



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-12;24)$, $Q(3;24)$ и $R(15;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ab : 2^{14} 7^{10}$$

$$bc : 2^{17} 7^{17}$$

$$ac : 2^{20} 7^{37}$$

Значит, мы можем представить $ab = 2^{14} 7^{10} n, n \in \mathbb{N}$
 $bc = 2^{17} 7^{17} m, m \in \mathbb{N}$
 $ac = 2^{20} 7^{37} k, k \in \mathbb{N}$

~~Итого~~ Перемножим эти произведения

$$ab \cdot bc \cdot ac = 2^{14} 7^{10} n \cdot 2^{17} 7^{17} m \cdot 2^{20} 7^{37} k$$

$$(abc)^2 = 2^{51} \cdot 7^{64} \cdot nmk$$

$(abc)^2$ является полным квадратом $\Rightarrow 2^{51} \cdot 7^{64} \cdot nmk$ также является
 полным квадратом \Rightarrow степени 2 должны быть четной \Rightarrow одно из чисел $n, m, k : 2^{2t+1}$

Чтобы abc было наименьшим, остальные 2 числа из n, m, k

~~должны быть~~ $\frac{nmk}{2^{2t+1}}$ должно быть наименьшим возможным квадратом

$$(abc)^2 = 2^{50+2t+1} \cdot 7^{64} \cdot \frac{nmk}{2^{2t+1}}$$

натурального числа, т.е. 1, $2t-1$ -минимальной
 степени 2, т.е. $2t-1 \geq t+1$

$$(abc)^2 = 2^{50} \cdot 7^{64} \cdot 1$$

$$abc = 2^{25} \cdot 7^{32}$$

$n=2 \Rightarrow ab = 2^{15} 7^{10} \quad c = 2^{11} 7^{22} \quad b = 2^6 \cdot 7^{15}$
 $m=2 \Rightarrow bc = 2^{18} 7^{17} \quad a = 2^8 \cdot 7^{15} \quad b = 2^8 \cdot 7^5$
 $k=2 \Rightarrow ac = 2^{21} 7^{37} \quad b = 2^5 \cdot 7^5$

Значит, такое есть и можно.

Исходя из наименьшего квадрата является 1

~~Итого~~ $(abc)^2 = 2^{50+2t} \cdot 7^{64} \cdot \frac{nmk}{2^{2t+1}}$
 $abc = 2^{25+t} \cdot 7^{32}$

abc должно быть $\geq 2^{20} 7^{37}$, т.к. в противном случае
 ~~2^{40}~~ ~~7^{37}~~ $ac = 2^{20} \cdot 7^{37} > abc$

Ответ: $2^{26} \cdot 7^{37}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\frac{a}{b}$ - несократима $\rightarrow a$ и b не имеют общих делителей

$$\frac{a+b}{a^2 - 6ab + b^2} = \frac{a^2 - b^2}{(a-b)(a^2 - 6ab + b^2)}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пусть O_1 - центр окружности ω , O_2 - центр окружности ω_1 , тогда

$$O_1A = O_1B = 5, \quad O_2C = 1$$

AB - касательная к $\omega_1 \Rightarrow AB \perp O_2C$

Пусть $AC = 7x$, тогда $BC = x \Rightarrow x > 0$

$AB \perp O_2C \Rightarrow \triangle BO_2C, \triangle AO_2C$ - прямоугольные \triangle

\Rightarrow по т. Пифагора

$$BO_2 = \sqrt{1+x^2}$$

$$\text{и } AO_2 = \sqrt{1+49x^2}$$

Угол $\angle AO_2B = 2\varphi$, тогда $\angle AO_2C = 180^\circ - \varphi$

В $\triangle AO_2B$ по т. кос-ов

$$AB^2 = O_2B^2 + O_2A^2 - 2 \cos 2\varphi \cdot O_2B \cdot O_2A$$

$$64x^2 = 25 + 25 - 2 \cos 2\varphi \cdot 25$$

$$\cos 2\varphi = 1 - \frac{64x^2}{50}$$

В $\triangle AO_2B$ по т. кос-ов

$$AB^2 = O_2B^2 + O_2A^2 - 2 \cos(180^\circ - \varphi) \cdot O_2A \cdot O_2B$$

$$64x^2 = 1+x^2 + 1+49x^2 - 2 \cos(180^\circ - \varphi) \cdot \sqrt{1+x^2} \cdot \sqrt{1+49x^2}$$

