МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь
$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$
При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω, хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB, если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение
$$\sqrt{2x^2-5x+3}-\sqrt{2x^2+2x+1}=2-7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-12;24)$, $Q(3;24)$ и $R(15;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2-2x_1+y_2-y_1=12$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система
$$\begin{cases} ax-y+10b=0, \\ \left((x+8)^2+y^2-1\right)\left(x^2+y^2-4\right) \leqslant 0 \end{cases}$$
имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B. Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC, если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответсвенно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
X						

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 1

Пусть $a = 2^{k_1}\cdot 7^{t_1}\cdot a'$
$b = 2^{k_2}\cdot 7^{t_2}\cdot b'$
$c = 2^{k_3}\cdot 7^{t_3}\cdot c'$

$abc = 2^{k_1+k_2+k_3}\cdot 7^{t_1+t_2+t_3}\cdot a'\cdot b'\cdot c'$

Тогда $ab = 2^{k_1+k_2}\cdot 7^{t_1+t_2}\cdot a'\cdot b' \vdots 2^{14}\cdot 7^{10}$, то есть
$k_1+k_2\geqslant 14$, $t_1+t_2\geqslant 10$

Аналогично
$k_2+k_3\geqslant 17$, $t_2+t_3\geqslant 17$
$k_1+k_3\geqslant 20$, $t_1+t_3\geqslant 37$

Сложим неравенства:

$2(k_1+k_2+k_3)\geqslant 14+17+20$ | $2\cdot(t_1+t_2+t_3)\geqslant 10+17+37$

$k_1+k_2+k_3\geqslant 25{,}5$

$t_1+t_2+t_3\geqslant 32$

$k_1+k_2+k_3\geqslant 26$, т.к. $k_1\in N_0, k_2\in N_0, k_3\in N_0$

Это достигается при
$k_1 = 8, k_2 = 6, k_3 = 12$

Так как $t_1+t_3\geqslant 37$, то
$t_1+t_2+t_3\geqslant 37$
Достигается при $t_3 = 27, t_2 = 0, t_1 = 10$

Заметим, что $abc \geqslant 2^{k_1+k_2+k_3}\cdot 7^{t_1+t_2+t_3}\geqslant$
$\geqslant 2^{26}\cdot 7^{37}$

Равенство достигается при $a = 2^{8}\cdot 7^{10}$, $b = 2^{6}\cdot 7^{0}$, $c = 2^{12}\cdot 7^{27}$

abc при этом равно $2^{26}\cdot 7^{27}$

Ответ: $abc = 2^{26}\cdot 7^{27}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 2

Так как m - наибольшее такое, число $a+b \vdots m$ и $a^2-6ab+b^2 \vdots m$, что $m = НОД(a+b, a^2-6ab+b^2) =$
$= НОД(a+b, (a+b)^2-8ab) = НОД(a+b, 8ab)$, так как $\frac{a}{b}$ - несократима, что $НОД(a,b)=1$
$НОД(a+b, a) = НОД(a+b, b) = 1$. Значит $НОД(a+b, ab) = 1$, а значит $НОД(a+b, 8ab) = НОД(a+b, 8) \leq 8$.

Пример на 8: $a=1$, $b=7$, дробь $\frac{a}{b} = \frac{1}{7}$ - несократима. $\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2} = \frac{8}{1-6\cdot7+7\cdot7} = \frac{8}{8}$.
$8 \vdots 8$ и $8 \vdots 8$.

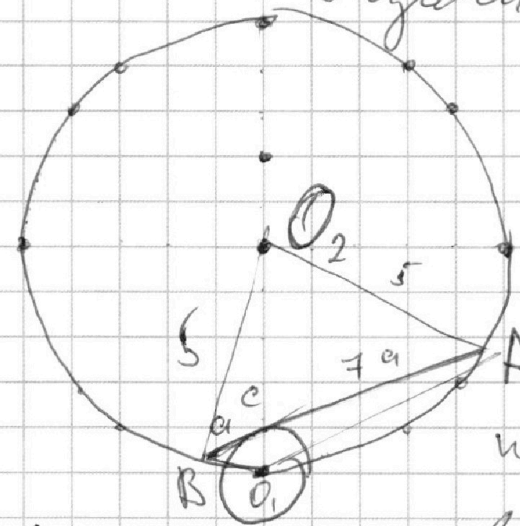
Ответ: $m=8$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3



Пусть $BC = a$, тогда
$AC = BC \cdot 7 = 7a$
$O_1C \perp AB$, так как
O_1C – радиус, а AB касательная, значит $O_1C = 1$

По т. Пифагора в $\triangle BCO_1$ $BO_1 = \sqrt{1+a^2}$,
аналогично $AO_1 = \sqrt{1+49a^2}$
По т. синусов в $\triangle BO_1A$ $\frac{AB}{\sin\angle BO_1A} = 2R = 10$

$8a = 10 \cdot \sin\angle BO_1A$, $\sin\angle BO_1A = 0{,}8a$

$S_{BAO_1} = \frac{O_1C \cdot AB}{2} = \frac{O_1B \cdot O_1A \cdot \sin\angle BO_1A}{2}$

