



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [4 балла] Натуральные числа  $a$ ,  $b$ ,  $c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^7 3^{11} 5^{14}$ ,  $bc$  делится на  $2^{13} 3^{15} 5^{18}$ ,  $ac$  делится на  $2^{14} 3^{17} 5^{43}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $AC$  в точке  $A$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $E$ , а катет  $BC$  – в точке  $F$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AB : BD = 1,3$ . Найдите отношение площади треугольника  $ACD$  к площади треугольника  $CEF$ .
3. [4 балла] Решите уравнение  $5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$ .
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4, \quad \text{и} \quad \log_7^4 y + 6 \log_y 7 = \log_{y^2} (7^5) - 4.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0;0)$ ,  $P(-17;68)$ ,  $Q(2;68)$  и  $R(19;0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно на границе) и таких, что  $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$ .
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 60,  $SA = BC = 10$ .
  - а) Найдите произведение длин медиан  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$ .
  - б) Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 3$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 4.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Так как  $ab: 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14}$   $bc: 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18}$   $ac: 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43}$ , то  
перемножив их, получаем  $(abc)^2: 2^{34} \cdot 3^{43} \cdot 5^{75}$ .

Так как  $(abc)^2$  в квадрате имеем только четные  
степени степенями, то  $(abc)^2$  делится хотя  
бы на  $3^{44}$ . Так как  $(bc): ac: 5^{43}$ , то  $(abc)^2: 5^{86}$ .

Значит  $(abc)^2: 2^{34} \cdot 3^{44} \cdot 5^{86}$ , тогда  $(abc)^2 \geq 2^{34} \cdot 3^{44} \cdot 5^{86} \Rightarrow$   
 $\Rightarrow abc \geq 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$ . Если взять числа  $a=2^4 \cdot 3^7 \cdot 5^{20}$

$b=2^3 \cdot 3^4$   $c=2^{10} \cdot 3^{11} \cdot 5^{23}$ , то их произведение равно

$2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$ , а  $ab: 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{20} > 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14}$   $bc: 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{23} > 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18}$

$ac: 2^{14} \cdot 3^{18} \cdot 5^{43} > 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43}$ . Тогда наименьшее возможное  
значение произведения  $abc$  — это  $2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$ .

Ответ:  $2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

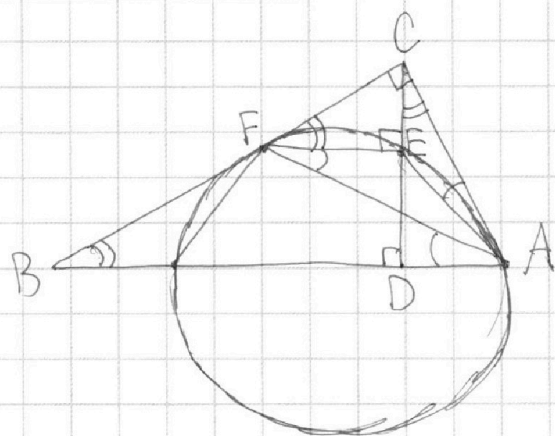
Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Так как  $\frac{AB}{BD} = \frac{13}{10} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{BD}{AD} = \frac{10}{3}$ . Пусть

$BD = 10x$  и  $AD = 3x$ .

Так как  $\angle C = 90^\circ$ , а  $CD$  — высота, то  $CD^2 = BD \cdot AD =$   
 $= 30x^2 \Rightarrow CD = x\sqrt{30}$ .

Так как окружность касается  $AC$  в т.  $A$ , то  $\angle EAC = \angle EFA$ . Так как  $FE \parallel AB$ , то  $\angle EFA = \angle FAB$ .

$\angle CBA = 90^\circ - \angle BCD = 90^\circ - (90^\circ - \angle ACD) = \angle ACD$ .

Значит  $\triangle AEC \sim \triangle AFB$  по двум углам. Тогда

$\frac{EC}{BF} = \frac{AC}{AB}$ .  $AB = BD + AD = 13x$ .  $AC = \sqrt{CD^2 + AD^2} =$

$= x\sqrt{39}$ . Пусть  $EC = y$ . Тогда  $BF = \frac{y \cdot AB}{AC} = \frac{y \cdot 13}{\sqrt{39}}$ .

