 34 \\ \hline 28 \\ 222 \\ \hline 2516 \end{array}$$

~~$$74$$~~

~~$$\begin{array}{r} 22 \\ \times 22 \\ \hline 44 \\ 44 \\ \hline 484 \end{array}$$~~

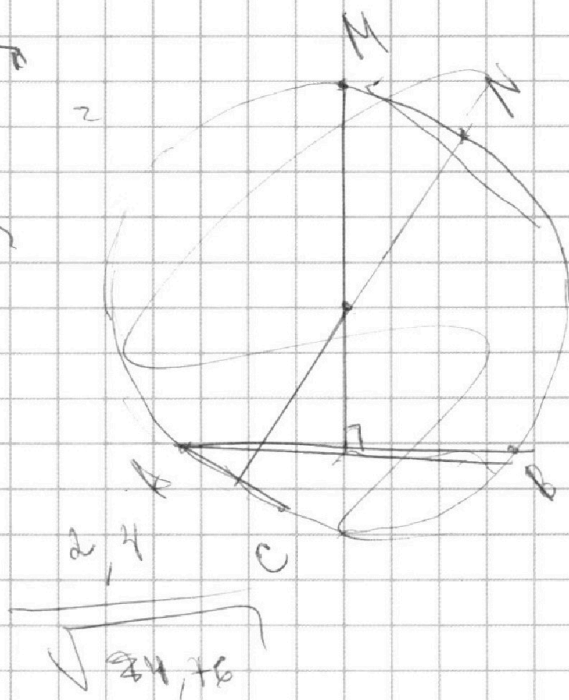
~~$$\begin{array}{r} 24 \\ \times 24 \\ \hline 96 \\ 48 \\ \hline 576 \end{array}$$~~

$$\begin{array}{r} 24 \\ \times 24 \\ \hline 96 \\ 48 \\ \hline 576 \end{array}$$

$$0 = k \cdot \frac{24}{\sqrt{4,76}} + 2,4$$

$$\left(\frac{k}{\sqrt{4,76}} + 7 \right) = 0$$

$$k = -\sqrt{4,76}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

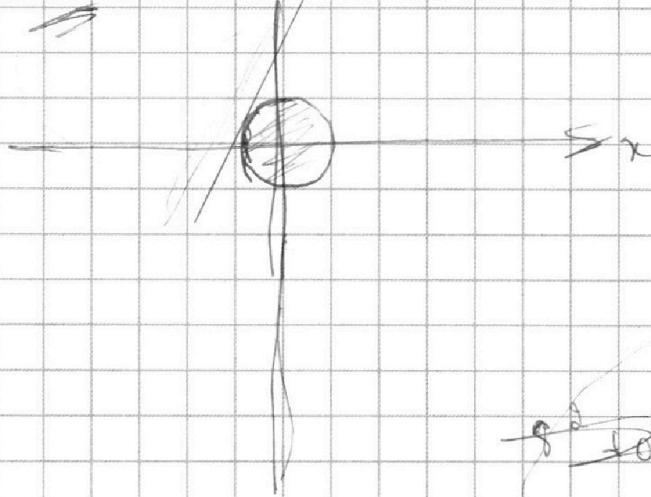
- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$x^2 + y^2 = 7$ $x^2 + (y - 2,2)^2 = 7,6$