$1 \cdot 8a = \sqrt{1+a^2} \cdot \sqrt{1+49a^2} \cdot 0{,}8a$

$\sqrt{1+a^2} \cdot \sqrt{1+49a^2} = 10$

$(1+a^2)(1+49a^2) = 100$

$49a^4 + 50a^2 - 99 = 0$

$49 \cdot (a^2 - 1)\left(a^2 + \frac{99}{49}\right) = 0$

$a^2 = 1$ или $a^2 = -\frac{99}{49}$

$a = \pm 1$ нет решений, т.к $a^2 \geq 0$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$q=-1$ – невозможно, т.к $q>0$

$q=1$

$BC=1$, $AC=7$

$AB=8$

Ответ: $AB=8$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

[ ] [ ] [ ] [X] [ ] [ ] [ ]

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача 4

$$\sqrt{2x^2-5x+3}-\sqrt{2x^2+2x+1}=2-7x$$

Домножим на сопряженное. Не равное 0, ~~т.к корни не отрицательны~~

$$(2x^2-5x+3)-(2x^2+2x+1)=(2-7x)\left(\sqrt{2x^2-5x+3}+\sqrt{2x^2+2x+1}\right)$$

$$-7x+2=(2-7x)\left(\sqrt{2x^2-5x+3}+\sqrt{2x^2+2x+1}\right)$$

Если $2-7x=0$, то

$x=\frac{2}{7}$ – корень

т.к $2\left(\frac{2}{7}\right)^2-5\cdot\frac{2}{7}+3>0$ и $2\left(\frac{2}{7}\right)^2+2\cdot\frac{2}{7}+1>0$

Иначе

$$1=\sqrt{2x^2-5x+3}+\sqrt{2x^2+2x+1}$$

Сопряженное не равно 0, т.к первый корень не отрицателен

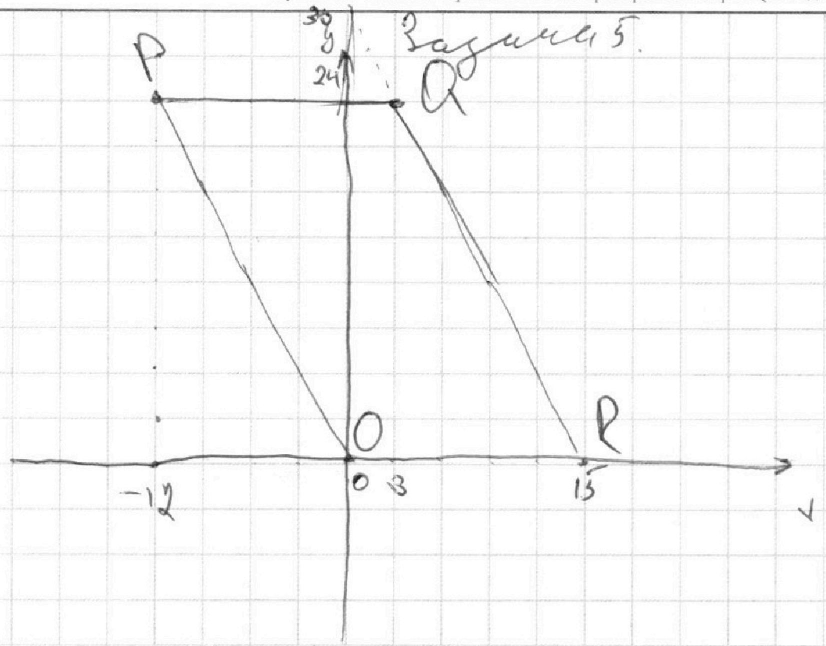
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 5.



$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$

$2x_2 + y_2 = 12 + 2x_1 + y_1$

Найдем все такие $X(x_0, y_0)$, что $2x_0 + y_0 = const$ – они лежат на ~~сторо~~ прямой параллельной PO.

То есть, для любой точки A подходят все такие B лежащие на прямой параллельной PO (т.к. $12 + 2x_1 + y_1$ - const)

Следовательно, подходят все такие пары (A, B), что они лежат на прямых параллельных PO, и расстояние между которыми 12 (расстояние назовем

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

разность констант ~~на~~ этих прямых)

Для каждой такой прямой существует ровно одна на расстоянии 12 (~~с~~ сонаправленная направления)

Заметим, что если прямая не проходит через точки $(0, x), x \in \mathbb{Z}$, то эта прямая не проходит ни через одну целую точку. (т.к. если $2 \cdot 0 + x = c$ не имеет решений, то $c \notin \mathbb{Z}$, а значит $c \neq 2x_0 + y_0 \in \mathbb{Z}$)

То есть таких прямых содержащих хоть одну точку в этом параллелограмме 30 (т.к разность констант сторон 30)

~~Пар~~ Пар, таких, что расстояние между ними 12 и обе имеют целые координаты в параллелограмме 24 (для каждой координаты y на прямой Oy от 0 до 24)

Заметим, что константа прямой равна координате y пересечения с Oy.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

На прямой с чётной константой ровно 13 целых точек в параллелограмме ($2x_0+y_0=2k$, т.к. точки принадлежат параллелограмму, то $y_0 \geq 0$ и $y_0 \leq 24$, ур-ие $2x_0=2k-y_0$ имеет ровно 13 решений)

С нечётной, аналогично, 12 точек.

В паре обе прямые одинаковой чётности.