Так как  $FE \parallel BA \Rightarrow \angle CFE = \angle CBA = \angle ACD \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle CEF \sim \triangle ADC$  по двум углам. Тогда  $\frac{FC}{EC} = \frac{AC}{AD} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{\sqrt{10^2 + 30^2}}{y} = \frac{y \cdot 13}{\sqrt{39}} = \frac{\sqrt{39}}{3} \Rightarrow 2y\sqrt{39} = 3\sqrt{130} \Rightarrow y = \frac{3\sqrt{130}}{2\sqrt{39}}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



1

2

3

4

5

6

7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Коэффициент подобия  $\triangle ECF$  и  $\triangle DAC = \frac{AD}{EC} = \frac{3 \cdot \sqrt{39}}{3 \cdot \sqrt{180}}$   
 $= \frac{\sqrt{39}}{\sqrt{180}}$ . Отношение площадей этих треугольни-  
ков равен коэффициенту подобия в квадрате, то

есть  $\frac{4 \cdot 39}{180} = \frac{6}{5}$

Ответ:  $\frac{6}{5}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$\text{ОДЗ: м.к. } 0 \leq \arccos(x) \leq \pi \Rightarrow 0 \leq 5 \arccos(x) \leq 5\pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 \leq \frac{3\pi}{2} + x \leq 5\pi \Rightarrow -\frac{3\pi}{2} \leq x \leq \frac{7\pi}{2}$$

$$5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x \Rightarrow \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin x = \cos\left(\frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{10} - \frac{x}{5}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{5} - \frac{x}{5}\right)$$

$$\sin x - \sin\left(\frac{\pi}{5} - \frac{x}{5}\right) = 0 \Rightarrow 2 \sin\left(\frac{6x - \pi}{10}\right) \cos\left(\frac{4x + \pi}{10}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin\left(\frac{6x - \pi}{10}\right) = 0 \\ \cos\left(\frac{4x + \pi}{10}\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + \frac{5\pi k}{3} \\ x = \pi + \frac{5\pi k}{2} \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$-\frac{3\pi}{2} \leq \frac{\pi}{6} + \frac{5\pi k}{3} \leq \frac{7\pi}{2} \quad | \cdot \frac{6}{\pi}; -9 \leq 1 + 10k \leq 21 \quad | -1;$$

$$-10 \leq 10k \leq 20 \quad | :10; -1 \leq k \leq 2 \Rightarrow x = -\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{6};$$

$$\frac{11\pi}{6}; \frac{21\pi}{6}.$$

$$-\frac{3\pi}{2} \leq \pi + \frac{5\pi k}{2} \leq \frac{7\pi}{2} \quad | \cdot \frac{2}{\pi}; -3 \leq 2 + 5k \leq 7 \quad | -2;$$

$$-5 \leq 5k \leq 5 \quad | :5; -1 \leq k \leq 1 \Rightarrow x = -\frac{3\pi}{2}; \pi; \frac{7\pi}{2}.$$

$$\text{Ответ: } x = -\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{6}; \pi; \frac{11\pi}{6}; \frac{7\pi}{2}.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

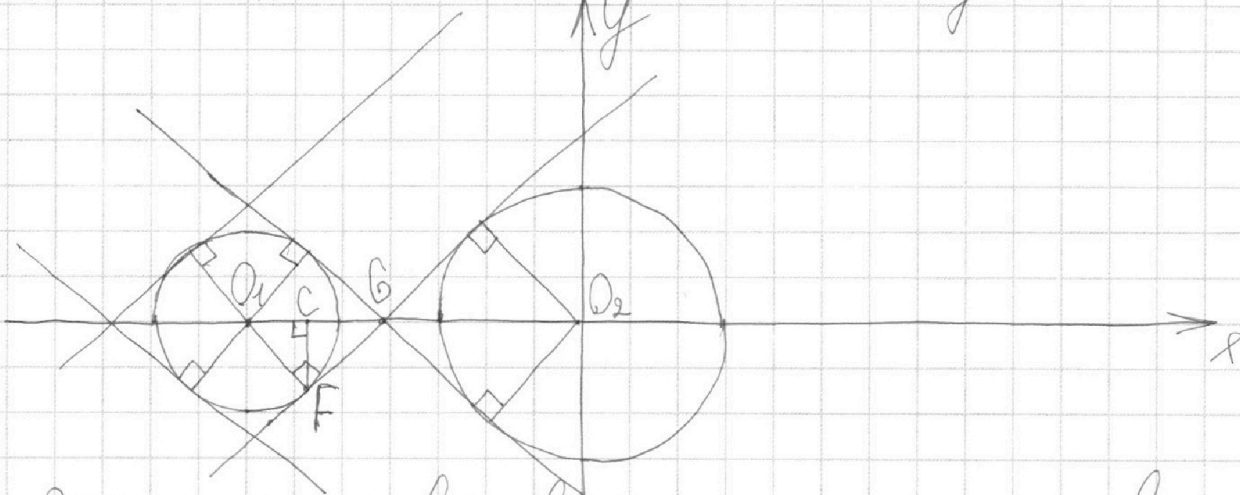
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0 \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

$$x^2 + 14x + y^2 + 45 = 0 \Rightarrow x^2 + 14x + 49 + y^2 = 2^2 = (x+7)^2 + y^2 = 2^2$$

$$x^2 + y^2 - 9 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = 3^2. \text{ Изобразим две окружности}$$

