



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа  $a$ ,  $b$ ,  $c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^{14}7^{10}$ ,  $bc$  делится на  $2^{17}7^{17}$ ,  $ac$  делится на  $2^{20}7^{37}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .

2. [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}$ ,  $b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

3. [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , хорда  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC : CB = 7$ . Найдите длину  $AB$ , если известно, что радиусы  $\omega$  и  $\Omega$  равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0;0)$ ,  $P(-12;24)$ ,  $Q(3;24)$  и  $R(15;0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$ .

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник  $ABC$  вписан в окружность. Пусть  $M$  – середина той дуги  $AB$  описанной окружности, которая не содержит точку  $C$ ;  $N$  – середина той дуги  $AC$  описанной окружности, которая не содержит точку  $B$ . Найдите расстояние от вершины  $A$  до центра окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ , если расстояния от точек  $M$  и  $N$  до сторон  $AB$  и  $AC$  соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 1

Пусть  $a = 2^{k_1} \cdot 7^{t_1} \cdot a'$ ,  $b = 2^{k_2} \cdot 7^{t_2} \cdot b'$ ,  $c = 2^{k_3} \cdot 7^{t_3} \cdot c'$

Тогда  $abc = 2^{k_1+k_2+k_3} \cdot 7^{t_1+t_2+t_3} \cdot a' \cdot b' \cdot c' = 2^{14} \cdot 7^{10}$

$k_1+k_2 \geq 14$ ,  $t_1+t_2 \geq 10$

Аналогично

$k_2+k_3 \geq 17$ ,  $t_2+t_3 \geq 17$   
 $k_1+k_3 \geq 20$ ,  $t_1+t_3 \geq 37$

Сложив неравенства:

$$2(k_1+k_2+k_3) \geq 14+17+20 \quad | \quad 2(t_1+t_2+t_3) \geq 10+17+37$$

$$k_1+k_2+k_3 \geq 25,5 \quad | \quad t_1+t_2+t_3 \geq 32$$

$k_1+k_2+k_3 \geq 26$ ,  $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{N}_0$ ,  $t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{N}_0$

Это достигается при  $k_1=8, k_2=6, k_3=12$

Таким же образом как  $t_1+t_3 \geq 37$ , то  $t_1+t_2+t_3 \geq 37$

Достигается

при  $t_2=27, t_3=0, t_1=10$

Заметим, что  $abc \geq 2^{26} \cdot 7^{37}$

Равенство достигается при  $a = 2^{10} \cdot 7^6 \cdot a'$ ,  $b = 2^{12} \cdot 7^{27} \cdot b'$ ,  $c = 2^{4} \cdot 7^0 \cdot c'$

abc при этом равно  $2^{26} \cdot 7^{27}$

Ответ:  $abc = 2^{26} \cdot 7^{27}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МОТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

## Задача 2

Так как  $m$ -наибольшее такое, что

$a+b$ ;  $m$  и  $a^2 - 6ab + b^2$  :  $m$ , то

$$m = \text{НОД}(a+b, a^2 - 6ab + b^2) =$$

$$= \text{НОД}(a+b, (a+b)^2 - 8ab) = \text{НОД}(a+b, 8ab),$$

так как  $\frac{a}{b}$  - несократима, то  $\text{НОД}(a, b) = 1$

$\text{НОД}(a+b, a) = \text{НОД}(a+b, b) = 1$ . Значит

$\text{НОД}(a+b, 8ab) = 1$ , а значит  $\text{НОД}(a+b,$

$8ab) = \text{НОД}(a+b, 8) \leq 8$ .

Пример на 8:  $a = 1, b = 7$ , где  $\frac{a}{b} = \frac{1}{7}$  - несократима  $\frac{a+b}{a^2 - 6ab + b^2} = \frac{8}{1 - 6 \cdot 7 + 7 \cdot 7} = \frac{8}{8}$ .

8 : 8 и 8 : 8.

Ответ:  $m = 8$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

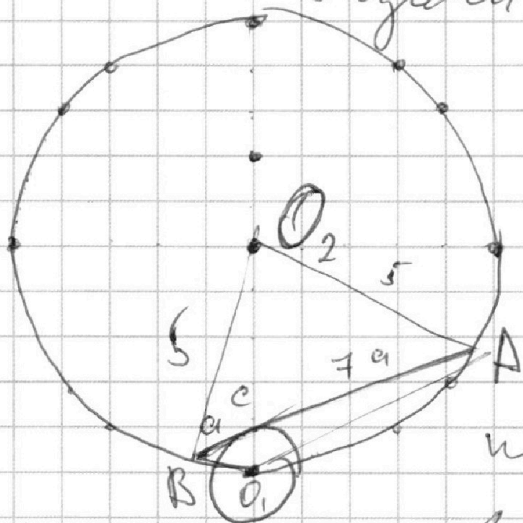
1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 3



Пусть  $BC = a$ , тогда  
 $AC = BC \cdot 7 = 7a$   
 $O_1C \perp AB$ , так как  
 $O_1C$  - радиус, а  $AB$  - касательная,  
 значит  $O_1C = 1$

Из т. Пифагора в  $\triangle BCO_1$ ,  $BO_1 = \sqrt{1+a^2}$ ,  
 аналогично  $AO_1 = \sqrt{1+49a^2}$

Из т. синусов в  $\triangle BO_1A$   $\frac{AB}{\sin \angle BO_1A} = 2R = 10$

$$8a = 10 \cdot \sin \angle BO_1A, \quad \sin \angle BO_1A = 0,8a$$

$$S_{\triangle ABO_1} = \frac{O_1C \cdot AB}{2} = \frac{O_1B \cdot O_1A \cdot \sin \angle BO_1A}{2}$$

$$1 \cdot 8a = \sqrt{1+a^2} \cdot \sqrt{1+49a^2} \cdot 0,8a$$

$$\sqrt{1+a^2} \cdot \sqrt{1+49a^2} = 10$$

$$(1+a^2)(1+49a^2) = 100$$

$$49a^4 + 50a^2 - 99 = 0$$

$$49 \cdot (a^2 - 1) \left( a^2 + \frac{99}{49} \right) = 0$$

$$a^2 = 1$$

$$a = \pm 1$$

или  $a^2 = -\frac{99}{49}$

нет решения, так как  $a^2 \geq 0$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