Чётных пар (с константой у первой у на 0, 2, …, 24) − 13, значит пар точек $(13\cdot13)\cdot13=13^3$

Нечётных пар (1, 3, …, 23) − 12, значит пар точек $12\cdot(12\cdot12)=12^2$

Следовательно всего пар точек 13^3+12^3

Ответ: 13^3+12^3

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

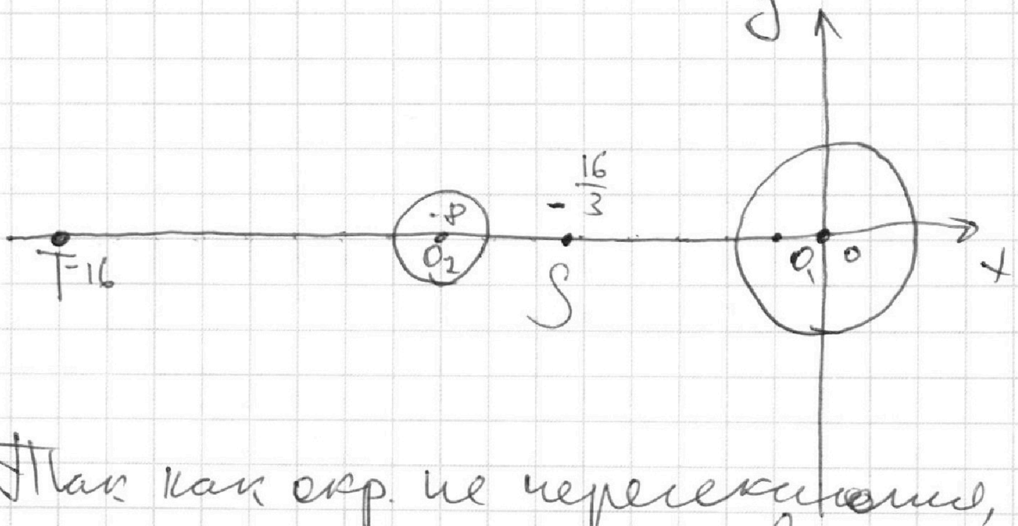
Задача 6

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 & (1) \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \le 0 & (2) \end{cases}$$

(1) – ур-прямой

(2) $(x+8)^2 + y^2 - 1$ – ур-окружн
$x^2 + y^2 - 4$

данное нер-во отрицательно если точка $A(x, y)$ находится ровно внутри одной окружности или на границе.



Так как окр. не пересекаются, что точка должна находиться внутри или на границе одной из окружностей.

Чтобы система имела два решения

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Прямая должна пересекать эти ~~окру~~ круги ~~ности~~ в сумме два раз. Так как прямая пересекает ~~круг~~ круг в 0, 1 или ∞ точках, то прямая должна касаться обе окружности. То есть всего таких прямых 4.

Рассмотрим внешние касательные. Они пересекаются в центре положительной гомотетии. Центр положительной гомотетии $T(-16, 0)$, коэффициент равен $\frac{R_2}{R_1}=2$, то есть $\frac{TO_1}{TO_2}=\frac{x}{x-8} \Rightarrow x=16$, а координата -16.

Пусть ур-ие касательной $y=kx+n$

$0=-16k+n$, $n=16k$

$\begin{cases} y=kx+n \\ y^2+x^2=4 \end{cases}$ − имеет одно решение

$y=kx+16k$

$x^2+(kx+16k)^2=4$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$(x^2+k^2x^2)+32k^2x+(256k^2-4)=0$

$D=0$

$D=2^{10}\cdot k^4-4\cdot(k^2+1)(2^8k^2-4)=0 \quad \Big| : 2^4$

$2^6\cdot k^4-(k^2+1)(2^6k^2-1)=0$

$2^6\cdot k^4-2^6\cdot k^4+k^2-2^6k^2+1=0$

$k^2\cdot(1-2^6)=-1$

$k^2=\frac{1}{63}$

$k=\pm\frac{1}{\sqrt{63}}=\pm\frac{1}{3\sqrt{7}}$

Т.е. есть ур-ие касательных $y=\pm\frac{x}{3\sqrt7}+\frac{16}{3\sqrt7}$

1) $\frac{x}{3\sqrt7}-y+\frac{16}{3\sqrt7}=0$

$ax-y+10b=0$

$a=\frac{1}{3\sqrt7}$, $b=\frac{8}{15\sqrt7}$

2) $-\frac{x}{3\sqrt7}-y+\frac{16}{3\sqrt7}=0$

$a=-\frac{1}{3\sqrt7}$, $b=\frac{8}{15\sqrt7}$

Рассмотрим центр отрицательной гомотетии, через него проходят внутренние касательные. Коэффициент $\frac{R_2}{R_1}=2$, и центр лежит на O_1O_2, $\frac{SO_2}{SO_1}=2$, значит $SO_2=\frac{28}{3}=\frac{16}{3}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 [X] 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$SO_1 = \frac{8}{3}$, $S_1(-\frac{16}{3}, 0)$

Нужно ур. касательных $y = kx + n$.