с радиусами 2, 3 и центрами  $(-7, 0), (0, 0)$  соответственно на плоскости  $Oxy$



Это множество является решением второго уравнения системы. Если  $a=0$ , то для решения первого уравнения  $x=7b$ , но можно взять любой  $y$ . Тогда множество решений первого уравнения — это прямая параллельная оси ординат, и с множеством решений второго уравнения будет иметь не более двух пересечений. Теперь

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$a \neq 0$ . Тогда можем переписать первое уравнение как  $y = -\frac{x}{3a} + \frac{7b}{3a}$ . Это линейная функция. От  $a$  зависит <sup>старший</sup> коэффициент, а от  $b$  зависит значение  $b$  т.  $x_0 = 0$ .

Если  $-\frac{1}{3a} \in (-\infty; -\frac{5\sqrt{6}}{12}] \cup [\frac{5\sqrt{6}}{12}; \infty)$ , то прямая

$y = -\frac{x}{3a} + \frac{7b}{3a}$  будет иметь максимум две точки

пересечения с окружностями. Либо касается изо

обозно, либо пересекает одну из них в двух

точках, а другую не пересекает. Но если

$-\frac{1}{3a} \in (-\frac{5\sqrt{6}}{12}; \frac{5\sqrt{6}}{12})$  и прямая  $\{0\}$ , то найдется

такое  $b$  при котором прямая  $y = -\frac{x}{3a} + \frac{7b}{3a}$

будет иметь по два пересечения с каждой

окружностью. Отметим центры  $(-7, 0)$   $(0, 0)$

как  $O_1, O_2$  соответственно. Нарисуем общую

касательную, которая пересекает  $O_2$  в т.  $B$ , а

окружность с центр.  $O_1$  касается в точке  $F$ ,

опустим высоту из точки  $F$  на  $O_2$  с осно

ванием  $C$ .  $O_1 O_2 = 7$ .  $\frac{O_1 B}{B O_2} = \frac{2}{3} \Rightarrow O_1 B = \frac{14}{5}$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$O_1 C = t. \Rightarrow t \left( \frac{14}{5} - t \right) = CF^2 \Rightarrow 2 \left( \frac{14}{5} - t \right) \in t^2 = O_1 F^2 = 4 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow t = \frac{10}{7}; CF = \sqrt{\frac{10}{7} \left( \frac{14}{5} - \frac{10}{7} \right)} = \frac{4\sqrt{6}}{7}; O_1 C = \frac{14}{5} - t =$$
$$= \frac{14}{5} - \frac{10}{7} = \frac{48}{35}. \text{ Тогда угол наклона этой общей}$$

касательной будет равен  $\frac{5\sqrt{6}}{12}$ . Теперь нарисуй-  
ем симметричную прямую этой касательной  
относительно  $Ox$ , она тоже будет общей  
касательной этим окружностям. и на-  
клон её будет равен  $-\frac{5\sqrt{6}}{12}$ .

Получается, что  $-\frac{5\sqrt{6}}{12} < -\frac{1}{3a} < 0$  и  $0 < -\frac{1}{3a} <$

$$< \frac{5\sqrt{6}}{12} \Rightarrow \left( -\frac{2\sqrt{6}}{15} < a < 0 \right); \frac{2\sqrt{6}}{15} < a; -\frac{2\sqrt{6}}{15} > a$$

$$\text{Ответ: } a \in \left( -\infty; -\frac{2\sqrt{6}}{15} \right) \cup \left( \frac{2\sqrt{6}}{15}; \infty \right)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \log_7^4(6x) - 2\log_7^2 7 = \log_7^2 343 - 4 \\ \log_7^4 y + 6\log_7 y - 7 = \log_7^2(7^5) - 4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \log_7^4(6x) - \frac{2}{\log_7(6x)} = \frac{3}{2\log_7(6x)} - 4 \quad | \cdot 2\log_7(6x) \\ \log_7^4 y + \frac{6}{\log_7 y} = \frac{5}{2\log_7 y} - 4 \quad | \cdot 2\log_7 y \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\log_7^5(6x) + 8\log_7(6x) - 7 = 0 & \text{Сложим данные} \\ 2\log_7^5 y + 8\log_7 y - 7 = 0 & \text{уравнения} \end{cases}$$

$$(\log_7^5(6x) + \log_7^5 y) + 4(\log_7(6x) + \log_7 y) = 0$$

Каждое из слагаемых в скобках делится на  $(\log_7(6x) + \log_7 y)$ . Тогда этот множитель может равняться нулю.