$$14x^2 = 2 + 2 \cos \varphi \cdot \sqrt{1+x^2} \cdot \sqrt{1+49x^2}$$

$$4x^2 = 1 + \sqrt{2 - \frac{64x^2}{50}} \cdot \sqrt{1+x^2} \cdot \sqrt{1+49x^2}$$

$$(4x^2 - 1)^2 = \left(1 - \frac{32x^2}{50}\right)^2 (1 + 50x^2 + 49x^4)$$

$$49x^4 - 14x^2 + 1 = \left(1 - \frac{32x^2}{50}\right)^2 (1 + 50x^2 + 49x^4) - 32x^4 - \frac{32x^2}{50} \cdot 49x^4$$

$$64x^2 - 0,64x^2 - 32x^4 - 0,64x^6 - 49 = 0$$

$$x^2 - 0,01x^2 - 0,5x^4 - 0,49x^6 = 0$$

$$49x^6 + 50x^4 - 99x^2 = 0$$

$$x^2(49x^4 + 50x^2 - 99) = 0$$

$x > 0 \Rightarrow$ разделим на x^2

Пусть $x^2 = t \geq 0$

$$49t^2 + 50t - 99 = 0$$

$$(t-1)(49t+99) = 0$$

$$t = 1$$

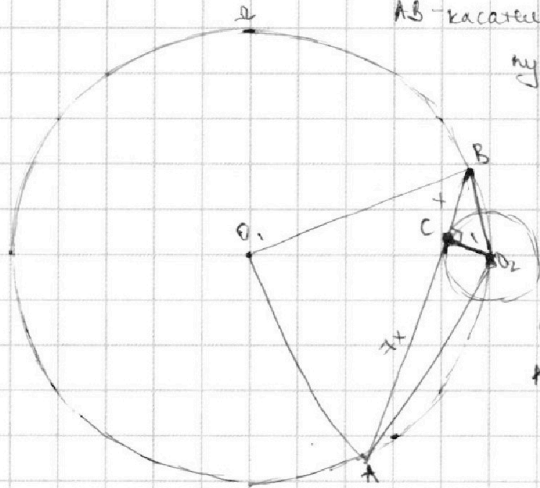
$$t = -\frac{99}{49} < 0 \text{ - не } y_{\text{доп.}} \text{ гал.}$$

$$t = 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$$

$$x = -1 = 0 \text{ - не } y_{\text{доп.}} \text{ гал.}$$

$$AB = AC + BC = 8x = 8$$

Ответ: $AB = 8$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$$

дошкочим на сопряженное

$$\frac{2x^2 - 5x + 3 - 2x^2 - 2x - 1}{\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1}} = 2 - 7x$$

~~2-7x~~

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} > 0 \text{ при } x \in \mathbb{R}, \text{ так как}$$

при любых x , удовлетворяющих ОДЗ, т.к. $\sqrt{2x^2 + 2x + 1} > 0, \sqrt{2x^2 - 5x + 3} \geq 0$

$$\frac{2-7x}{\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1}} = 2 - 7x$$

$$2 - 7x = (2 - 7x) (\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1})$$

$$(2 - 7x) (\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} - 1) = 0$$

$$\begin{cases} 2 - 7x = 0 \\ \sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{7} \\ \sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 1 \end{cases} \quad (2)$$

$$(2) \Leftrightarrow \sqrt{2x^2 - 5x + 3} = 1 - \sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

$$2x^2 - 5x + 3 \geq 1 + 2x^2 + 2x + 1 - 2\sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

$$2\sqrt{2x^2 + 2x + 1} \geq 4x - 1$$

$$8x^2 + 8x + 4 \geq 49x^2 + 1 - 14x$$

$$41x^2 - 22x - 3 \geq 0$$

$$D = 484 + 12 \cdot 41 = 576$$

$$x_1 = \frac{22 + 24}{82} = \frac{46}{82} = \frac{23}{41}$$

$$x_2 = \frac{22 - 24}{82} = -\frac{1}{41}$$

Проверка: при $x = \frac{23}{41}$

$$\sqrt{2 \cdot \frac{529}{1681} - \frac{115}{41} + 3} - \sqrt{2 \cdot \frac{529}{1681} + \frac{46}{41} + 1} = 2 - 4 \cdot \frac{23}{41}$$

$$\sqrt{\frac{1386}{1681}} - \sqrt{\frac{853}{1681}} = -\frac{79}{41}$$

$\frac{1386}{1681} > \frac{853}{1681} \Rightarrow$ левая часть ур. положительная, правая - отрицательная \Rightarrow