$0 = \frac{-16k}{3} + n$, $n = \frac{16k}{3}$

$\begin{cases} y = kx + n \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$ – имеет одно решение

$y = kx + \frac{16k}{3}$

$x^2 + (kx + \frac{16k}{3})^2 = 4$

$x^2(1 + k^2) + \frac{32k}{3}x + \left(\frac{2^8 \cdot k^2}{9} - 4\right) = 0$

$D = 0$

$D = \frac{2^{10} \cdot k^4}{9} - 4 \cdot (1 + k^2) \cdot \left(\frac{2^8 \cdot k^2}{9} - 4\right) = 0 \quad \Big| : 2^4$

$\frac{2^6 \cdot k^4}{9} - (1 + k^2)\left(\frac{2^6 \cdot k^2}{9} - 1\right) = 0$

$\frac{2^6 \cdot k^2}{9} - \frac{2^6 \cdot k^4}{9} + k^2 - \frac{2^6 \cdot k^2}{9} + 1 = 0$

$k^2\left(\frac{2^6}{9} - 1\right) = 1$

$k^2\left(\frac{55}{9}\right) = 1$

$k^2 = \frac{9}{55}$

$k = \pm \frac{3}{\sqrt{55}}$

ур-ие $y = \pm \frac{3x}{\sqrt{55}} + \frac{16}{\sqrt{55}}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1) $\frac{3x}{\sqrt{55}} - y + \frac{16}{\sqrt{55}} = 0$

$ax - y + 10b = 0$

$a = \frac{3}{\sqrt{55}}, \quad b = \frac{16}{10\sqrt{55}}$

2) $-\frac{3x}{\sqrt{55}} - y + \frac{16}{\sqrt{55}} = 0$

$a = -\frac{3}{\sqrt{55}}, \quad b = \frac{16}{10\sqrt{55}}$

Ответ: $a_{1,2} = \pm\frac{3}{\sqrt{55}}$, для них $b = \frac{16}{10\sqrt{55}}$

$a_{3,4} = \pm\frac{1}{3\sqrt{7}}$, для них $b = \frac{8}{15\sqrt{7}}$.

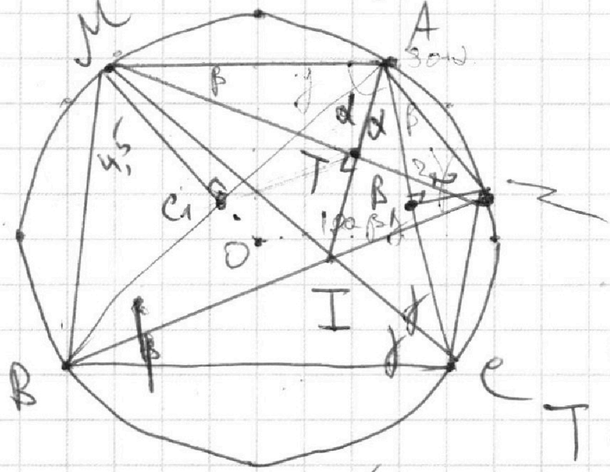
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача 7



Так как M и N - середины дуг, что CM и BN - биссектрисы

$T = MN \cap AI$

По т. о трезубце $AN = NC = NI$ и $AM = MC = MI$.

Пусть $MC_1 \perp AB$ и $NB_1 \perp AC$, т.к. $\triangle BMA$ и $\triangle ANC$ - равнобедренные, что C_1 и B_1 - середины AB и AC

Степень точки C_1 - $-\frac{AB}{2}\cdot\frac{AB}{2}$ и $-4,5\cdot(2R-4,5)$,

то есть $AB^2 = 18\cdot(2R-4,5)$, $R = \frac{AB^2}{36}+\frac{4,5}{2}$

Аналогично $\frac{AC^2}{4} = 2\cdot(2R-2)$, $R = \frac{AC^2}{16}+1$

$$\frac{AB^2}{36}+\frac{4,5}{2} = \frac{AC^2}{16}+1 \quad \Big| \cdot 4$$

$$\frac{AB^2}{9}+9 = \frac{AC^2}{4}+4 \quad \Big| \cdot 36$$

$$4AB^2+9\cdot 36 = 9AC^2+4\cdot 36$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7 [X]

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$9AC^2 = 4AB^2 + 180$

$AC^2 = \frac{4AB^2}{9} + 20$

Пусть $AC = 2x$, $AB = 2y$

По т. Пифагора $AN = \sqrt{4+x^2}$, $AM = \sqrt{4{,}5^2+y^2}$

$S_{\triangle ANC} = 2x = \frac{(4+x^2)\cdot \sin\angle ANC}{2}$

$\sin\angle ANC = \frac{4x}{4+x^2}$ аналогично

$\sin\angle BMA = \frac{9y}{4{,}5^2+y^2}$, по т. синусов $R = \frac{1}{4+x^2} = \frac{1}{4{,}5^2+y^2} \Rightarrow \frac{4+x^2}{4{,}5^2+y^2} = 1$

Так как $AN = NI$ и $MA = MI$, то $MANI$ — дельтоид, а значит $AI \perp MN$

$\angle AMN = \angle ABN$, $\frac{\sin\angle ABN}{AN} = 2R$

$\sin\angle ABN = \frac{\sqrt{4+x^2}}{4+x^2} = \frac{1}{\sqrt{4+x^2}}$

В $\triangle MAT$ $\angle ATM = 90^\circ$, значит

$AT = \sin\angle AMT \cdot AM = \frac{\sqrt{4{,}5^2+y^2}}{\sqrt{4+x^2}} = \cancel{4} = 1$

А т.к. $MANI$ — дельтоид, то $AT = IT$, то есть $AI = 2\cdot AT = 2$.