$$\log_7(6xy) = 0 \Rightarrow 6xy = 1 \Rightarrow xy = \frac{1}{6}$$

Так как  $-\infty < \log_7 6x, \log_7 y < \infty$  и уравнения, которые мы сложим, пятой степени, то они обязательно будут иметь **два** или **один** корень. Так как производные этих уравнений  $10\log_7^4(6x) + 8$ ,  $10\log_7^4 y + 8$  всегда положительны, то каждое из

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

уравнения

~~них~~ имеет по одному корню. Если у  
уравнения  $2\log_7^5(vx) + 8\log_7^2(vx) + 7 = 0$  корень  
равен  $\log_7^5(vx) = t$ , то для второго урав-  
нения  $2\log_7^5 y + 8\log_7^2 y + 7$  подойдет корень  
 $\log_7^5 y = -t$  и он будет единственным.

Сумма этих корней как раз равна нулю

Значит  $\log_7^5(vx) + \log_7^5 y = \log_7^5(vxy) = 0 \Rightarrow vxy = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow xy = \frac{1}{6}$$

Ответ:  $xy = \frac{1}{6}$



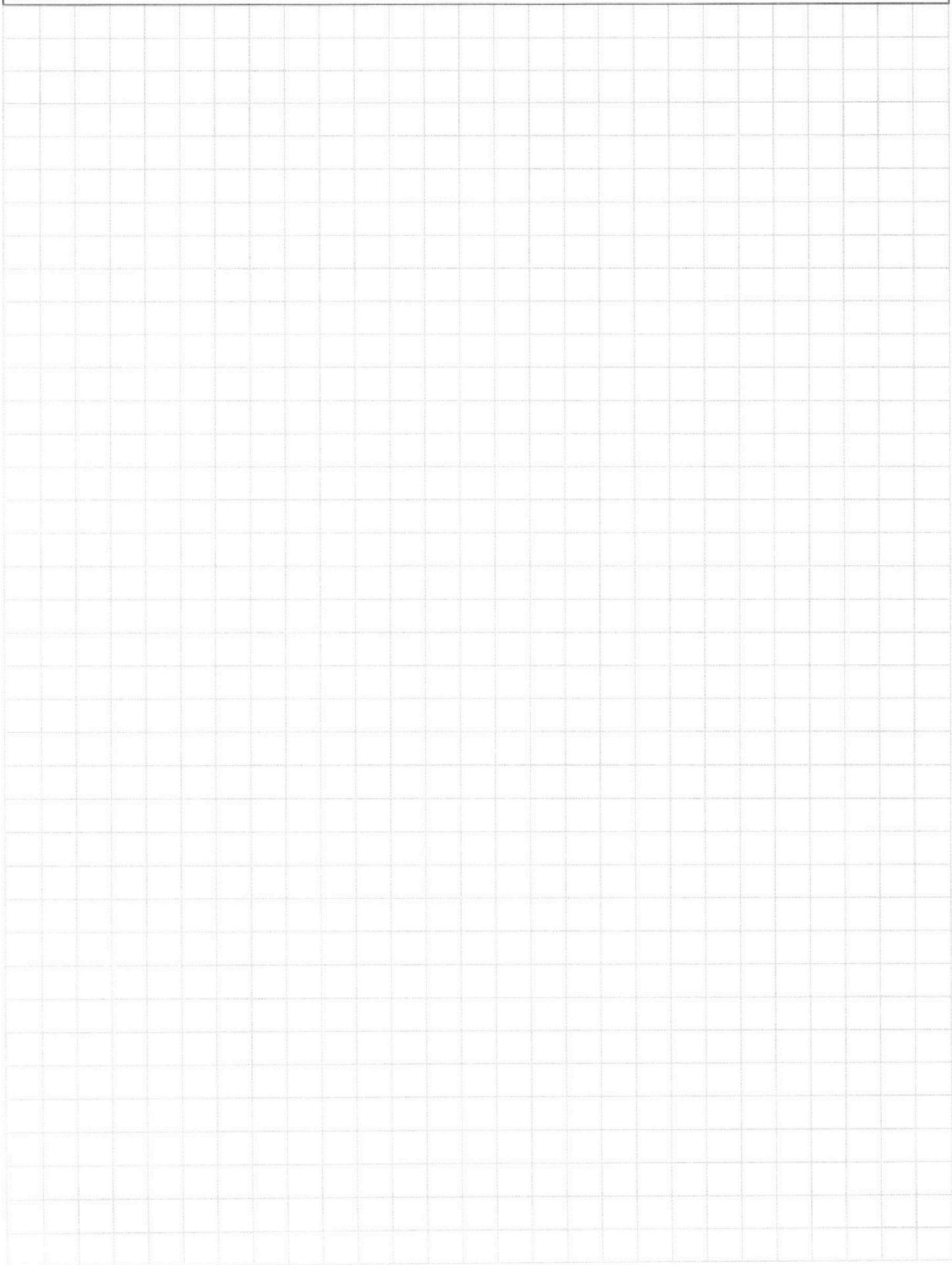
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\log_7^4 x.$$