 МФТИ

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$q = -1$  - невозможно, т.к.  $q > 0$

$q = 1$

$BC = 1, AC = 7$

$AB = \emptyset$

Ответ:  $AB = \emptyset$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 4

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$$

Решим уравнение  $\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$ , м.к. корни не отрицательны

$$(2x^2 - 5x + 3) - (2x^2 + 2x + 1) = (2 - 7x)(\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1})$$
$$-7x + 2 = (2 - 7x)(\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1})$$

Если  $2 - 7x = 0$ , то

$$x = \frac{2}{7} = \text{корень}$$

$$\text{м.к. } 2\left(\frac{2}{7}\right)^2 - 5 \cdot \frac{2}{7} + 3 > 0 \quad \text{и} \quad 2\left(\frac{2}{7}\right)^2 + 2 \cdot \frac{2}{7} + 1 > 0$$

Итак

$$1 = \sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

Сопремим уравнение  $\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 1$ , м.к. первый корень не отрицательный

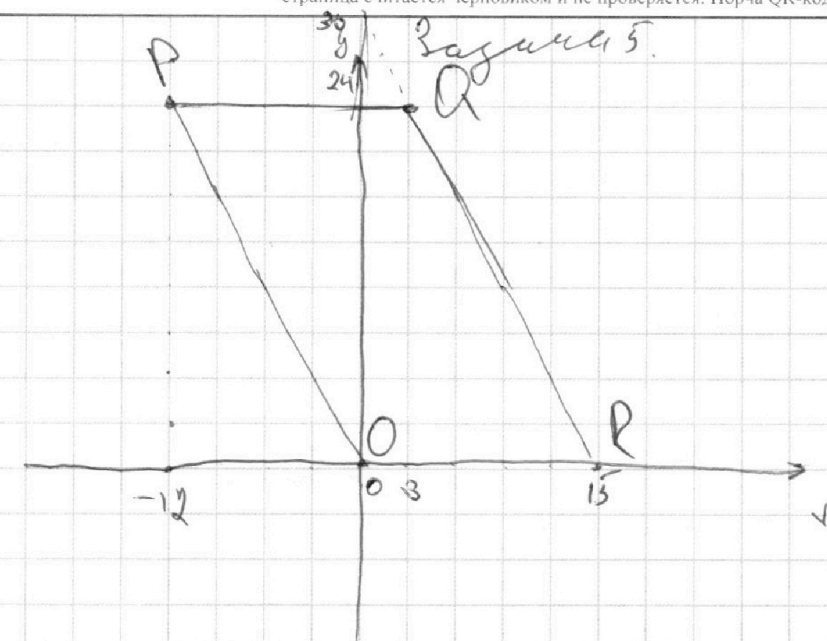
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$$

$$2x_2 + y_2 = 12 + 2x_1 + y_1$$

Найдем все такие  $X(x_0, y_0)$ , что

$2x_0 + y_0 = \text{const}$  - они лежат на ~~горизонтальной~~ параллельной  $PO$ .

Но есть, для любой точки  $A$  находим все такие  $B$ , лежащие на параллельной  $PO$  (т.к.  $12 + 2x_1 + y_1 = \text{const}$ )

Следовательно, находим все такие пары  $(A, B)$ , что они лежат на параллельной  $PO$ , и расстояние между которыми 12 (расстояние найдем)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

разность координат ~~там~~ этих точек)  
длина каждой из этих точек будет  
равно один на рисунке 12 (с ~~тем~~ -  
разностью направлений)

Заметим, что если прямая не проходит  
через точку  $(0, x)$ ,  $x \in \mathbb{Z}$ , то эта прямая  
не проходит и через одну из этих точек.  
(напр. если  $2 \cdot 0 + x = c$  не имеет решений, то  $c \notin \mathbb{Z}$ ,  
а значит  $c \neq 2x_0 + y_0 \in \mathbb{Z}$ )

Но есть такие прямые содержащие хотя  
бы одну точку в этой параллелограмме  
30 (напр. разность координат сторон  $3 \cdot 0$ )

Star Star, заметим, что расстояние между  $12$   
и  $24$  и обе имеют эти же координаты в параллелограмме  
 $24$  / длина каждой координаты на прямой  $Oy$   
от  $0$  до  $24$ )

Заметим, что координаты прямой равны  
координатам  $y$  пересечения с  $Oy$ .



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

На прямой с меньшей константой ровно  
13 точек точек в параллелограмме  
(  $2x_0 + y_0 = 2k$ , тк точки принадлежат параллелограмму,  
то  $y_0 > 0$  и  $y_0 \leq 24$ , отсюда  $2x_0 = 2k - y_0$  имеет  
ровно 13 решений )

С меньшей, симметрично, 12 точек.

В паре обе прямые одинаковой константой.  
Чемпи пар (с константой  $y$  первой  $y$  и  
 $0, 2, \dots, 24$ ) - 13, значит пар точек  
 $(13 \cdot 13) \cdot 13 = 13^3$

Нечетных пар (1, 3, ..., 23) - 12, значит  
пар точек  $12 \cdot (12 \cdot 12) = 12^3$

Суммарно всего пар точек  
 $13^3 + 12^3$

Ответ:  $13^3 + 12^3$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



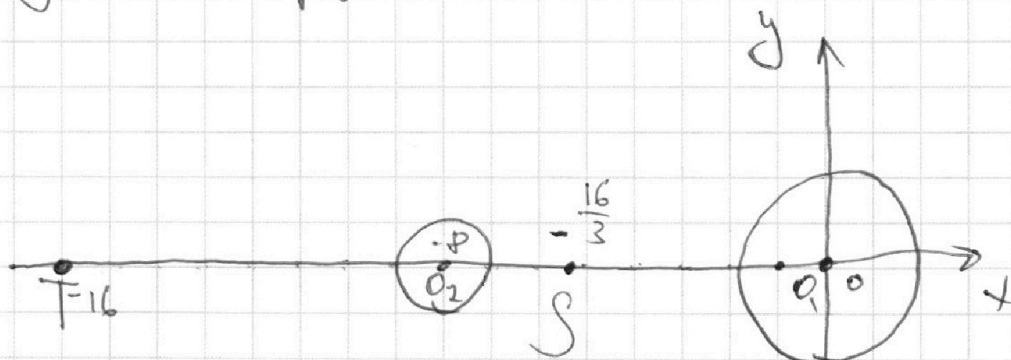
Задача 6

$$\begin{cases} x - y + 10 = 0 & (1) \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1) / (x^2 + y^2 - 4) \leq 0 & (2) \end{cases}$$