Ответ: $AI = 2$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

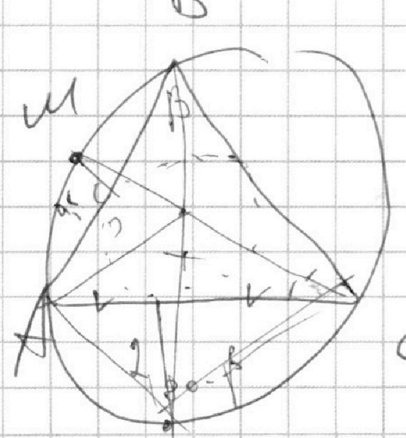
Черновик

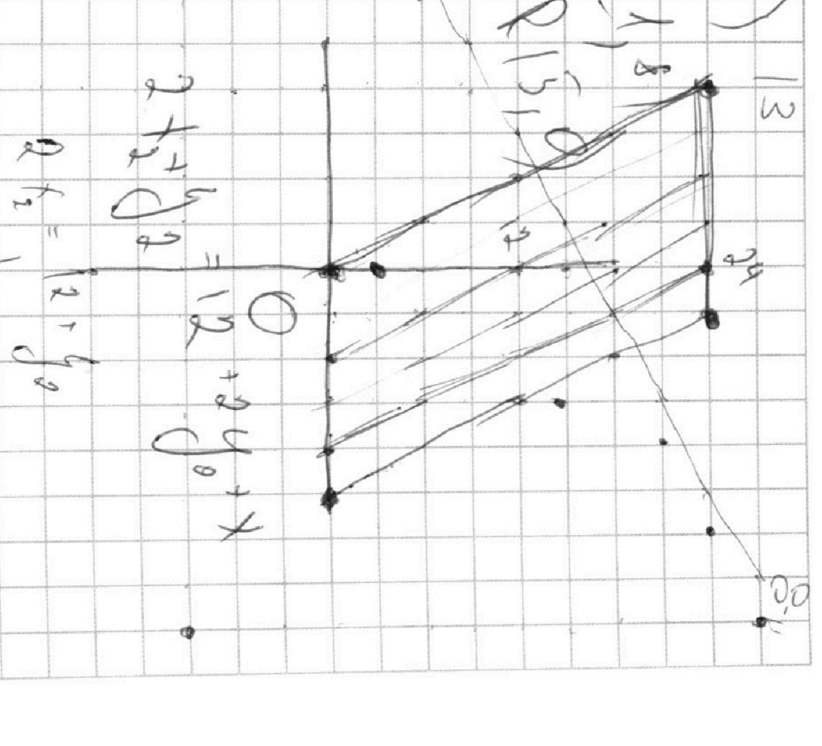
$$\sqrt{(x-1)(2x-3)} + \sqrt{2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+1,5} = 2-7x$$

$D = 4 - 2\cdot 4\cdot x$

$\left(2x^2+2x-\frac{1}{2}\right)+1,5$

$\frac{x}{\sin\beta} = 2R$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Черновик