$\Rightarrow x = \frac{23}{41}$ не подходит

при $x = -\frac{1}{41}$

$$\sqrt{2 \cdot \frac{1}{1681} + \frac{5}{41} + 3} - \sqrt{2 \cdot \frac{1}{1681} - \frac{2}{41} + 1} = 2 + \frac{7}{41}$$

$$\sqrt{\frac{5200}{1681}} - \sqrt{\frac{1601}{1681}} = \frac{89}{41}$$

$$\sqrt{5200} - \sqrt{1601} = 89$$

$$\sqrt{5200} \geq 89 + \sqrt{1601} > 89$$

$$\sqrt{5200} < 129 \Rightarrow \sqrt{5200} \neq 89 + \sqrt{1601} \Rightarrow x = -\frac{1}{41} \text{ не подходит}$$

Ответ: $x = \frac{2}{7}$

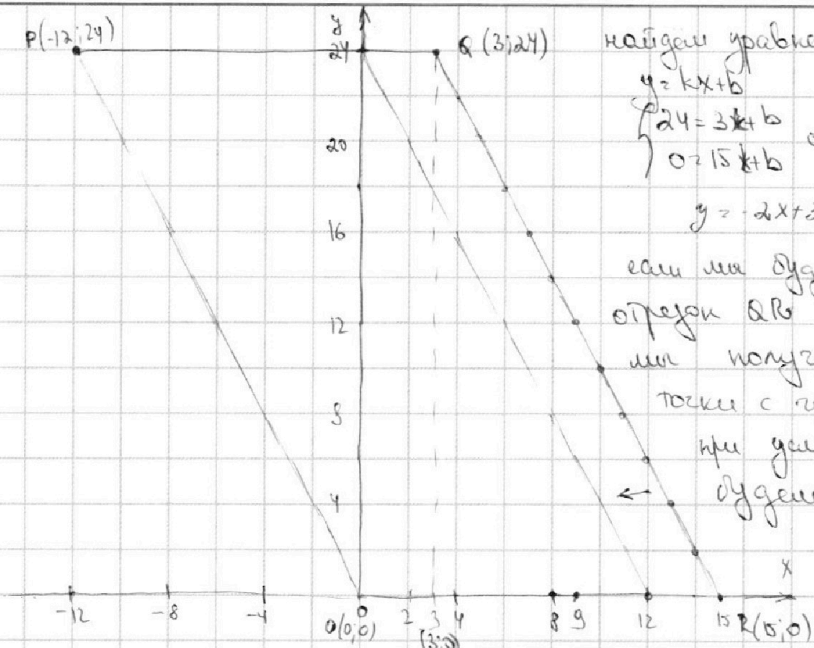
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



найдем уравнение прямой AB

$$y = kx + b$$
$$\begin{cases} 24 = 3k + b \\ 0 = 15k + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -2 \\ b = 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -2 \\ b = 30 \end{cases}$$
$$y = -2x + 30$$

если мы будем параллельно переносить отрезок AB вдоль оси Ox влево, то мы получим все точки с целыми координатами при условии, что каждый раз будем b уменьшать на 1 (при таком переносе $k = \text{const}$)

по условию $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$

$$(2x_2 + y_2) - (2x_1 + y_1) = 12$$
$$(2x_2 - 2x_1 + b_2) - (2x_1 - 2x_1 + b_1) = 12$$
$$b_2 - b_1 = 12$$

то если для того, чтобы пара точек $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ с целыми координатами удовлетворяли условию, они должны лежать на прямых $y = -2x + b_1$ и $y = -2x + b_1 + 12$

Эти прямые будут пересекать ось Ox в точках $x = \frac{b_1}{2}$ и $x = \frac{b_1}{2} + 6$, т.е. точки их пересечения с осью Ox должны находиться на расстоянии 6.

Всего таких пар прямых - 10, причем на каждой лежит по 3 точки с целыми координатами, лежащих в направлении.

Значит, всего количество пар точек A и B равно $\frac{130}{2} = 65$

Ответ: 65

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) = 0 \end{cases}$$

построим графически
 $((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) = 0$

$$y = ax + 10b \text{ - прямая}$$

решим задачу, когда эта прямая касается двух окружностей, а это возможно только в 2 случаях:

в этих случаях $y = ax + 10b$ проходит через $(-\frac{16}{3}; 0)$

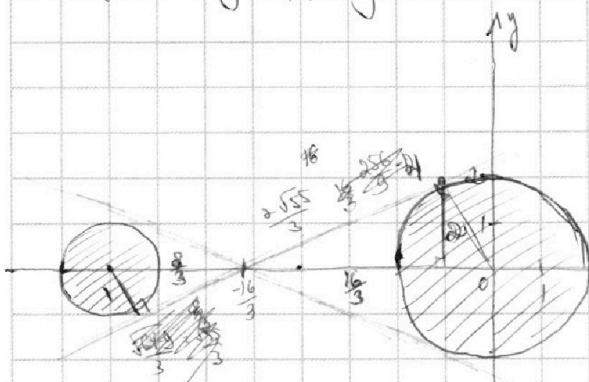
$$x^2 + (ax + 10b)^2 = 4$$

$$(x+8)^2 + (ax + 10b)^2 = 1$$

$$x^2 + 64 + 16x - x^2 = 3$$

$$16x = -67$$

$$x = -\frac{67}{16}$$



~~$$x^2 + a^2x^2 + 10abx - 4 = 0$$~~

~~$$(1+a^2)x^2 + 20abx + 100b^2 - 4 = 0$$~~

~~$$D = 400a^2b^2 - 4(100b^2 - 4)(1+a^2) =$$~~

~~$$= 400a^2b^2 - 4(100b^2 + 100a^2b^2 - 4 - 4a^2) =$$~~

~~$$= -400b^2 + 16 + 16a^2 = 0$$~~

~~$$a^2 + 1 - 25b^2 = 0$$~~

$$(x+8)^2 + (ax + 10b)^2 = 1 = 0$$

$$x^2 + 16x + 64 + a^2x^2 + 100b^2 + 20abx - 1 = 0$$

$$(1+a^2)x^2 + (20ab + 16)x + 63 + 100b^2 = 0$$

~~$$D = 400a^2b^2 + 256 + 640ab + (63 + 100b^2)(1+a^2) =$$~~

~~$$= 400a^2b^2 + 256 + 640ab - 252 - 400a^2b^2 - 400b^2 - 4a^2 =$$~~

~~$$= 640ab + 4 - 400b^2 - 4a^2 = 0$$~~

в этих случаях $y = ax + 10b$ проходит через $(-\frac{16}{3}; 0)$

$$-\frac{16}{3}a = 10b \Rightarrow a = -\frac{30b}{16} = -\frac{15b}{8} \Rightarrow b = -\frac{16}{30}a = -\frac{8}{15}a$$

$$\frac{16}{3}x = 2 \cdot \left(\frac{2\sqrt{55}}{3} + \sqrt{22-4} \right)$$

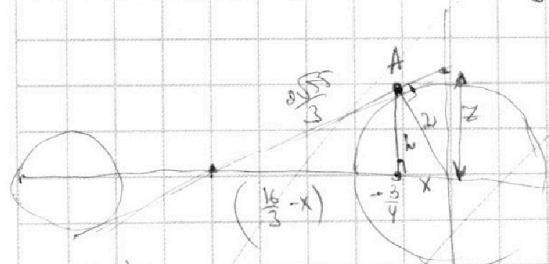
$$\frac{16}{3}x = 2 \cdot \left(\frac{4\sqrt{55}}{9} + 2 + \frac{4}{3}\sqrt{55}\sqrt{22-4} \right)$$

$$16x = 4\sqrt{55} + 9x + 36 + 12\sqrt{55}\sqrt{22-4} + 9x^2 - 12x + 184 + 12\sqrt{55}\sqrt{22-4}$$

$$\frac{\sqrt{55}}{4}x = -\frac{3}{4}a + 10b \Rightarrow \frac{\sqrt{55}}{4}x = -\frac{3}{4}a + 10 \cdot \left(-\frac{8}{15}a \right)$$

$$A(-a, b)$$

$$A\left(-\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{55}}{4}\right)$$



$$x^2 + h^2 = 4$$

$$\frac{256}{9} + x^2 + \frac{32}{3}x + h^2 = \frac{4 \cdot 55}{9}$$

$$4 + 4 - \frac{32}{3}x = 0$$

$$x = \frac{8 \cdot 5}{324} \Rightarrow h = \sqrt{4 - \frac{9}{16}} = \sqrt{\frac{64-9}{16}} = \frac{\sqrt{55}}{4}$$

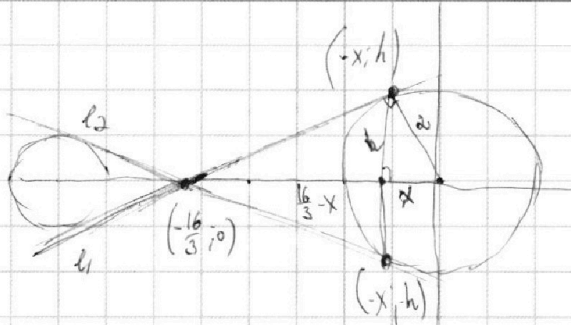
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$h^2 + x^2 = 4$$

$$\frac{4 \cdot 55}{9} = h^2 + \frac{256}{9} + x^2 - \frac{32}{3}x$$

$$8 = \frac{32}{3}x$$

$$x = \frac{24}{32} = \frac{3}{4}$$

$$h = \sqrt{4 - \frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{55}}{4}$$