(1) - уравнение

(2)  $(x+8)^2 + y^2 - 1$  - уравнение окружности  
 $x^2 + y^2 - 4$  - уравнение окружности

границе пер-во отрицательна или  
точка  $A(x, y)$  находится ровно внутри  
одной окружности или на границе.



Так как окр. не пересекаются, то  
точка может находиться внутри или на  
границе одной из окружностей.

Уточнить решение

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Две окружности пересекаются ~~в~~ <sup>красн</sup> в единственной точке. Так как  
одна окружность ~~касается~~ <sup>касается</sup> ~~в~~ <sup>красн</sup> в  $O$ ,  $1$  см ~~и~~ <sup>и</sup> ~~касается~~  
касается ~~одной~~ <sup>одна</sup> ~~окружности~~ <sup>окружности</sup>. ~~Поэтому~~ <sup>Поэтому</sup> ~~всего~~ <sup>всего</sup> ~~таких~~ <sup>таких</sup>  
пар ~~4~~.

Две окружности ~~внешне~~ <sup>внешне</sup> ~~касались~~ <sup>касались</sup>.  
Они ~~пересекаются~~ <sup>пересекаются</sup> ~~в~~ <sup>в</sup> ~~центре~~ <sup>центре</sup> ~~исполненного~~ <sup>исполненного</sup>  
круга ~~радиуса~~ <sup>радиуса</sup>  $T(-16, 0)$ , ~~координатами~~ <sup>координатами</sup> ~~равны~~ <sup>равны</sup>  
 $\frac{R_2}{R_1} = 2$ , ~~тогда~~ <sup>тогда</sup>  $\frac{TO_1}{TO_2} = \frac{x}{x-16} \Rightarrow x = 16$ , ~~а~~  
координата  $-16$ .

Уравнение касательной  $y = kx + n$

$$0 = -16k + n, \quad n = 16k$$

$$\begin{cases} y = kx + n \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases} \text{ - имеет одно решение}$$

$$y = kx + 16k$$

$$x^2 + (kx + 16k)^2 = 4$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$(x^2 + k^2 x^2) + 32k^2 x + (256k^2 - 4) = 0$$

$$D = 0$$

$$D = 2^{10} \cdot k^4 - 4 \cdot (k^2 + 1) \cdot (2^8 k^2 - 4) = 0 \quad | : 2^4$$

$$2^6 \cdot k^4 - (k^2 + 1)(2^6 k^2 - 1) = 0$$

$$2^6 \cdot k^4 - 2^6 \cdot k^4 + k^2 + 2^6 k^2 + 1 = 0$$

$$k^2 \cdot (1 + 2^6) = -1$$

$$k^2 = \frac{-1}{63}$$

$$k = \pm \frac{1}{\sqrt{63}} = \pm \frac{1}{3\sqrt{7}}$$

Итак есть две касательных  $y = \pm \frac{x}{3\sqrt{7}} + \frac{16}{3\sqrt{7}}$

$$1) \frac{x}{3\sqrt{7}} - y + \frac{16}{3\sqrt{7}} = 0$$

$$a + -y + 10b = 0$$

$$a = \frac{k}{3\sqrt{7}}, b = \frac{p}{15\sqrt{7}}$$

$$2) -\frac{x}{3\sqrt{7}} - y + \frac{16}{3\sqrt{7}} = 0$$

$$a = -\frac{k}{3\sqrt{7}}, b = \frac{p}{15\sqrt{7}}$$

Расширим центр окружности  
решения, через него проведем взаимно  
перпендикулярные касательные. Радиусы  $\frac{R_2}{R_1} = 2, 4$   
центр лежит на  $O_1 O_2$ ,  $\frac{SO_2}{SO_1} = 2$ , значит  $SO_2 = \frac{2R}{3} = \frac{16}{3}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$S_0 = \frac{8}{3}, \quad S(-\frac{16}{3}, 0)$$

Ищем угр-касательную  $y = kx + n$ .

$$0 = \frac{-16k}{3} + n, \quad n = \frac{16k}{3}$$

$$\begin{cases} y = kx + n \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

Ищем одно решение

$$y = kx + \frac{16k}{3}$$

$$x^2 + (kx + \frac{16k}{3})^2 = 4$$

$$x^2(1+k^2) + \frac{32k}{3}x + (\frac{2 \cdot k^2}{9} - 4) = 0$$

$$D = 0$$

$$D = \frac{2^{10} \cdot k^4}{9} - 4 \cdot (1+k^2) \cdot (\frac{2 \cdot k^2}{9} - 4) = 0 \quad | \cdot 9^2$$

$$\frac{2^6 \cdot k^4}{9} - (1+k^2) \cdot (\frac{2 \cdot k^2}{9} - 4) = 0$$

$$\frac{2^6 \cdot k^4}{9} - \frac{2^6 \cdot k^4}{9} + k^2 - \frac{2^6 \cdot k^2}{9} + 4 = 0$$

$$k^2 \left( \frac{2^6}{9} - 1 \right) = 1$$

$$k^2 \left( \frac{55}{9} \right) = 1$$

$$k^2 = \frac{9}{55}$$

$$k = \pm \frac{3}{\sqrt{55}}$$

$$\text{угр-ная } y = \pm \frac{3x}{\sqrt{55}} + \frac{16}{\sqrt{55}}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$1) \frac{3x}{\sqrt{55}} - y + \frac{16}{\sqrt{55}} = 0$$

$$a + -y + 10b = 0$$

$$a = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{55}}, \quad b = \frac{16}{10\sqrt{55}}$$

$$2) -\frac{3x}{\sqrt{55}} - y + \frac{16}{\sqrt{55}} = 0$$

$$a = -\frac{3}{\sqrt{55}}, \quad b = \frac{16}{10\sqrt{55}}$$

Ответы:  $a_{1,2} = \pm \frac{3}{\sqrt{55}}, \text{ где } a_{1,2} \text{ и } b = \frac{16}{10\sqrt{55}}$   
 $a_{3,4} = \pm \frac{1}{3\sqrt{7}}, \text{ где } a_{3,4} \text{ и } b = \frac{8}{15\sqrt{7}}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

