



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 14



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $3^{14}7^{13}$, bc делится на $3^{19}7^{17}$, ac делится на $3^{23}7^{42}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-9ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2-5x+6} - \sqrt{3x^2+x+1} = 5-6x.$$

4. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , диаметр AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC = 1$ и $BC = 25$. Найдите длину общей касательной к окружностям ω и Ω .

5. [4 балла] Ненулевые действительные числа x, y, z удовлетворяют равенствам

$$5x - y = 3z \quad \text{и} \quad \frac{8}{x} + \frac{1}{y} = \frac{15}{z}.$$

Найдите наименьшее возможное значение выражения $\frac{25x^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2}$.

6. [5 баллов] Из пункта A в пункт B выезжают одновременно велосипедист и мотоциклист. Оба они движутся с постоянной скоростью, и мотоциклист прибывает в пункт B на 1 час раньше велосипедиста. Если бы велосипедист ехал со своей скоростью в течение того времени, что понадобилось мотоциклисту на дорогу от A к B , а мотоциклист – в течение того времени, что понадобилось велосипедисту на этот путь, то мотоциклист проехал бы на 49 километров больше. Если бы скорость каждого из них возросла на 7 км/ч, то велосипедист приехал бы в B на 36 минут позже велосипедиста. Найдите расстояние между A и B .

7. [6 баллов] Вписанная окружность ω прямоугольного треугольника ABC с прямым углом B касается его сторон CA, AB, BC в точках D, E, F соответственно. Луч ED пересекает прямую, перпендикулярную BC , проходящую через вершину C , в точке Y ; X – вторая точка пересечения прямой FY с окружностью ω . Известно, что $EX = \sqrt{2}XY$. Найдите отношение $AD : DC$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 1,
Пример:

Оценка:

$$ab: \overset{14}{3} \cdot \overset{13}{7} \quad bc: \overset{19}{3} \cdot \overset{17}{7} \quad ac: \overset{23}{3} \cdot \overset{42}{7} \Rightarrow$$

$$abc: \overset{28}{3} \cdot \overset{36}{7} \Rightarrow abc: \overset{28}{3} \cdot \overset{36}{7} \Rightarrow$$

$$abc \geq \overset{28}{3} \cdot \overset{36}{7}, a, b, c \in \mathbb{N}. \text{ Но } ac: \overset{42}{7} \Rightarrow \Rightarrow abc: \overset{42}{7}$$

Пример:

$$a = \overset{9}{3} \cdot \overset{21}{7}$$
$$b = \overset{5}{3} \cdot \overset{0}{7}$$
$$c = \overset{14}{3} \cdot \overset{21}{7}$$

$$a = \overset{9}{3} \cdot \overset{21}{7}$$

$$b = \overset{5}{3} \cdot \overset{0}{7}$$

$$c = \overset{14}{3} \cdot \overset{21}{7}$$

$$abc = \overset{42}{7} \cdot \overset{28}{3}$$

Легко видеть, что условие выполняется.

$$\text{Ответ: } \overset{42}{7} \cdot \overset{28}{3}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$(a, b) = 1$$

$$\exists \text{ цел } a, b : m, \quad a^2 - 9ab + b^2 : m, \quad m \neq 1.$$

$$a \equiv -b \pmod{m} \quad (a, b) = 1 \Rightarrow (a, m) = 1 \quad (b, m) = 1.$$

$$a^2 - 9ab + b^2 = (a-b)^2 - 7ab.$$

$$a-b \equiv -2b \pmod{m} \Rightarrow (a-b)^2 \equiv 4b^2 \pmod{m}$$

$$a^2 - 9ab + b^2 : m \Rightarrow 4b^2 \equiv 7ab \pmod{m} \quad (b, m) = 1 \Rightarrow$$

$$4b \equiv 7a \pmod{m} \quad a \equiv -b \pmod{m} \Rightarrow -4a \equiv 7a \pmod{m} \Rightarrow 11a \equiv 0 \pmod{m}, \text{ Но}$$

$$(m, a) = 1 \Rightarrow 11 : m \Rightarrow m = 11, \text{ и это верно}$$

~~для \forall любых кат. чисел a и b , что $a+b : 11$.~~

$$a=10 \quad b=1 \text{ подходит.}$$

Ответ: 11.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пример:

$$x = \frac{5}{6}$$

$$\text{Пусть } x = \frac{5}{6} \quad 3x^2 - 5x + 6 = 3x^2 + x + 1 \Rightarrow$$

$$1.4 = 0,$$

$$5 - 6x = 5 - 5 = 0 \Rightarrow 1.4 = 0 \Rightarrow 1.4 = 1.4, \quad \checkmark$$

Ответ:

~~5/6~~

~~Решение $x = \frac{5}{6}$~~

Решение

$$f_1(x) = 3x^2 - 5x + 6 \quad f_2(x) = 3x^2 + x + 1,$$

~~Решение~~

$f_1(x) > 1$ и $f_2(x) > 1 \quad \forall x$, так как обе дискриминанты < 0 .