$$- \log_7 x^4 \cdot 4^2 - \log_7 x^2 \cdot 7 \quad \frac{2}{5}$$

$$- \log_7 x^2 \cdot 7^5$$

$$4 \log_7^{\frac{3}{2}}$$

$$x^4 - \frac{2}{x} = \frac{3}{x^2} - 4$$

$$y^4 + \frac{6}{y} = \frac{2}{y^5} - 4$$

$$\begin{cases} x^4 - \frac{2}{x} = \frac{3}{x^2} - 4 \\ y^4 + \frac{6}{y} = \frac{2}{y^5} - 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x^5 - 4 = 3 - 8x \\ 5y^5 + 30 = 2 - 20y \\ 2y^5 + 12 = 5 - 8y \end{cases}$$

$$2y^5 - 8y + 7 = 0$$

$$\begin{cases} 2x^5 + 8x = 7 \\ 5y^5 + 20y = -28 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x^5 + 8x - 7 = 0 \\ 5y^5 + 20y + 28 = 0 \\ 2y^5 - 8y + 7 = 0 \end{cases}$$

$$(x^5 + y^5) + 4(x + y) = 0$$

$$(x + y)(x^4 -$$

$$10x^4 + 8 = 0$$

$$10x^4$$



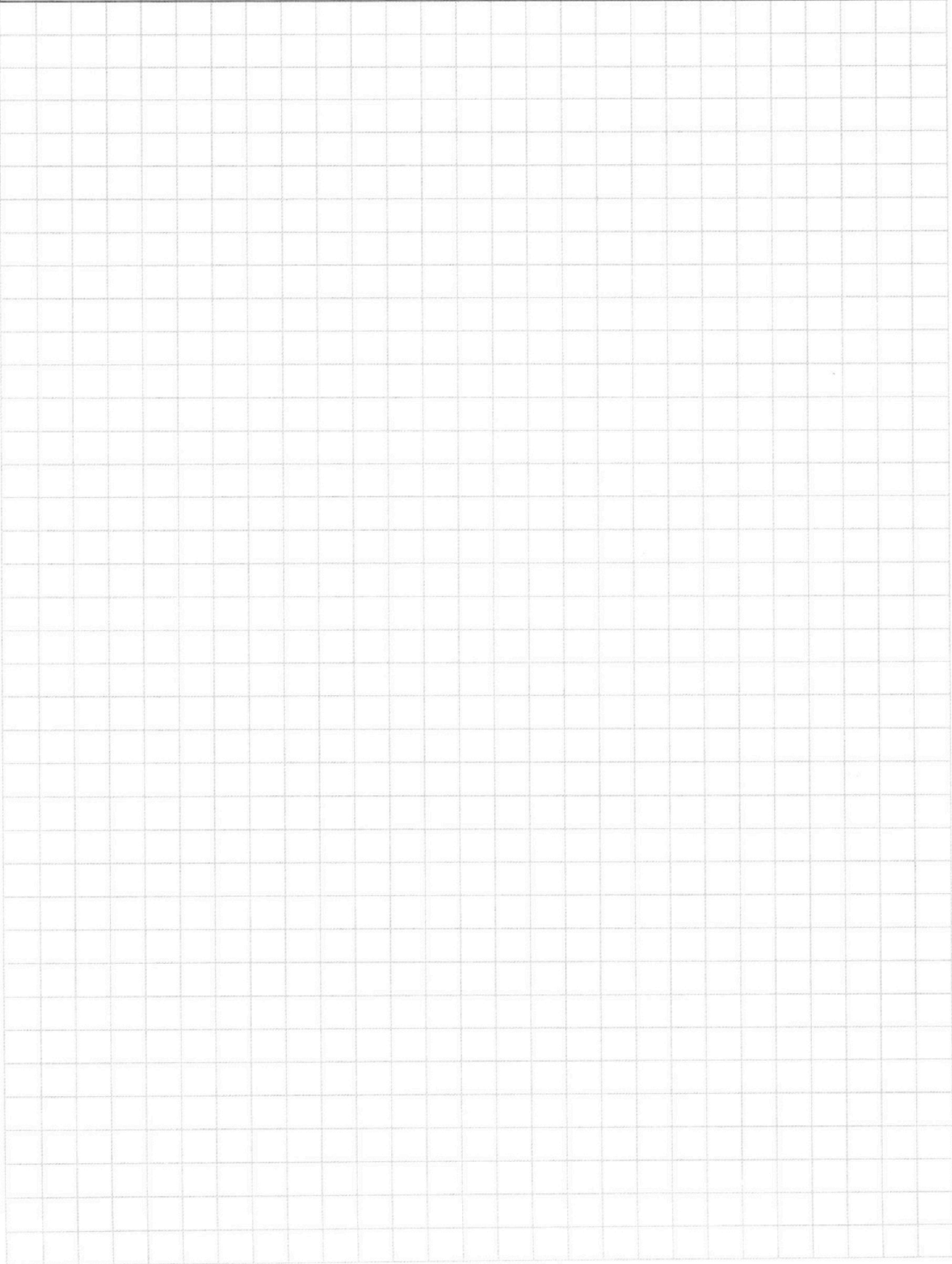
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$-\frac{5\sqrt{6}}{12} < -\frac{1}{3a} < 0 \quad \log_{36e^2} \left( \frac{343}{(36x^2)^4} \right)$$