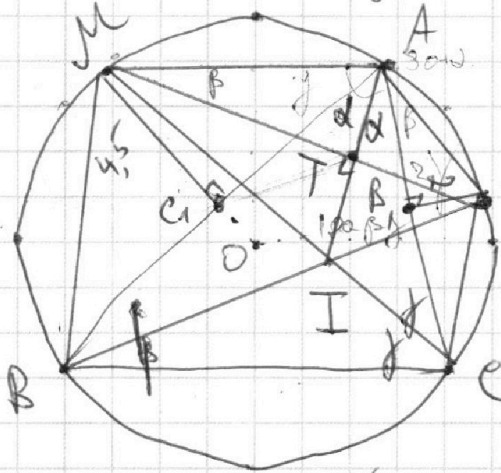
- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 7



Так как  $M$  и  $N$  —  
середины  $AB$  и  $AC$ , то  
 $MC$  и  $NB$  — медианы

$$T = MN \cap AI$$

То  $M$  и  $O$  — середины  $AN = NC = NI$  и  
 ~~$AM = MC = MI$~~

Пусть  $MC_1 \perp AB$  и  $NB_1 \perp AC$ , т.к.  
 $\triangle BMA$  и  $\triangle ANC$  — равнобедренные, то  
 $C_1$  и  $B_1$  — середины  $AB$  и  $AC$

Сторона  $MC_1 = \frac{AB}{2} \cdot \frac{AB}{2} = 4,5 \cdot (2R - 4,5)$ ,  
то есть  $AB^2 = 18 \cdot (2R - 4,5)$ ,  $R = \frac{AB^2}{36} + \frac{4,5}{2}$

Аналогично  $AC^2 = 2 \cdot (2R - 2)$ ,  $R = \frac{AC^2}{16} + 1$

$$\frac{AB^2}{36} + \frac{4,5}{2} = \frac{AC^2}{16} + 1 \quad | \cdot 4$$

$$\frac{AB^2}{9} + 9 = \frac{AC^2}{4} + 4 \quad | \cdot 36$$

$$4AB^2 + 9 \cdot 36 = 9AC^2 + 4 \cdot 36$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$3AC^2 = 4AB^2 + 190$$

$$AC^2 = \frac{4AB^2}{3} + 20$$

Пусть  $AC = 2x$ ,  $AB = 2y$

По т. Пифагора  $AN = \sqrt{4+y^2}$ ,  $AM = \sqrt{4,5^2+y^2}$

$$S_{\triangle ANC} = 2x = \frac{(4+y^2) \cdot \sin \angle ANC}{2}$$

$$\sin \angle ANC = \frac{4x}{4+y^2}$$

аналогично  
по т. синусов

$$\sin \angle BMA = \frac{3y}{4,5^2+y^2}, R = \frac{1}{4+y^2} = \frac{1}{4,5^2+y^2} \Rightarrow \frac{4+y^2}{4,5^2+y^2} = 1$$

Так как  $AN = NI$  и  $MA = MI$ , то  $MANI$ -  
гребенчатый, а значит  $AI \perp MN$

$$\angle AMN = \angle ABN, \frac{\sin \angle ABN}{AN} = 2R$$

$$\sin \angle ABN = \frac{\sqrt{4+y^2}}{4+y^2} = \frac{AN}{4+y^2}$$

В  $\triangle MAT$   $\angle ATM = 90^\circ$ , значит

$$AT = \sin \angle AMT \cdot AM = \frac{\sqrt{4,5^2+y^2}}{\sqrt{4+y^2}} = 1$$

А так как  $MANI$ -гребенчатый, то  $AT = IT$ ,

то есть  $AI = 2 \cdot AT = 2$ .