$f_1(x) - f_2(x) = 5 - 6x = 1.4$, а так как в левой части

у нас $\sqrt{f_1(x)} - \sqrt{f_2(x)}$, то так как $f_1(x) > 1$ и $f_2(x) > 1$,

то $\sqrt{f_1(x)} - \sqrt{f_2(x)} < f_1(x) - f_2(x) \quad \forall x$, кроме случая

$f_1(x) - f_2(x) = 0$, а в нем, очевидно следует, что $x = \frac{5}{6}$.

Ответ: $x = \frac{5}{6}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

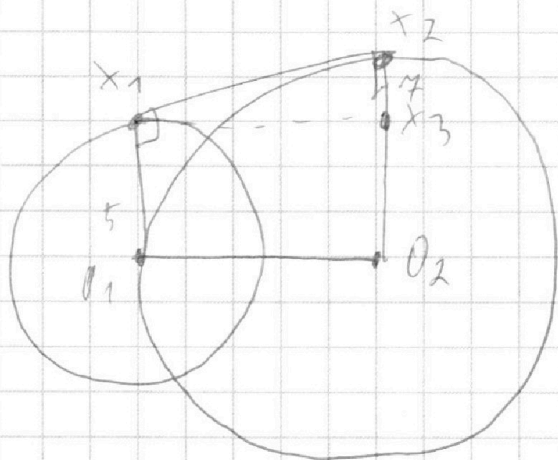


Рисунок. X_1X_2 - одна кас. X_3 касаясь, что

~~то~~ $X_1X_3 \parallel O_1O_2$ $X_3 \in O_2X_2$

$O_1X_1 \parallel O_2X_3 \Rightarrow O_1X_1 = O_2X_3 = 5 \Rightarrow X_3X_2 = 13 - 5 =$
 $= 7$ $O_1O_2 = 13$, так как $O_1 \in \Omega \Rightarrow$

$$X_1X_3 = 13$$

$$X_1X_3^2 = X_2X_3^2 + X_1X_2^2 = 13^2 = 7^2 + X_1X_2^2 \Rightarrow$$

$$X_1X_2^2 = 13^2 - 7^2 = 20 \cdot 6 = 120 \Rightarrow \text{то } X_1X_2 = \sqrt{120},$$

Ответ: $\sqrt{120}$.

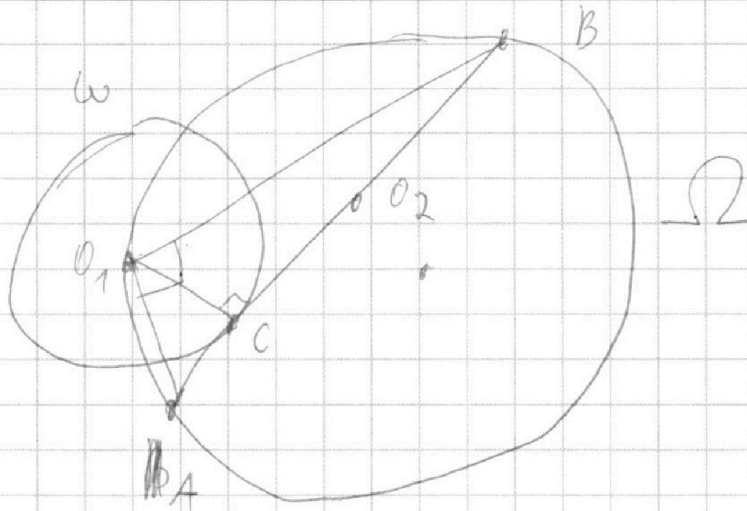
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