$$-\frac{2\sqrt{6}}{5}$$

$$-5a\sqrt{6} < -4 < 0 \quad \log_{6x^7} 7 - \log_{36e^2} 7 - 4$$

$$5a\sqrt{6} > 4 > 0 \quad \frac{5}{2\sqrt{6}}$$

$$a > \frac{4}{5\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{2}}{5\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{6}}{15}$$

$$0 < -\frac{1}{3a} < \frac{5\sqrt{6}}{12} \quad \log_{6x^4} 4 - \log_{36e^2} 343$$

$$a > \frac{4}{5\sqrt{6}}$$

$$0 < -4 < 5a\sqrt{6}$$

$$-\frac{4}{5\sqrt{6}} < a$$

$$0 > a > -\frac{4}{5\sqrt{6}}$$

$$\log_{36e^2} (7^4 7^3)$$

$$\log_{36e^2} (7^7)$$

$$\begin{array}{r} 343 \\ 343 \overline{) 7} \\ \underline{28} \phantom{0} \\ 63 \phantom{0} \\ \underline{63} \\ 0 \end{array}$$

$$-\frac{5\sqrt{6}}{12} < -\frac{1}{3a} < \frac{5\sqrt{6}}{12}$$

$$5a\sqrt{6} > 4 > -5a\sqrt{6}$$

$$7^3$$

$$a > \frac{4}{5\sqrt{6}} > -a$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{5\sqrt{6}}{4\sqrt{2}} = \frac{1}{3a}$$

$$x^2 + 14x + y^2 + 45 = 0$$

$$a = \frac{4}{5\sqrt{6}}$$

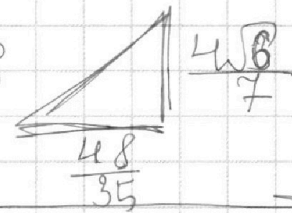
$$\frac{2\sqrt{2}}{5\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{6}}{15}$$

$$-\frac{1}{3a} = \frac{5\sqrt{3}}{12}$$

$$a = \frac{4}{5\sqrt{6}}$$

$$12 = 15a\sqrt{3}$$

$$4 = 5a\sqrt{3}$$



x

$$3ay = 7b - x$$

$$y = \frac{7b - x}{3a}$$

$$y = -\frac{x}{3a} + \frac{7b}{3a}$$

$$x^2 + 14x + 49 + y^2 = 4$$

$$(x+7)^2 + y^2 = 2^2$$

$$-ax + 7ab$$

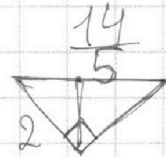
$$\frac{4\sqrt{3} \cdot 35 \cdot 5}{7 \cdot 48 \cdot 12} = \frac{5\sqrt{3}}{12}$$

$$\frac{4\sqrt{6} \cdot 35 \cdot 5}{7 \cdot 48 \cdot 12} = \frac{5\sqrt{6}}{12}$$