Ответ:  $AI = 2$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



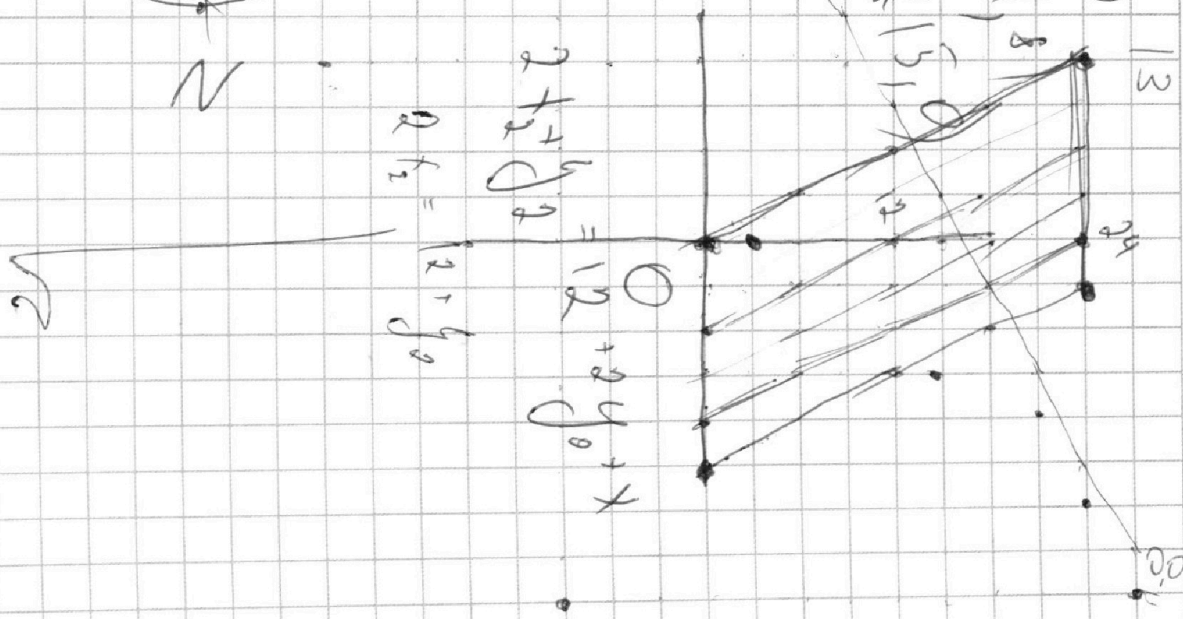
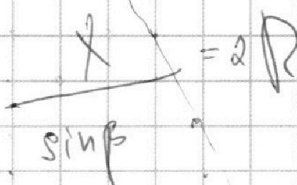
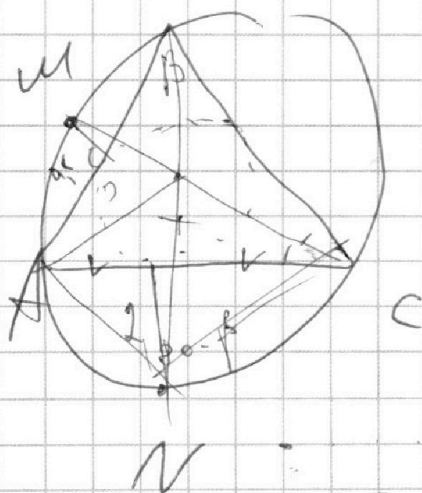
*Чернышев*

$$\sqrt{(x-1)(2x-3)} + \sqrt{2(x-\frac{1}{2})^2 + 1} = 2 - 7x$$

$$D = 4 - 2 \cdot 4 \cdot x$$

*Значит*  
 $g + \frac{g+1}{|g+1|}$   
 $g + \frac{g+1}{g+1} = 2$   
 $2g - 11 =$

$$(2x^2 + 2x - \frac{1}{2}) \cdot x = 5$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



*Черновик*

$$D = 25 - 24 = 1$$

$$x = \frac{5 \pm 1}{4}$$

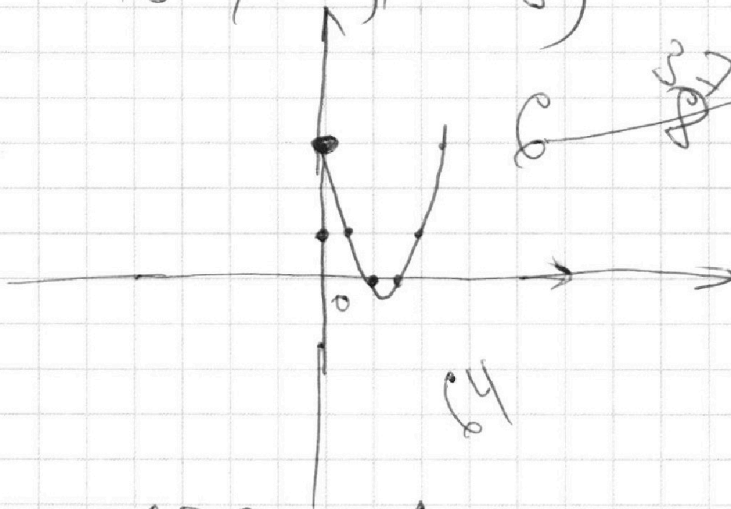
$$8 - 10 + 3 = 1 \quad \frac{2}{2}$$

$$x \in \left[ \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right]$$

$$\sqrt{4 - 16}$$

$$2x^2 - 5x + 3 = (x - 1)(2x - 3)$$

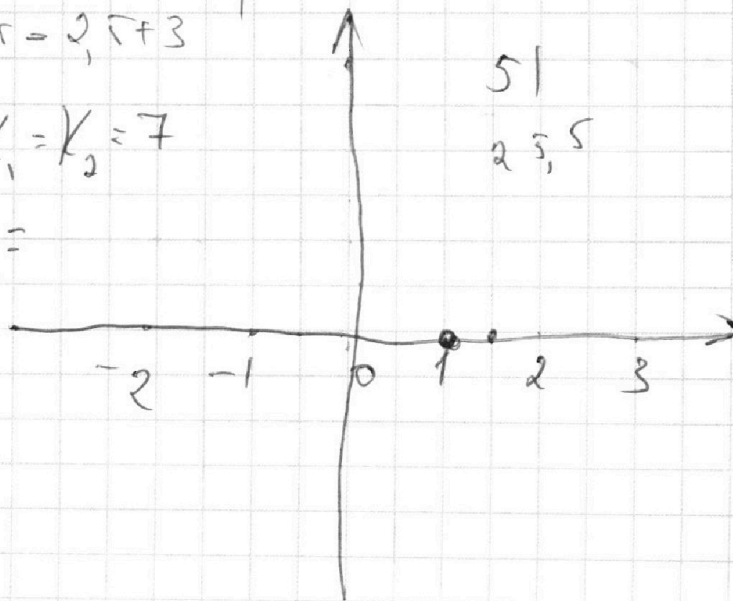
4



$$2 \cdot 0,25 = 0,5 = 0,5 + 3$$

$$-1 \quad K_1 = K_2 = 7$$

$$K_3 =$$



$$a = 2, b = 2, c = 2$$

$$13$$

$$\sin \theta$$

$$\frac{1 \cdot \sin \theta}{2}$$

$$51$$

$$23,5$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$2x_0 + y_0 = 2k$   
 $2x_0 > 0$   
 $y_0 > 0$