$D = 25 - 24 = 1$

$x = \frac{5 \pm 1}{4}$

$8 - 10 + 3 =$

1 $\frac{3}{2}$

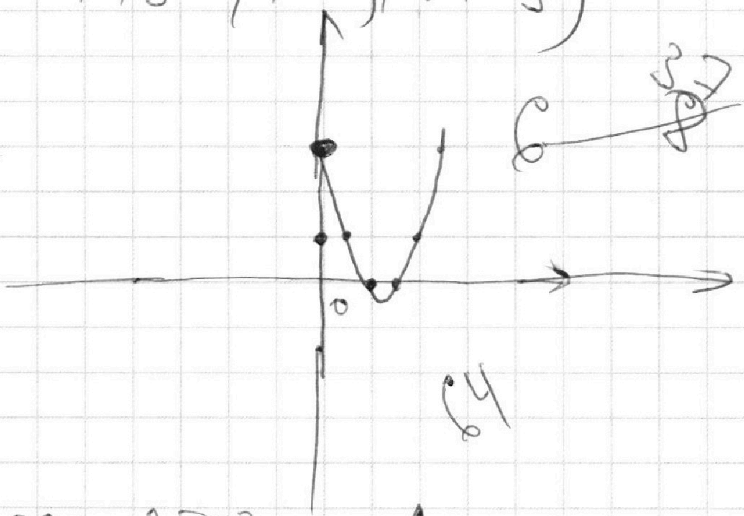
$x \in [1; 1,5]$

$\boxed{4-16}$

77

$2x^2 - 5x + 3 = (x-1)(2x-3)$

4



6 13 8 6

12

64

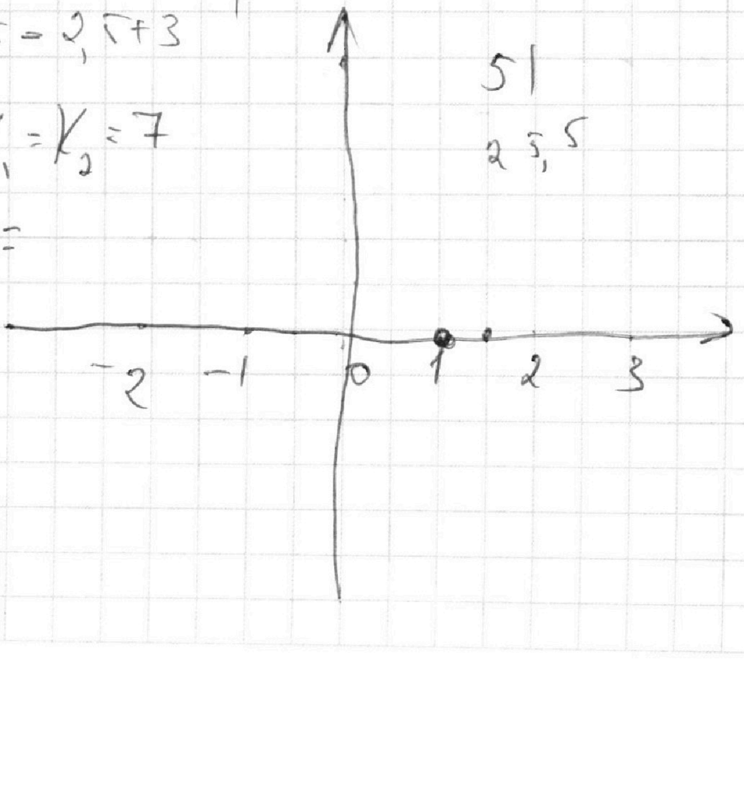
$2 \cdot 0,25 = 0,5 - 2,5 + 3$

51

2 5,5

-1 $K_1 = K_2 = 7$

$K_3 =$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Черновик

2

$ab = k \cdot 2^{14} \cdot 7^{10}$

$bc = t \cdot 2^{17} \cdot 7^{17}$

$ac = s \cdot 2^{20} \cdot 7^{37}$

$k \cdot t \cdot s$

$$\frac{ab \cdot ac}{bc} = \frac{k \cdot s \cdot 2^{34} \cdot 7^{47}}{t \cdot 2^{17} \cdot 7^{17}} =$$

$$= \frac{\cancel{k \cdot s \cdot 2}}{t}$$

$a = 1$

$b = 7$

$$b^2 = \frac{ab \cdot bc}{ac} = \frac{k \cdot t}{s} \qquad \frac{1+7}{1^2 - 6 \cdot 7 + 7^2} =$$

$$\text{НОД}(a+b, a^2 - 6ab + b^2) = = \frac{8}{50-42} = 1$$

$$= \text{НОД}(a+b, (a+b)^2 - 8ab) =$$

$$= \text{НОД}(a+b, -8ab) = \text{НОД}(a+b, 8)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Черновик

$4a = \frac{\sqrt{1+a^2}\cdot\sqrt{1+49a^2}\cdot \sin\alpha}{2}$

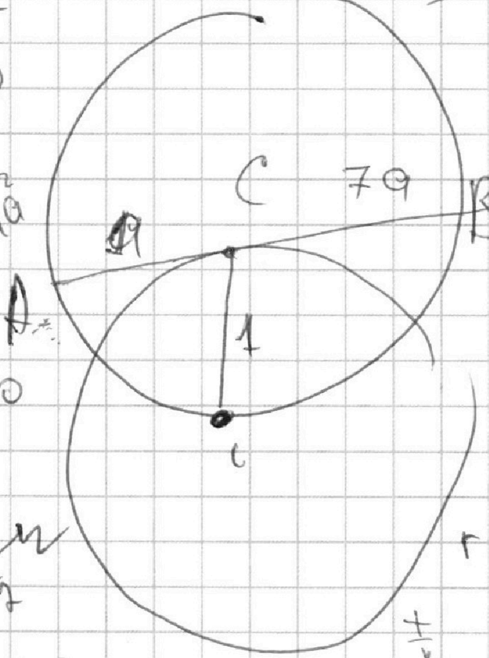
$\frac{5\sqrt{2}}{8}$

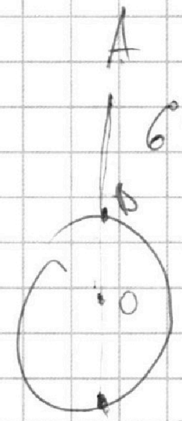
$R = 5$

$a = \sqrt{2}$

$Ra = 5\sqrt{2}$

Ω





$64a^2 = (1+a^2)(1+49a^2)\cdot \sin\alpha =$

$\frac{4a}{5}$

$=$

$8a = \sqrt{100-64a^2}$

$2\cdot 64a^2 = 100$

$a^2 = \frac{25}{32}$

$a = \frac{5}{4}\sqrt{\frac{1}{2}}$

$5\cdot 16\cdot a = (1+a^2)(1+49a^2)$

$AB\cdot AC$

$r = 1$

$80a = 1 + 50a^2 + 49a^4$

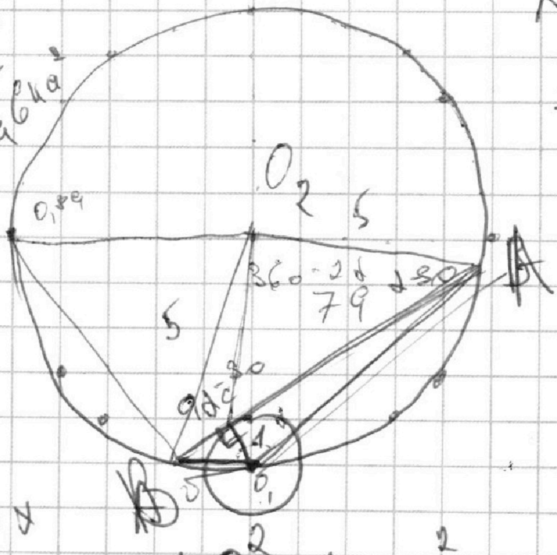
$\sin\alpha = \frac{4a}{5}$

$AO^2 - R^2 =$

$= (AO-R)(AO+R)$

$x = \frac{0{,}8a}{10}$

$x = \sqrt{100+16a\,64a^2}$



$a\cdot 7a = 25 - O_2C^2$

$O_2C = \sqrt{25-7a^2}$

$AO_1 = \sqrt{1+a^2}$

$BO_1 = \sqrt{1+49a^2}$

$\frac{8a}{\sin\alpha} = 10$

$a = \frac{5}{4}\sin\alpha$

$AO_1^2 - 1 = a^2$

$\sin\alpha = 0{,}8a$

$64a^2 = 1+a^2+1+49a^2 - 2\sqrt{\ }\cdot\sqrt{\ }\cdot\cos$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