$$\sqrt{\frac{2 \cdot 48}{49}}$$

$$\frac{7 \cdot 2}{5}$$

$$\frac{16 \cdot 8}{7}$$



$$16 \cdot 8$$

$$\frac{10(48)}{7\sqrt{35}} \quad \frac{28}{35} - \frac{50}{35} \quad ax + ab$$

$$x \left( \frac{14}{5} - x \right) \cdot 2 = 4$$

$$x = \frac{20}{14} = \frac{10}{7}$$

$$\frac{14x}{5} = 4$$

$$\frac{2 \cdot 48}{49}$$

$$\frac{4\sqrt{6}}{7}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1     2     3     4     5     6     7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$2^{34} \cdot 3^{43} \cdot 5^{75} \leq abc^2$$

$$-\frac{3\pi}{2} \leq \frac{\pi}{6} + \frac{5\pi k}{3} \leq \frac{7\pi}{2}$$

$$2^{34} \cdot 3^{44} \cdot 5^{76} \leq abc^2$$

$$-\pi \leq \pi + \pi k \leq 2\pi$$

$$2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43} \leq abc^2$$

$$-\pi \leq \pi k \leq \pi$$

$$\begin{array}{r} 18 \\ \overline{)14} \\ 32 \\ +43 \\ \hline 75 \end{array}$$

$$a = \sqrt{2^8 \cdot 3^{13} \cdot 5^{39}}$$

$$b = \sqrt{2^6 \cdot 3^9 \cdot 5^7}$$

$$c = \sqrt{2^{10} \cdot 3^{11} \cdot 5^{18}}$$

$$-1 \leq k \leq 2$$

$$a = 2^4 \cdot 3^7 \cdot 5^{20}$$

$$b = 2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^3$$

$$c = 2^{10} \cdot 3^{11} \cdot 5^{23}$$

$$bac: 5^{32}$$

$$\frac{\pi}{6} + \frac{10\pi k}{6}$$

$$\frac{\pi}{6}$$

$$-\frac{5\pi}{6} = -\frac{5\pi}{2}$$

$$\frac{11\pi}{6}$$

$$\frac{21\pi}{6}$$

$$\frac{2\pi}{2} + \frac{5\pi k}{2}$$

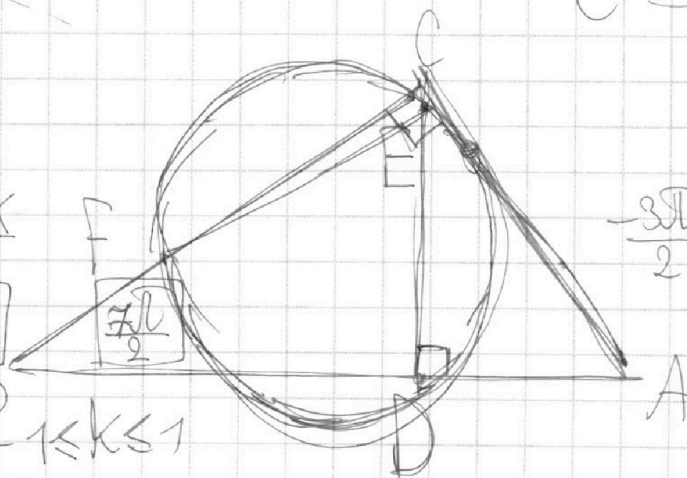
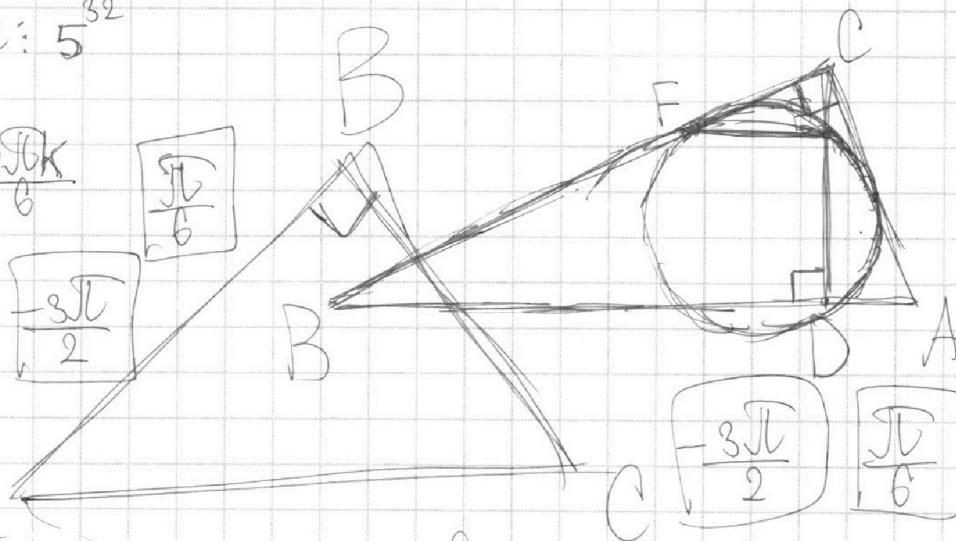
$$-\frac{3\pi}{2}$$