Черновик

2

$$ab = k \cdot 2^{14} \cdot 7^{10}$$

$$bc = t \cdot 2^{17} \cdot 7^{17}$$

$$k \cdot t \cdot 5^{-2}$$

$$ac = s \cdot 2^{20} \cdot 7^{37}$$

$$\frac{ab \cdot ac}{bc} = \frac{k \cdot s \cdot 2^{34} \cdot 7^{47}}{t \cdot 2^{17} \cdot 7^{17}} =$$

$$= \frac{k \cdot s \cdot 2}{t}$$

$$a=1$$

$$b=7$$

$$b^2 = \frac{ab \cdot bc}{ac} = \frac{k \cdot t}{s} = \frac{1+7}{1^2 - 6 \cdot 7 + 7^2} =$$

$$\text{НОД}(a+b, a^2 - cab + b^2) = \frac{\varphi}{50-42} = 1$$

$$= \text{НОД}(a+b, (a+b)^2 - cab) =$$

$$= \text{НОД}(a+b, -cab) = \text{НОД}(a+b, \varphi)$$

$-1 \cdot a$      $\cdot a$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Черновик

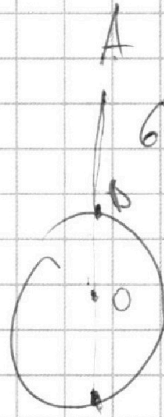
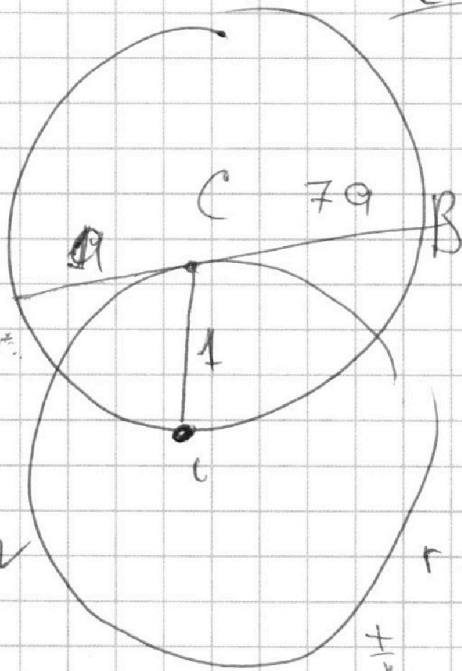
$$4a = \frac{\sqrt{1+a^2} \cdot \sqrt{1+49a^2} \cdot \sin \alpha}{2}$$

$$a = \frac{\sqrt{2}}{8}$$

$$a = \sqrt{2}$$

$$4a = \sqrt{2}$$

$R = 5$



$$64a^2 = (1+a^2)(1+49a^2)$$

$$\sin \alpha = \frac{4a}{5}$$

$$5 \cdot 16 \cdot a = (1+a^2)(1+49a^2)$$

$AB \cdot AC$

$$r = \frac{AB \cdot AC}{2 \cdot AO} = \frac{4}{5} + 50a^2 + 49a^4$$

$$AO^2 - R^2 = (AO - R)(AO + R)$$

$$a \cdot 7a = 25 - O_2 C^2$$

$$O_2 C = \sqrt{25 - 7a^2}$$

$$AO_1 = \sqrt{1+a^2}$$

$$BO_1 = \sqrt{1+49a^2}$$

$$64a^2 = 1+a^2 + 1+49a^2 - 2 \cdot \sqrt{1+a^2} \cdot \sqrt{1+49a^2} \cdot \cos \alpha$$

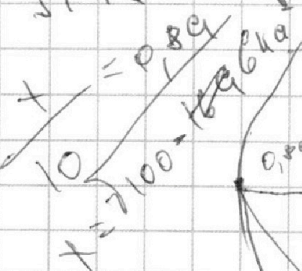
$$8a = \sqrt{100 - 64a^2}$$

$$2 \cdot 64a^2 = 100$$

$$2 = \frac{25}{32}$$

$$a = \frac{5\sqrt{2}}{4}$$

$$\sin \alpha = \frac{4a}{5}$$



$$\frac{8a}{\sin \alpha} = 10$$

$$a = \frac{5}{4} \sin \alpha$$

$$\sin \alpha = 0.8a$$

$$AO_1^2 - 1 = a^2$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

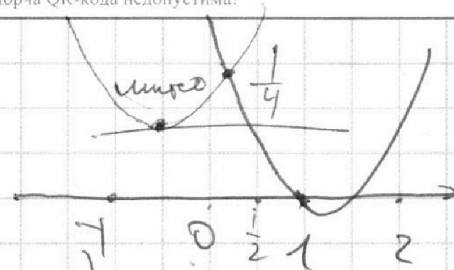
- 1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



*Черновик*

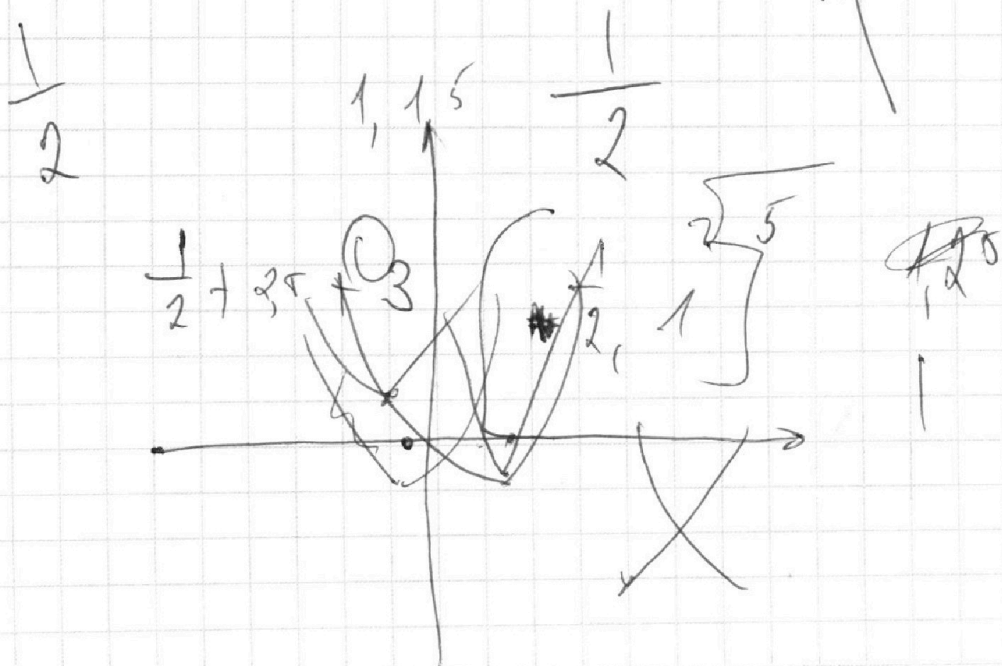


$$(2x^2 - 5x + 3) - (2x^2 + 2x + 1)$$

4

$$2(x^2 + x + \frac{1}{2}) =$$
$$= 2((x + \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4}) =$$

$$2x^2 + 2x + 1 < 1$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\frac{\sin \beta}{\sqrt{4+x^2}} = \frac{1}{2}$