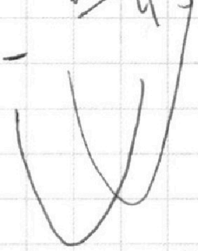
Черновик

$(2x^2-5x+3)-(2x^2+2x+1)$

4

4 $\frac{35}{49}$ +

$\frac{8}{49}$ -



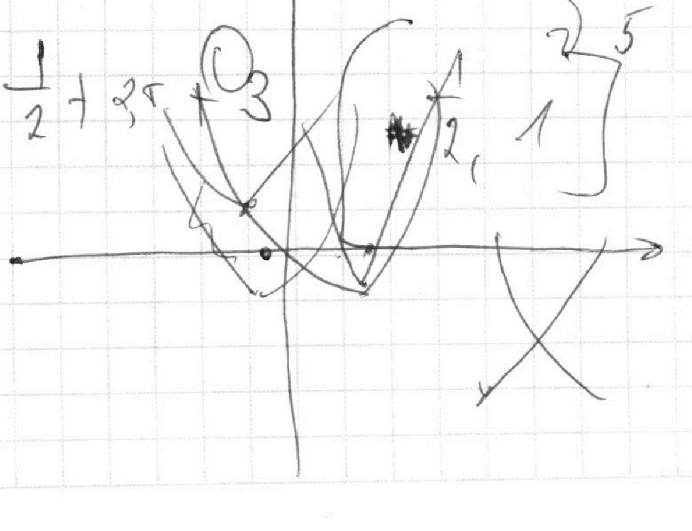
$2(x^2+x+\frac{1}{2})=$

$=2((x+\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4})=$

$-\frac{1}{2}$

$2x^2+2x+1<1$

$\frac{1}{2}$ 1,15 $\frac{1}{2}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

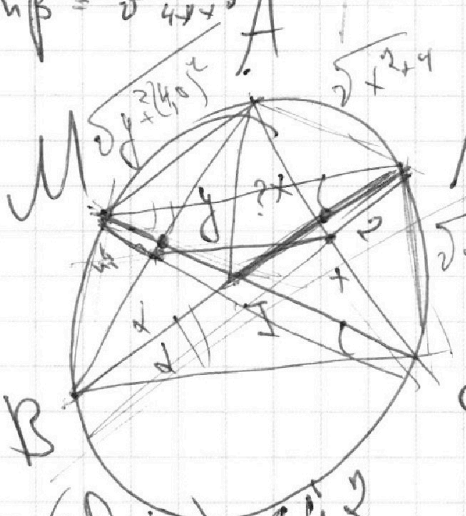
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

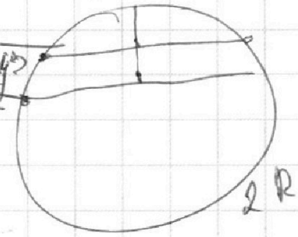
МФТИ

черновик

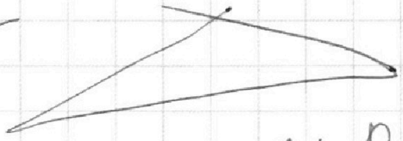
$\frac{\sin\beta}{\sqrt{81+x^2}} = \frac{1}{}$

$\sin\beta = \frac{1}{\sqrt{4+x^2}}$





$2R = \frac{\sin\beta}{AM}$



$2(2R-2) = x^2$

$CF =$

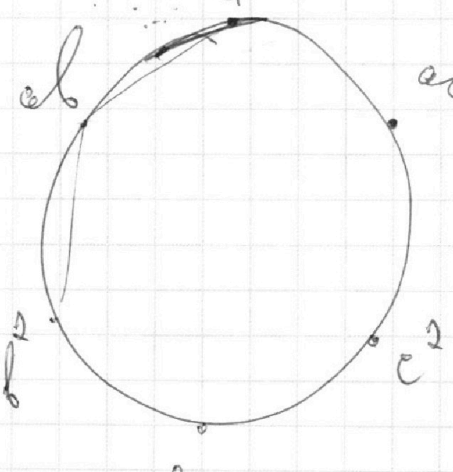
$2 \cdot 2x \quad \frac{x^2}{2} + 2 = 2R$

$R = \frac{x^2}{4} + 1$

$4{,}5 \cdot (2R - 4{,}5) = y^2$

$(x^2+4) \cdot \sin^2\alpha = \frac{4x}{x^2+4}$

$\sin^2\alpha =$



$\frac{\sin\alpha}{\sqrt{x^2+4}} = \frac{\sin 2\alpha}{2x}$

$\frac{\sin\alpha}{} = 2.$

$\frac{\sin\alpha}{2x} = \frac{2\sqrt{x^2+4}}{2x} = R$

$R = \frac{\frac{y^2}{4{,}5} + 4{,}5}{2} = \frac{y^2}{9} + \frac{4{,}5}{2}$

$\frac{y^2}{4{,}5 \cdot 9} + \frac{4{,}5}{2} =$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