$ax + y - 8,6 = 0$

~~$ax + y = 8,6$~~

~~$ax = 8,6 - y$~~

~~$y = ax + 8,6$~~

$y = kx + c$

$c = 2,4$

$\sqrt{2,4^2 - 7,6} =$

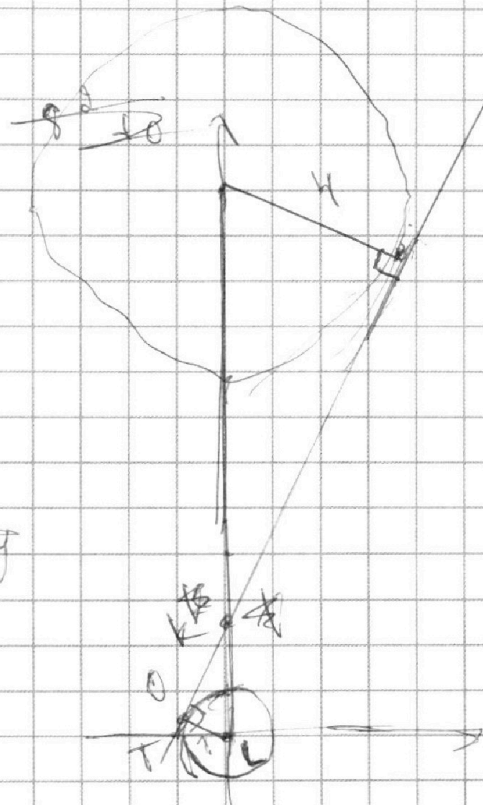
$= \sqrt{1,4 \cdot 3,4} = k_0$

~~$5,2 = 7,6$~~

$k = \frac{7,6}{5} = 2,4$

~~$k_0 \cdot 0,7 = 7$~~

$0,7 = \frac{7}{k_0 \cdot 3,4}$



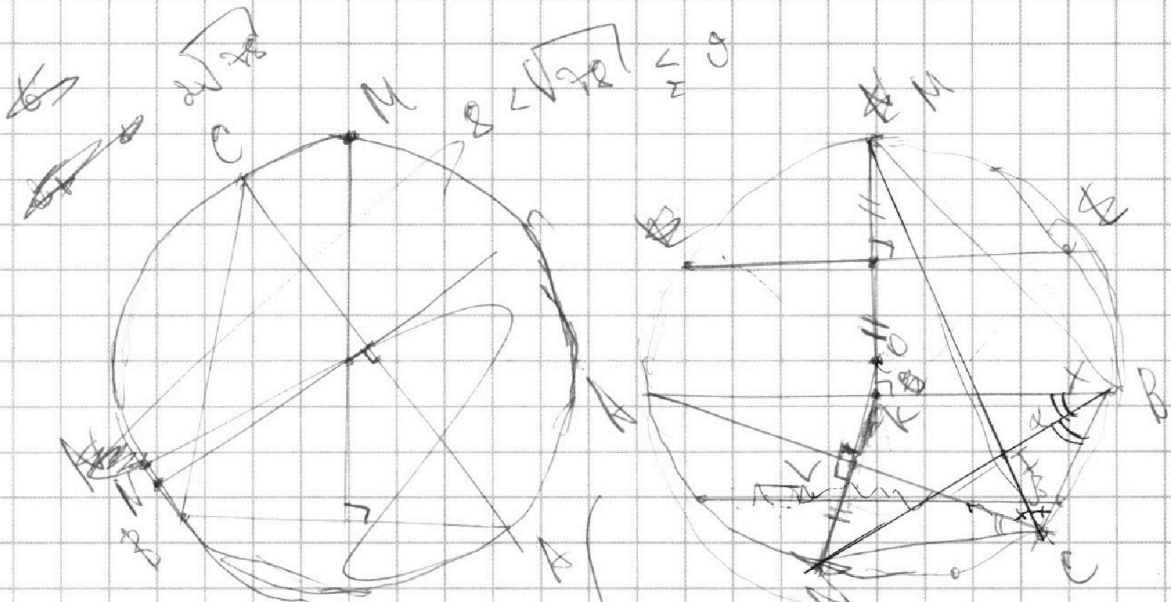
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



4)

$$3x = t$$

$$3x^2 - 6x = k$$

$$\sqrt{k+2} = \sqrt{k+t}$$

$$7 - 3x = t$$

$$3x^2 - 6x + 2 = k$$

$$k - t = 3x^2 - 6x + 2 + 3x - 7 = 3x^2 - 3x - 5$$

$$= 3x^2 + 2x + 7$$

$$\sqrt{k} - \sqrt{k-t} = t$$

$$k + k - t - 2\sqrt{k(k-t)} = t^2$$

$$k = t^2 + k - t + 2t\sqrt{k-t}$$

$\sin \alpha = \frac{CN}{BN}$
 $\sin \alpha = \frac{CN}{CN}$
 $\sin \alpha = \frac{S}{MB}$
 $CN = 2R$
 $\sin \alpha = \frac{2S}{CN}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$t - t^2 = 2t \sqrt{k - t} \quad t \in \mathbb{R}$$

~~$t = 0$~~

$$1 - t = 2 \sqrt{k - t}$$

$$1 + t^2 - 2t = 4(k - t)$$

~~$t = 0$~~

$$t^2 + 1 - 2t = 4k - 4t$$

$$t^2 + 1 + 2t = 4k$$

$$4k = (t + 1)^2$$

~~$4k = 0$~~

$$4(3x^2k - 6x + 2) = (2 - 9x)^2$$

$$12x^2 - 24x + 8 = 4 - 36x + 81x^2$$

$$69x^2 - 12x - 4 = 0$$

$$D = 144 + 4 \cdot 76 \cdot 69 = 76 \cdot (9 + 69) =$$

$$69x^2 - 12x - 4 = 0$$

$$D = 4 \cdot 144 + 4 \cdot 76 \cdot 69 = 76 \cdot (9 + 69) = 76 \cdot 78$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Handwritten mathematical derivations on a grid background:

$$\frac{BM}{\sin \beta} = \frac{CN}{\sin \alpha}$$

$$\sin \alpha = \frac{2,5}{AN}$$

$$\frac{BM^2}{5} = \frac{CN^2}{2,5}$$

$$BM^2 = 2CN^2$$

$$\frac{BM}{CN} = \sqrt{2}$$

$$BM = \sqrt{2} CN$$

$$\frac{AC}{\cos \alpha} = \frac{AM \cdot \sin \alpha}{\sin \beta}$$

$$\frac{AC}{AM} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{2,5 \sin \alpha}{\sin \beta}$$

Other scribbled-out equations include:

- $\sin \alpha = \frac{2,5}{BM}$
- $AN = \frac{AM}{\sqrt{2}}$
- $\sin \alpha \cdot AM = 2,5$
- $AN^2 = 2,5^2 = AK^2$
- $2CN^2 - 2,5^2 = AK^2$
- $2CN^2 - 2,5^2 = AL^2$
- $\frac{AT}{\sin \beta} = \frac{AC}{\sin(90^\circ + \alpha)} = \frac{AC}{\cos \alpha}$
- $2,5 = 2AL^2 - AK^2$
- $\frac{AC}{\cos \alpha} = \frac{AM \cdot \sin \alpha}{\sin \beta}$
- $\frac{AC}{AM} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{2,5 \sin \alpha}{\sin \beta}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$|AI| \rightarrow \frac{AC \cdot \sin B}{\cos \alpha} \approx \frac{AM \cdot 2 \sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\approx \frac{AM \cdot 2 \sin \alpha}{\sin B} \cdot \sin B \rightarrow AM \cdot 2 \sin \alpha \approx$$

$$\approx 2 \cdot \sin \alpha \sqrt{a^2} \approx 2 \sqrt{a^2}$$