кр. л.
$$\begin{cases} 0 = -\frac{16}{3}a + 10b \\ \frac{\sqrt{55}}{4} = -\frac{3}{4}a + 10b \end{cases}$$

$$\frac{\sqrt{55}}{4} = \left(-\frac{8}{4} + \frac{16}{3}\right)a$$

$$a = \frac{\sqrt{55}}{4} \cdot \frac{12}{4 \cdot 55} = \frac{3}{\sqrt{55}}$$

кр. л.
$$\begin{cases} a = -\frac{16}{3}a + 10b \\ -\frac{\sqrt{55}}{4} = -\frac{3}{4}a + 10b \end{cases}$$

$$-\frac{\sqrt{55}}{4} = \left(\frac{16}{3} - \frac{3}{4}\right)a$$

$$-\frac{\sqrt{55} \cdot 64}{4} = \frac{55}{12}a$$

$$a = -\frac{\sqrt{55}}{4} \cdot \frac{12}{55} = -\frac{3}{\sqrt{55}}$$

$$a = \pm \frac{3\sqrt{55}}{55}$$

Ответ: $a = \pm \frac{3\sqrt{55}}{55}$

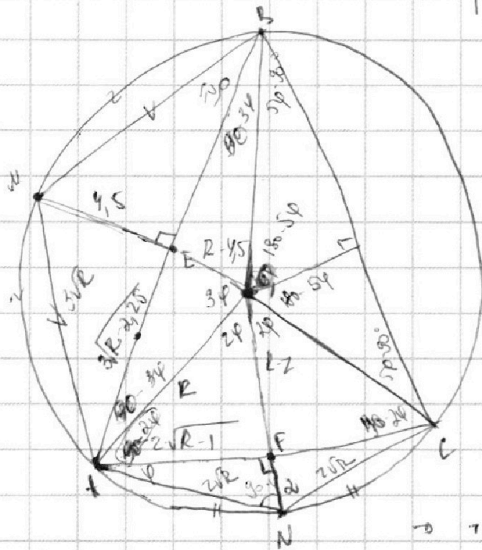
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



равные дуги вписывают равные отрезки

$$\widehat{BM} = \widehat{AM}, (C \notin \widehat{BM}, C \notin \widehat{AM}) \Rightarrow BM = AM \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \triangle AMB - \text{р/б}$$

пусть ME - расстояние от M до AB, $ME \perp AB \Rightarrow$

$\Rightarrow ME$ - высота в р/б $\triangle AMB \Rightarrow ME$ - бис. и мед. \Rightarrow

$$\Rightarrow AE = BE$$

Аналогично $AN = CN \Rightarrow \triangle ANC - \text{р/б}$

NF - расстояние от N до AC, $NF \perp AC \Rightarrow$

$\Rightarrow NF$ - бис. в р/б $\triangle ANC \Rightarrow NF$ - мед. и бис. \Rightarrow

$$\Rightarrow AF = CF$$

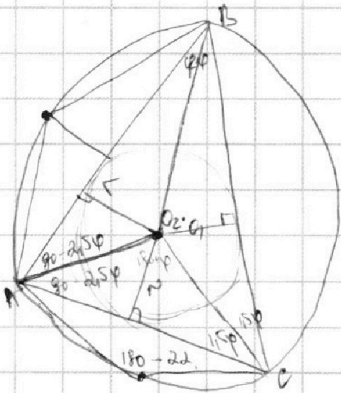
$NF \perp AC, AF = CF$ $\Rightarrow HE, NF$ - сд. перпендикулярны
 $ME \perp AB, AE = BE$ к сторонам AB и AC \Rightarrow

$\Rightarrow O_1$ - центр окр-ти вписанной в $\triangle ABC$

пусть R - радиус окр-ти, тогда $OE = R - 4,5$; $OF = R - 2$, по т. Пифагора в $\triangle OFE$ и $\triangle OFC$
каждый $AF = \sqrt{R^2 - (R-2)^2} = \sqrt{R^2 - R^2 + 4R - 4} = \sqrt{4R - 4} = 2\sqrt{R-1}$; $AE = \sqrt{R^2 - (R-4,5)^2} = \sqrt{R^2 - R^2 + 9R - 20,25} = \sqrt{9R - 20,25}$