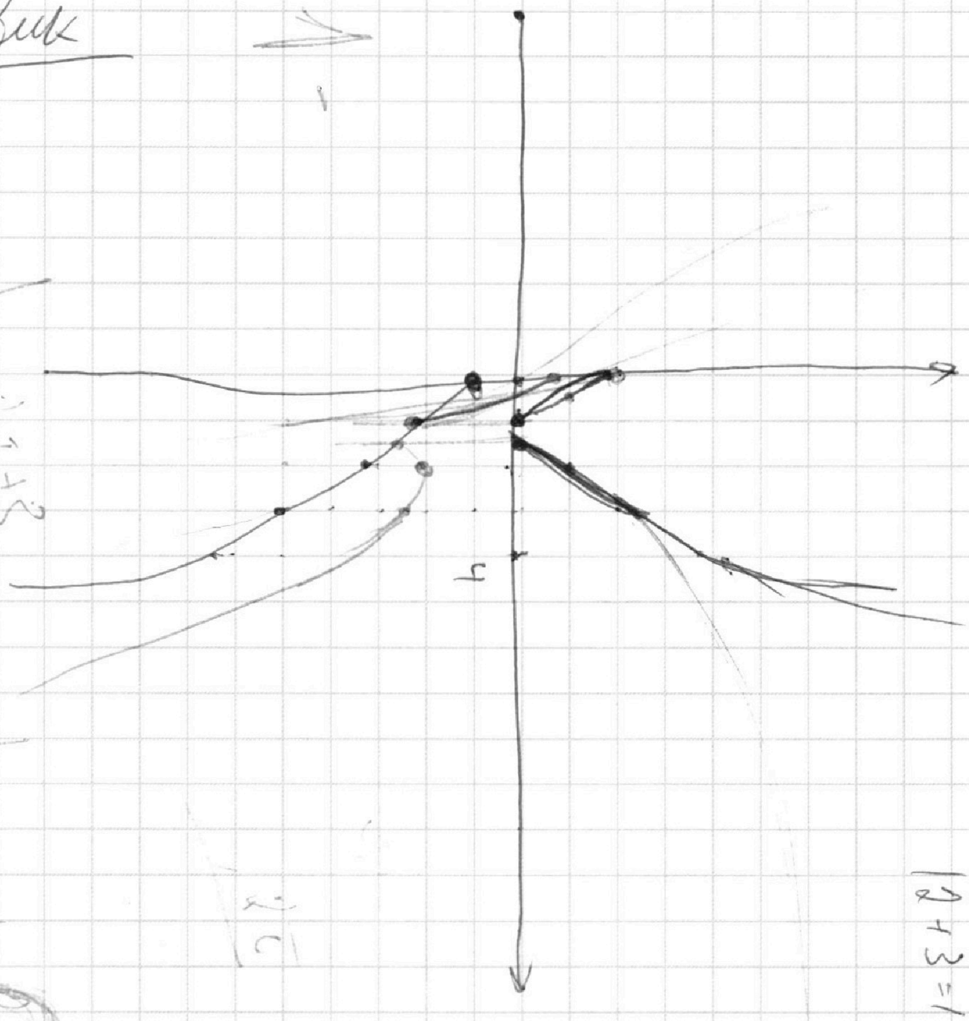
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

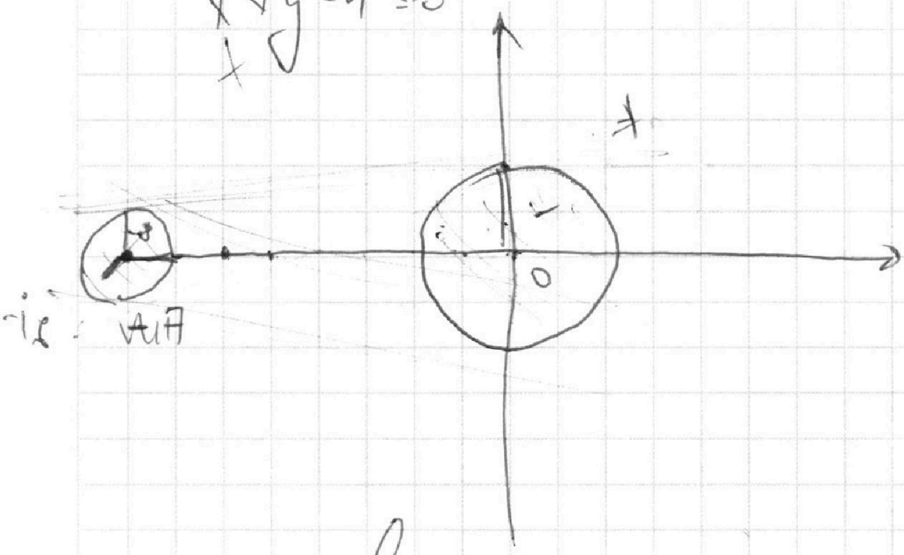
Черновик



Черновик

$\cancel{ax+y+16b}=0$

$x^2+y^2-4=0$



$y=ax+b$

$O(-16,0)$

$0=-16a+b$, $b=16a$

$\begin{cases} y=ax+b \\ x^2+y^2=4 \end{cases}$

$D=32^2\cdot a^4-4\cdot(1+a^2)$

$y=ax+16a$

$x^2+y^2=4$

$x^2+a^2x^2+32a^2x+16^2a^2-4=0$ $(ax+16a)^2=4$