O_1 - центр ω O_2 - центр Ω ,

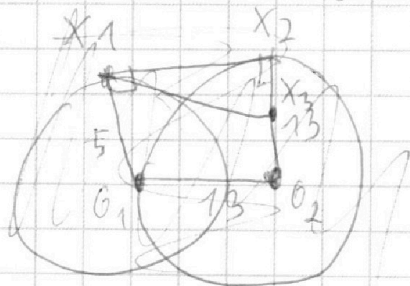
AB - кас $\omega \Rightarrow O_1C \perp AB$ $AB = 1 + 25 = 26$,

$\angle A O_1 B = 90$ ($A, O_1, B \in \Omega$ $O_2 \in AB$), \Rightarrow

$$O_1C = \sqrt{1 \cdot 25} = \sqrt{AC \cdot CB} = 5,$$

r - радиусе ω , R - радиусе Ω .

$$r = 5, R = \frac{26}{2} = 13.$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пр. е. для $x=2$, $z=3$ $y=1$ мы ~~проверили~~, проверили,
проверили для $x=2$, $z=\frac{25}{6}$,

$$y = 5x - 3z = 10 - 12,5 = -2,5,$$

~~Ответ~~

$$\frac{25x^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2} = 100 - \frac{25}{4} - \frac{625}{4}$$

~~$\frac{25}{4} + 3 \cdot \frac{625}{4}$~~ $\frac{25}{4} + 3 \cdot \frac{625}{4} < 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow < 0$, а знаменатель > 0 и минимален.

Ответ: $100 - \frac{25}{4} - \frac{625}{4}$

$$\frac{25}{4} + 3 \cdot \frac{625}{4}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что числа $x=2, y=7, z=3$ удовл. усл.

А при них знак. выраж. = 9.

Заметим, что в Δ \forall условиях, ~~и в выражении~~
~~назовем его $P(x,y,z)$~~ , сократится однородность,
а ст. выражения равна 0, т.е. можно дел.

Нам, ~~надо~~ что $x=2$.

$$5x - y = 3z \quad y = 5x - 3z.$$

$$\frac{8}{x} + \frac{1}{y} = \frac{15}{z} \Rightarrow 8yz + z = 15xy \Rightarrow$$

$$8(5x - 3z)z + xz = 15x(5x - 3z)$$

$$41xz - 24z^2 = 45x^2 - 45xz$$

$$86xz - 24z^2 = 45x^2 = 45 \quad (x=2)$$

$$86z - 24z^2 = 45$$

$$24z^2 - 86z + 45 = 0$$

$$192z - 24z^2 = 300.$$

$$24z^2 - 192z + 300 = 0$$

$z_1 = 3$ подходит. (каким-то образом)

$$z_1 \cdot z_2 = \frac{c}{a} = \frac{300}{24} = 12,5.$$

$$z_2 = \frac{12,5}{3} = \frac{25}{6}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пусть v_1 - скорость велосипеда, S - длина дороги,
 v_2 - скорость мотоциклиста,

~~$S = v_1 t_1$~~ $S = v$ км, $v = v \frac{\text{км}}{\text{ч}} \Rightarrow$

$$\frac{S}{v_1} - 1 = \frac{S}{v_2}$$

$$\frac{S}{v_1 + 7} - \frac{S}{5} = \frac{S}{v_2 + 7}$$

$$\frac{v_1}{v_2} S + 49 = S - \text{из 2-ого условия. } \frac{v_1}{v_2} S - \text{проехал велос.}$$

S - проехал мотоциклист, 49 км - разница.

Итого 3 уравнения с 3 неизвестными. Ответ известен!

$$\frac{S}{v_1} - 1 = \frac{S}{v_2} \Rightarrow S v_2 - v_1 v_2 = S v_1$$

$$S(v_2 - v_1) = v_1 v_2$$

$$S = \frac{v_1 v_2}{v_2 - v_1}$$

$$\frac{v_1}{v_2} S + 49 = S \Rightarrow \frac{v_2 - v_1}{v_2} S = 49 \Rightarrow S = \frac{49 v_2}{v_2 - v_1}$$

$$= \frac{v_1 v_2}{v_2 - v_1} \Rightarrow v_1 = 49$$

С8.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$v_1 = 4g$$

$$\frac{S}{v_1} - 1 = \frac{S}{v_2} \quad ; \quad \frac{S}{v_1 + 7} - \frac{3}{5} = \frac{S}{v_2 + 7}$$