$\Rightarrow \sqrt{9R - 20,25} \Rightarrow 3\sqrt{R - 2,25}$. По т. Пифагора в $\triangle AFN$ и $\triangle AEM$ катетов AN и AM.

$$AN = \sqrt{4R - 4 + 4} = 2\sqrt{R}; AM = \sqrt{9R - 20,25 + 20,25} = 3\sqrt{R}$$





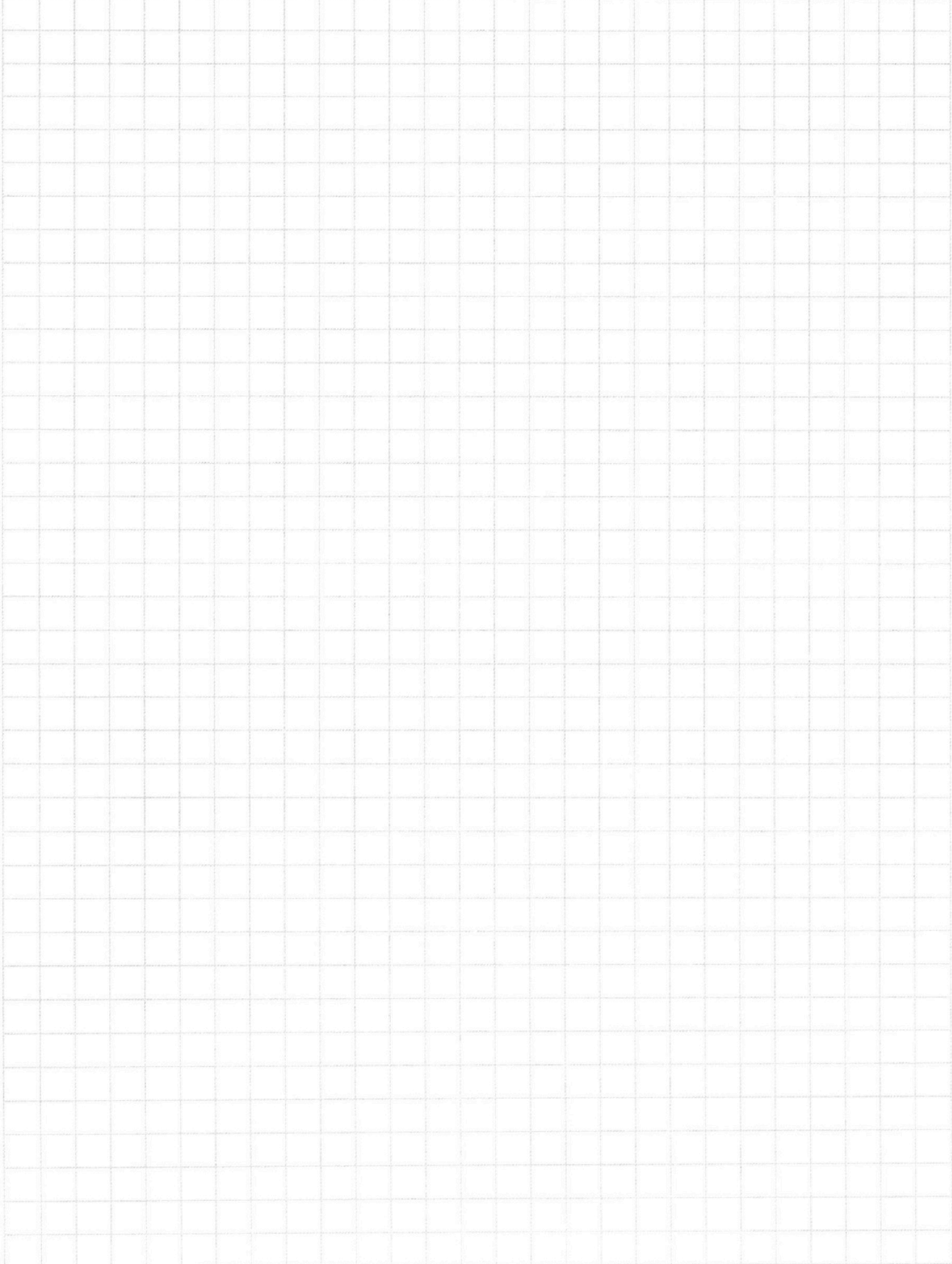
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