$$\frac{\pi}{2}$$

$$-1 \leq k \leq 1$$

$$-5 \leq 5k \leq 5$$

$$-3 \leq 2 + 5\pi k \leq 7$$



$$\frac{13}{10}$$

$$\frac{7\pi}{2}$$

$$-\frac{3\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} + \frac{5\pi k}{2} \leq \frac{7\pi}{2}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\cos\left(\frac{\sqrt{13}}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$$

$$\sin\left(\frac{5\sqrt{13}}{10} - \frac{3\sqrt{13}}{10} - \frac{\alpha}{5}\right)$$

$$\sin(\alpha) = \cos\left(\frac{3\sqrt{13}}{10} + \frac{\alpha}{5}\right)$$

$$4\alpha - \sqrt{13} = 5\sqrt{13} + 10\sqrt{13}k$$

$$\alpha = \sqrt{13} + \frac{5\sqrt{13}k}{2}$$

$$\sin \alpha = \sin\left(\frac{\sqrt{13}}{5} - \frac{\alpha}{5}\right)$$

$$\frac{4\alpha - \sqrt{13}}{10} =$$

$$\begin{array}{r} 156 \overline{) 13} \\ \underline{13} \phantom{0} \\ 26 \\ \underline{26} \\ 0 \end{array}$$

$$\alpha = \frac{\sqrt{13}}{5} + \frac{5\sqrt{13}k}{3}$$

$$\alpha = \frac{\sqrt{13}}{2} + \frac{5\sqrt{13}k}{2}$$

$$\frac{4\alpha - \sqrt{13}}{10} = \sqrt{13}k$$

$$\frac{6\alpha - \sqrt{13}}{10} = \sqrt{13}k$$

$$6\alpha = \sqrt{13} + 10\sqrt{13}k$$

$$\frac{4\sqrt{13} - 4\alpha}{10} = \frac{3\alpha}{156} \quad \frac{\alpha}{5} + \frac{5\alpha}{5}$$

$$4\alpha = 4\sqrt{13} + 10\sqrt{13}k$$

$$\frac{\alpha \cdot 4 \cdot 39}{\alpha \cdot 130} = \frac{156}{130} = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}$$

$$\frac{\sqrt{130} - a\sqrt{\frac{13}{3}}}{a} = \frac{\sqrt{39}}{3}$$

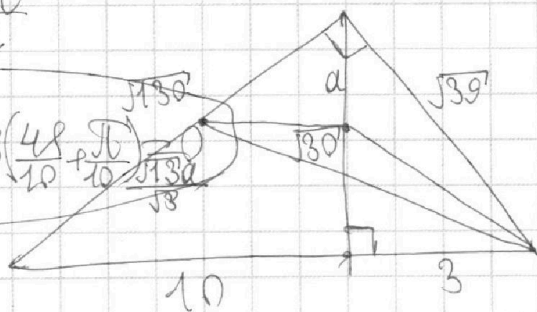
$$0 \leq \frac{3\sqrt{13}}{2} - \alpha \leq 5\sqrt{13}$$

$$-\frac{3\sqrt{13}}{2} \leq \alpha \leq \frac{3\sqrt{13}}{2}$$

$$3\sqrt{130} - a\sqrt{39} = a\sqrt{39}$$

$$2a\sqrt{39} = 3\sqrt{130}$$

$$a = \frac{3\sqrt{130}}{2\sqrt{39}}$$



$$2\sin\left(\frac{6\alpha}{10} - \frac{\sqrt{13}}{10}\right) \cos\left(\frac{4\alpha + \sqrt{13}}{10} - \frac{\sqrt{130}}{10}\right)$$

$$\frac{10\sqrt{13} - 3\sqrt{13}}{2}$$

$$\frac{8 \times 2\sqrt{39}}{8\sqrt{130}}$$

$$\frac{13a}{\sqrt{39}} = \frac{\sqrt{130}a}{\sqrt{3}}$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) \quad \sin \alpha \pm \sin \beta = 2\sin\left(\frac{\alpha \pm \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha \mp \beta}{2}\right)$$