$$\frac{v_1}{v_2} S + 4g = S$$

~~$$\frac{4g}{v_2} S + 4g = S \quad ; \quad S \sqrt{2} - v_1 v_2 =$$~~

~~$$\frac{S}{4g} - 1 = \frac{S}{v_2} \quad ; \quad \frac{S}{56} - \frac{3}{5} = \frac{S}{v_2 + 7}$$~~

$$v_2 S - 4g v_2 = 4g S \quad ; \quad v_2 S + 7S - \frac{3}{5} \cdot 56 \cdot 7 - \frac{3}{5} \cdot 56 \cdot \sqrt{2}$$
$$= 56 S$$

$$v_2 S - 4g v_2 = 4g S$$

$$v_2 S + 7S - \frac{3}{5} \cdot 56 \cdot 7 - \frac{3}{5} \cdot 56 \cdot \sqrt{2} = 56 S$$

$$v_2 S - 4g v_2 = 4g S = v_2 S - \frac{3}{5} \cdot 56 \cdot 7 - \frac{3}{5} \cdot 56 \cdot \sqrt{2}$$

$$4g \sqrt{2} = \frac{3}{5} \cdot 56 \sqrt{2} + \frac{3 \cdot 56 \cdot 7}{5} \Rightarrow \sqrt{2} \neq$$

$$245 \sqrt{2} = 368 \sqrt{2} + 1176$$

$$77 \sqrt{2} = 1176$$

$$\sqrt{2} = \frac{1176}{77}$$

$$S = \frac{v_1 v_2}{v_1 + v_2} \quad ; \quad v_1 = 4g \quad ; \quad v_2 = \frac{1176}{77}$$

с.г.

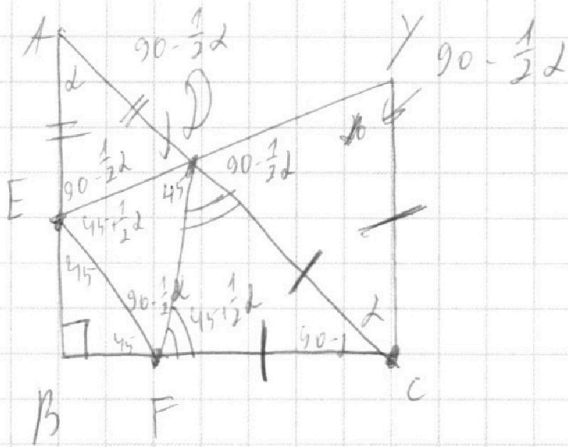
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$FC = CD = CY \quad FD = D'Y \cdot \sqrt{2}$$

$$\angle FED = 90 - \frac{1}{2}\alpha \quad \angle FED = 45 + \frac{1}{2}\alpha \quad \angle EDF = 45^\circ$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

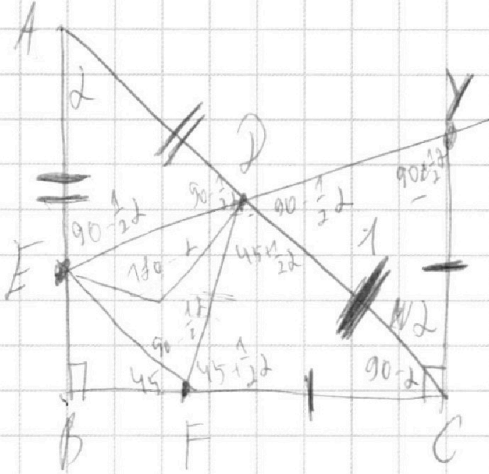
- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



черновик, задача Беловак,

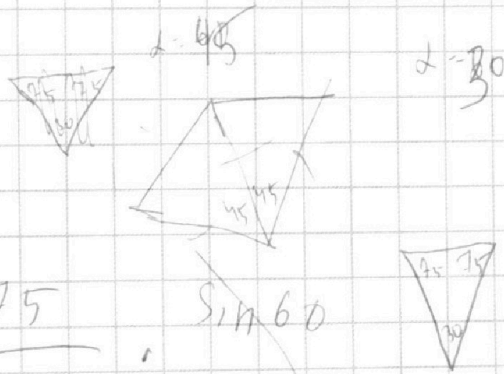


~~$\sin \alpha$~~

$$\frac{\sin 90-\alpha}{\sin \alpha} \cdot \frac{\sin 90-\alpha}{\sin 45+\frac{1}{2}\alpha} = \sqrt{2}$$

$$\frac{\sin 90-\alpha}{\sin 45+\frac{1}{2}\alpha} \cdot \frac{\sin 90-\frac{1}{2}\alpha}{\sin \alpha} = \sqrt{2}$$