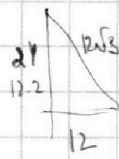
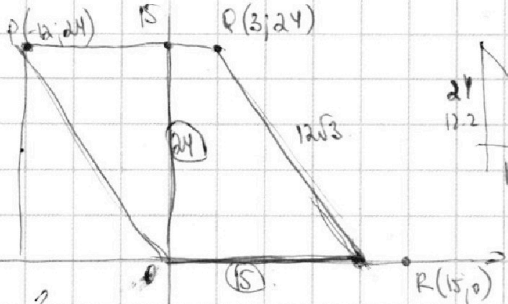
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$1 - \cos 2\varphi = \frac{64x^2}{50}$$

$$\cos 2\varphi = 1 - \frac{64x^2}{50}$$

$$\cos(120 - \varphi) = \sqrt{\frac{1 - \frac{64x^2}{50} + 1}{2}} = \sqrt{1 - \frac{32x^2}{50}}$$

$$14x^2 = 2 + 2 \left(\sqrt{1 - \frac{32x^2}{50}} \cdot \sqrt{(1+x^2)(1+9x^2)} \right)$$

$$7x^2 = 1 + \sqrt{1 - 0,64x^2} \cdot \sqrt{1+x^2} \cdot \sqrt{1+9x^2}$$

$$7x^2 - 1 =$$

$$(7x^2 - 1)^2 = (1 - 0,64x^2)(1+x^2)(1+9x^2)$$

$$(49x^4 - 14x^2 + 1) = (1 + 50x^2 + 9x^4 - 0,64x^2 - 0,64x^2 - 50x^2 - 0,64x^2 + 9x^4)$$

$$64x^2 - 0,64x^2 - 50x^2 - 3x^2 - 964x^2 + 99x^4 = 0$$

$$x^2 - 0,01x^2 - 0,01 \cdot 50x^2 - 0,01 \cdot 99x^2 = 0$$

$$0,99x^2 - 0,5x^2 - 0,99x^2 = 0$$

$$x^2(0,49x^2 + 0,5x^2 - 0,99) = 0$$

$$49x^2 + 99x^2 + 50 - 99 = 0$$

$$x^2 = 2500 + 4 \cdot 99 \cdot 99 = 4(25^2 + 4 \cdot 99^2) = 11$$

$$x = \frac{-50 \pm 4\sqrt{1369}}{98} = \frac{-25 \pm 2\sqrt{1369}}{49} > 0$$

$$ax - y + 10b = 0$$

$$((x-1)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0$$

$$(x-1)(-y)$$

$$0 \leq (x-1) \leq 2$$

$$ax - y + 10b = 0 \text{ на границе } b - 2 \text{ или } a \text{ или } c$$

$$y = ax + 10b$$

$$49 \cdot 50 - 99$$

$$1 \cdot 49 \cdot 99 \cdot 0$$

$$(x-1)(49x + 99) = 0$$

$$-49x - 99x$$

$$ab$$

$$ab = 214710$$

$$bc = 218717$$

$$ac = 220719$$

$$a = 2775 \quad b = 2775$$

$$ab \cdot ac = 237747$$

$$226732$$

$$a = 28415$$

$$c = 212422$$

bc = 218717
ac = 220719
a = 2775
b = 2775
c = 212422

bc = 218717
ac = 220719
a = 2775
b = 2775
c = 212422





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1
- 2
- 3
- 4
- 5
- 6
- 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1} = 2-7x$$

$$\sqrt{2x^2-5x+3} - 2x^2 - 2x - 1 = 2-7x$$

$$\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1} > 0$$

$$2-7x = (2-7x)(\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1})$$

$$(2-7x)(\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1} - 1) = 0$$

$$x = \frac{2}{7}$$

$$\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1} = 1$$

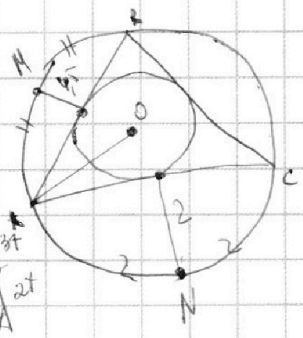
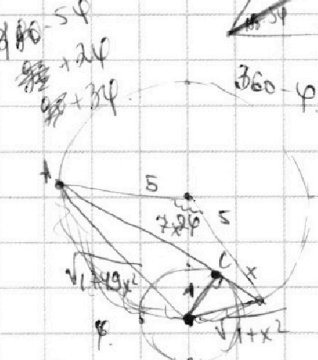
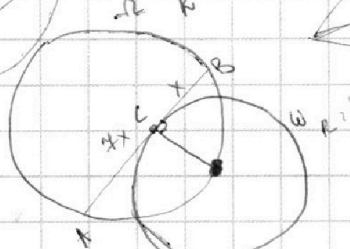
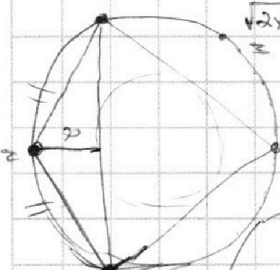
$$2x^2-5x+3 + 2x^2+2x+1 + 2\sqrt{(2x^2-5x+3)(2x^2+2x+1)} = 1$$