$\sin \beta = \frac{1}{\sqrt{4+x^2}}$

$F = \frac{\sqrt{4+x^2}}{2}$

$2R = AM$

$2(OR - r) = x^2$

$\frac{x^2}{2} + 2 = 2R$

$R = \frac{x^2}{4} + 2$

$\sin \alpha = \frac{4x}{x^2+4}$

$\sin \alpha = \frac{4x}{x^2+4}$

$\frac{4.5(2R-4.5)}{4+x^2} = \frac{4.5 \cdot 2}{4+x^2}$

$(x^2+4) \cdot \sin \alpha = 2 \cdot 2x$

$\frac{\sin \alpha}{\sqrt{x^2+4}} = \frac{\sin \alpha}{2x}$

$\frac{\sin \alpha}{2} = 2$

$\frac{\sin \alpha}{2} = \frac{2 \cdot \sqrt{x^2+4}}{2x}$

$R = \frac{4.5^2}{2} + 4.5 = \frac{20.25}{2} + 4.5 = 10.125 + 4.5 = 14.625$

$\frac{4.5^2}{2} + \frac{4.5}{2} =$



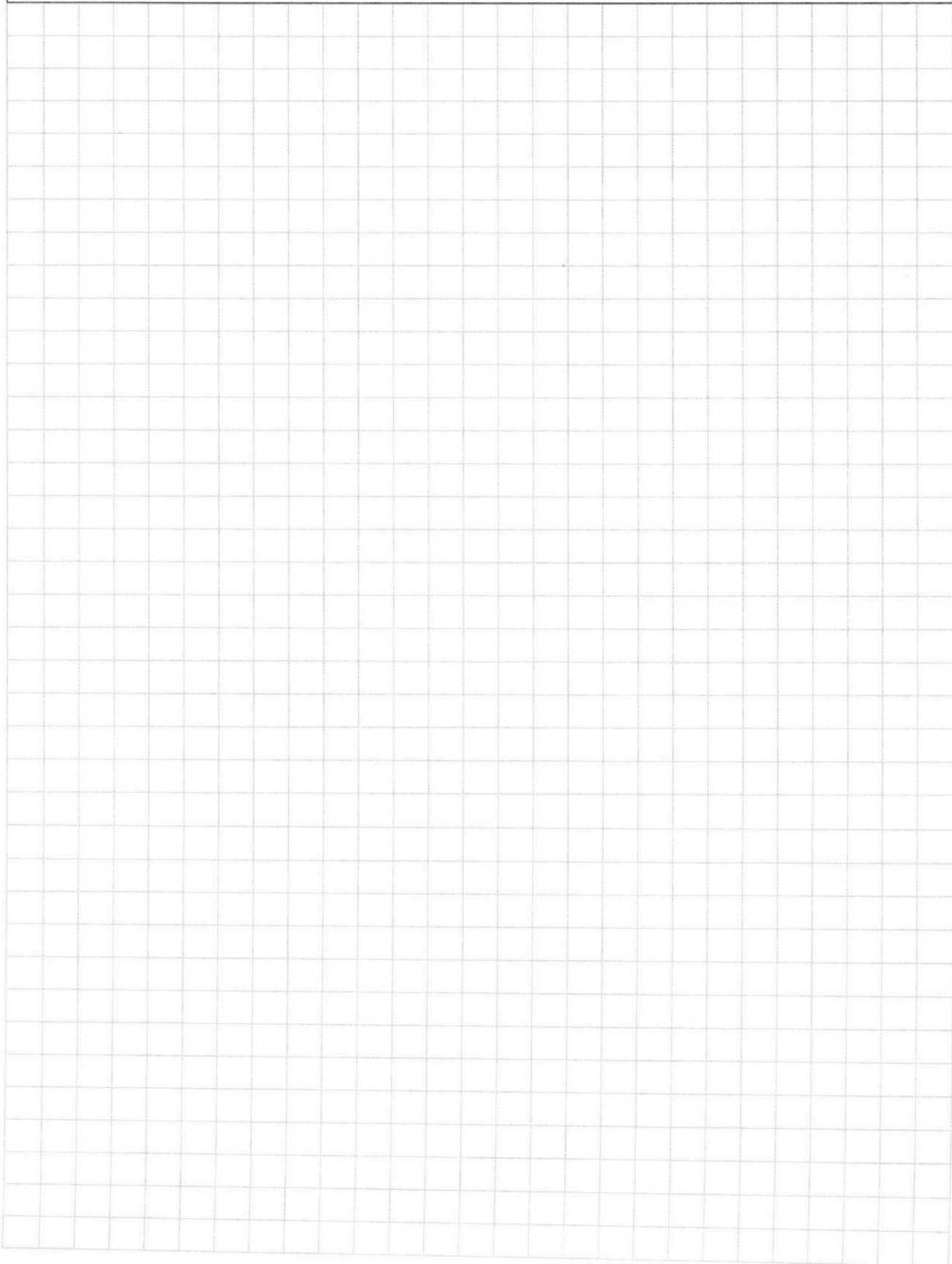
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