$\alpha = 30$



$$\frac{\sin 75}{\sin 30} \cdot \frac{\sin 60}{\sin 60}$$

$$\frac{\sqrt{2} + 1}{2} / \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1 + \sqrt{3}}{3}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



v_1 - велосипедист $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$

S - путь, км

v_2 - мотоциклист.

$$S = \frac{49 v_2}{v_2 - v_1}$$

$$\frac{S}{v_1} - 1 = \frac{S}{v_2}$$

$$v_2 S - v_1 v_2 = v_1 S$$

$$\frac{S}{v_1 + 7} - \frac{3}{5} = \frac{S}{v_2 + 7}$$

$$v_2 (S - v_1) = v_1 \cdot S$$

$$\frac{v_1}{v_2} S + 49 = \frac{S}{v_2}$$

$$\frac{v_2 - v_1}{v_2} S = 49$$

$$\frac{S}{v_2} = \frac{S}{v_1} - 1$$

$$S = \frac{49 v_2}{v_2 - v_1}$$

$$\left(\frac{S}{v_1} - 1 \right) (v_2 - v_1) = 49$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



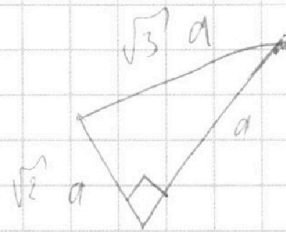
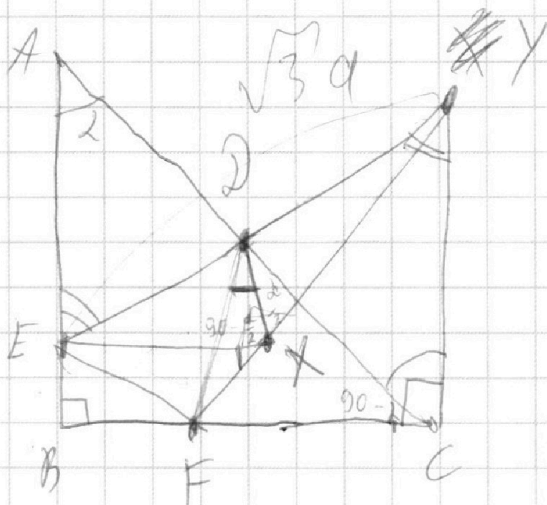
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{S}{v_1} - 1 = \sqrt{2}$$

$$FX = \sqrt{2} \cdot XY$$

$$\frac{S}{v_1 + 7} - \frac{7}{5} = \sqrt{2} - 4$$

$$\frac{v_1}{v_2} - \frac{7}{5} = \frac{S}{v_2 + 7}$$



$$\frac{EX}{XY} = \sqrt{2}$$

$$\frac{AD}{DC} = \frac{ED}{DY} \quad \frac{ED}{DY} (?)$$

$$YD \cdot YE = YX \cdot YF$$

$$\frac{DY}{YF} = \frac{YX}{YE} = \frac{DY}{YF}$$

$$\frac{EX}{XY} = \frac{FD}{DY} = \sqrt{2} \cdot \frac{FD}{FD} = \frac{ED}{DY} = \frac{ED}{FD} \cdot \sqrt{2}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{3x^2 - 5x + 6} - \sqrt{3x^2 + 2x + 1} = 5 - 6x$$

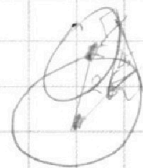
$$25 - 4 \cdot 5 \cdot 3$$

$$(2x - 1)^2 - x^2 + 2x$$

$$\sqrt{3x^2 - 5x + 6} = \sqrt{3x^2 + 2x + 1}$$

$$6x = 5$$

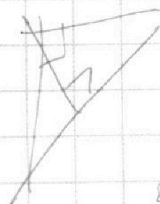
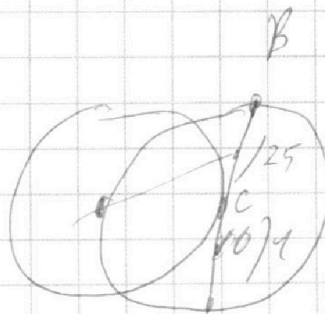
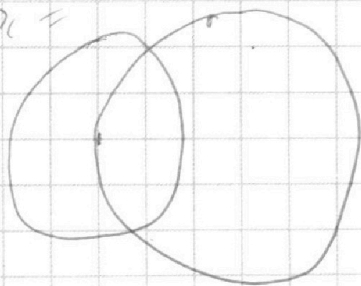
$$x = \frac{5}{6}$$