$$4x^2 - 3x + 4 + 2\sqrt{\dots} = 1$$

$$\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1} = 1$$

$$\sqrt{2 \cdot 25 + 3 + 1}$$

$$0 + \sqrt{8,5} > 1$$



$$64x^2 = 25 + 25 - 2 \cos \varphi \cdot 25$$

$$64x^2 = 50(1 - \cos \varphi)$$

$$64x^2 = 1 + 49x^2 + 1 + x^2 - 2 \cos(180 - \varphi) \cdot \sqrt{(1 + 49x^2)(1 + x^2)}$$

$$14x^2 = 2 - 2 \cos \varphi$$

$$\cos \varphi = 2 \cos 2\varphi - 1 \Rightarrow \cos \varphi = \sqrt{\frac{\cos 2\varphi + 1}{2}}$$

abc

$$ab: 2^{14} \cdot 7^{10}$$

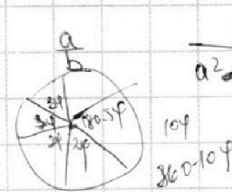
$$bc: 2^{14} \cdot 7^{17}$$

$$ac: 2^{20} \cdot 7^{37}$$

$$ab: 2^{14} \cdot 7^{10} \cdot n$$

$$bc: 2^{14} \cdot 7^{17} \cdot m$$

$$ac: 2^{20} \cdot 7^{37} \cdot k$$



$$a^2 = 6ab + b^2$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2^5 \cdot 4^6 \cdot m^2 k^2$$

$$2^{31} \cdot m^2 k^2$$

$$2^{52} \cdot 7^6 \cdot k^2$$

$$\begin{array}{r} 1381 \\ 5501 \\ 888 \\ \hline 5175 \end{array}$$

$$5018 - 4215 + 1038$$

$$\frac{5093}{1891}$$

$$\begin{array}{r} 5175 \\ 096 \\ \hline 5115 \end{array}$$

$$1681$$

$$525$$

$$\begin{array}{r} 9881 \\ 184 \\ \hline 942 \\ 11x \\ 96 \\ \hline 850 \\ 1891 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Handwritten mathematical work on grid paper. The page contains several diagrams and calculations:

- Top Left:** A diagram of a triangle with vertices $(-1; 2)$, $(3; 2)$, and $(0; 0)$. A line $2x + 5y = 3$ is drawn through it. Calculations include $2x + 5y = 3$ and $2x - 2x + y_2 - y_1 = 12$.
- Top Center:** A line $y = -2x + 20$ is plotted. A point $(0; 24)$ is marked. A circled -12 is written.
- Top Right:** A table with 2 columns and 7 rows:

1	✓	?
2		
3	✓	✓
4	✓	✓
5	✓	✓
6	✓	✓
7	?	
- Middle:** A large diagram showing a circle with a triangle inscribed inside it. The triangle has vertices at $(2; 0)$, $(4; 0)$, and $(0; 2)$. A line $2x(x+1) = 4x^2 - 4x + 2$ is written. A circled 13 is written.
- Bottom Left:** A diagram of a triangle with vertices $(0; 0)$, $(4; 0)$, and $(0; 2)$. Calculations include $2x^2 + y^2 - (2x + y) = 2x^2 - 2x$ and $4x^2 - 5x + 3 = 1 + 2x^2 + 2x + 1 - 2\sqrt{2x^2 + 2x + 1}$.
- Bottom Center:** A diagram of a triangle with vertices $(0; 0)$, $(4; 0)$, and $(0; 2)$. Calculations include $4x^2 - 22x - 3 = 0$ and $2 = 484 + 12 \cdot 41$.
- Bottom Right:** A diagram of a circle with a triangle inscribed inside it. Calculations include $4x^2 - 5x + 3 = 1 + 2x^2 + 2x + 1 - 2\sqrt{2x^2 + 2x + 1}$ and $4x^2 - 5x + 3 = 1 + 2x^2 + 2x + 1 - 2\sqrt{2x^2 + 2x + 1}$.