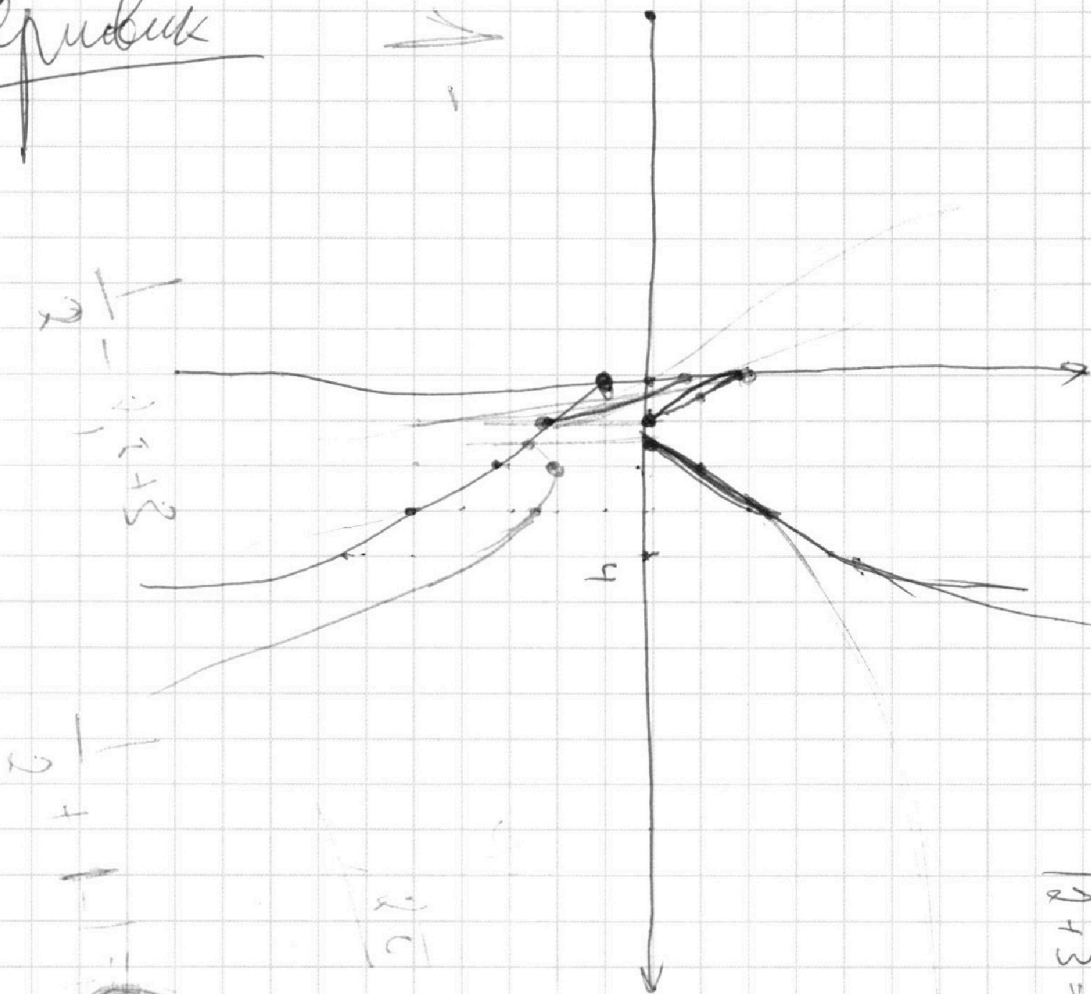
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Черновик



$$32 - 20 + 3$$
$$12 + 3 = 14$$

$$8 - 10 + 3$$

$$2 \cdot 8 - 15 + 3$$

$$18 - 15$$

2.

$$8 + 4 + 1 = 13$$

$$130 \div$$

$$18 + 6 + 1$$

$$25$$

$$32 + 8 + 1$$

$$4/$$

$$2 + 1 + 3$$
$$2 + 1 + 3$$
$$2 + 1 + 3$$

$$2 + 1 + 3$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

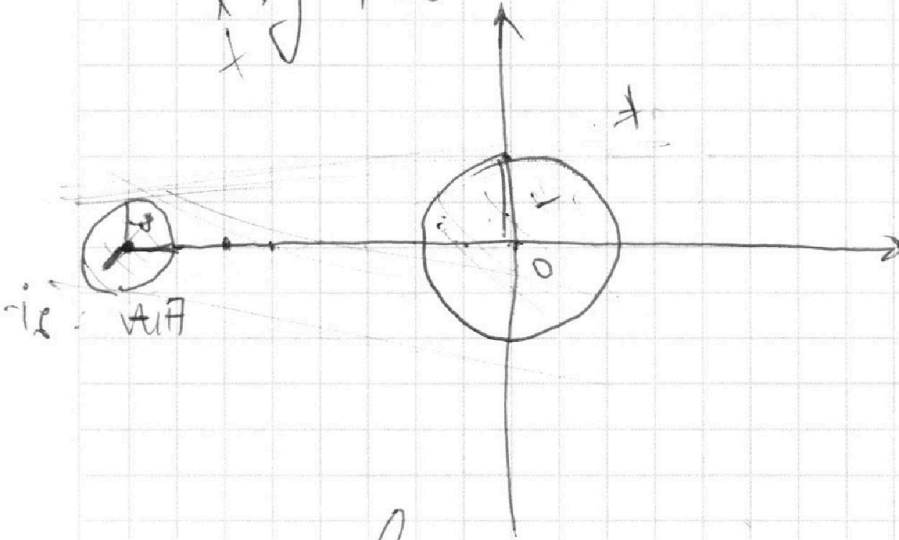
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Черновик

$$ax + by + c = 0$$

$$x^2 + y^2 - 4 = 0$$



$$y = ax + b$$

$$O(-16, 0)$$

$$0 = -16a + b, \quad b = 16a$$

$$\begin{cases} y = ax + b \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

$$D = 32^2 \cdot a^4 - 4 \cdot (1 + a^2)$$

$$y = ax + 16a$$
$$x^2 + y^2 = 4$$

$$x^2 + a^2 x^2 + 32a^2 x + 16^2 a^2 + (ax + 16a)^2 = 4$$