$$\sqrt{3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 - \frac{25}{6} + 6} - \sqrt{\dots}$$

$$1 + x^2 + x^2 + 25^2 = 26^2$$

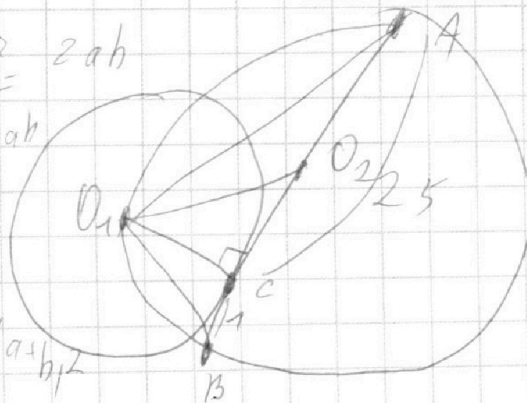
$$2x^2 =$$



$$2x^2 = 2ab$$

$$x^2 = ab$$

$$a^2 + 2x^2 + b^2 = (a+b)^2$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$5x - y = 3z \quad \frac{x}{y} = \frac{1}{5} = \frac{15}{z}$$

$$\begin{array}{r} 25x^2 - 9z^2 \\ \hline y^2 + 3z^2 \end{array}$$

$$x = 2 \quad y = 1 \quad z = 3$$

$$\frac{100 - 1 - 9}{1 + 9} = 9$$

$\sqrt{1}$ $\sqrt{9}$

$$\frac{x}{y} = \frac{1}{5} = \frac{15}{z}$$

$\sqrt{2}$

$$8yz + xz = 15xy$$

$$21 \cdot 56$$

$$5x - y = 3z$$

$$1120 - 56 = 1176$$

$$y = 5x - 3z$$

$$8(5x - 3z)z + xz = 15x(5x - 3z)$$

$$40xz - 24z^2 + xz = 75x^2 - 45xz$$

$$86xz - 24z^2 = 75x^2$$

$$x = 1$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

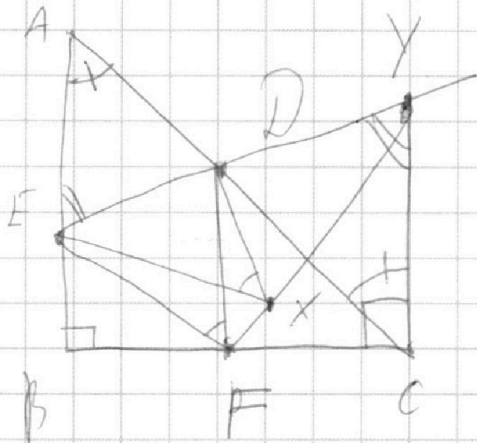
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

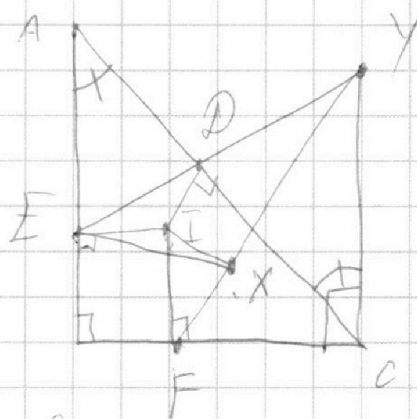


Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

н 7.



$EDXF$ - впис.



$$EX = \sqrt{2} \times Y$$

$$\frac{AD}{DC} = ?$$

$$\frac{AD}{DC} = \frac{ED}{DY}$$

н 3.

$$\sqrt{3x^2 - 5x + 6} - \sqrt{3x^2 + x + 1} = 5 - 6x$$

~~$$3x^2 - 5x + 6 - 3x^2 - x - 1$$~~

$$5 - 6x$$

$$3x^2 = 5x + 6 + 3x^2 + x + 1 - 2(5 - 6x)$$

2 -

