МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^7 3^{11} 5^{14}$, bc делится на $2^{13} 3^{15} 5^{18}$, ac делится на $2^{14} 3^{17} 5^{43}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой AC в точке A, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке E, а катет BC – в точке F. Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1{,}3$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arccos(\sin x) = \dfrac{3\pi}{2} + x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)\,(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_7^4(6x) - 2\log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4, \quad \text{и} \quad \log_7^4 y + 6\log_y 7 = \log_{y^2}\left(7^5\right) - 4.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-17;68)$, $Q(2;68)$ и $R(19;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно на границе) и таких, что $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 60, $SA = BC = 10$.

   а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

   б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 3$, а радиус сферы Ω равен 4.

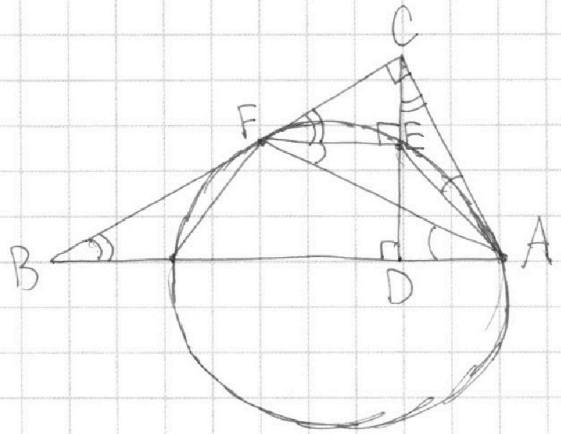
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Так как $ав \vdots 2^7 3^{11} 5^{14}$ $вс \vdots 2^{13} 3^{15} 5^{18}$ $ас \vdots 2^{14} 3^{17} 5^{43}$, то перемножив их, получаем $(авс)^2 \vdots 2^{34} \cdot 3^{43} \cdot 5^{75}$.
Так как (авс) в квадрате имеет только делители с четными степенями, то $(авс)^2$ делится хотя бы на 3^{44}. Так как ~~(вс)~~ $ас \vdots 5^{43}$, то $(авс)^2 \vdots 5^{86}$.
Значит $(авс)^2 \vdots 2^{34} \cdot 3^{44} \cdot 5^{86}$, тогда $(авс)^2 \geq 2^{34} \cdot 3^{44} \cdot 5^{86} \Rightarrow$
$\Rightarrow авс \geq 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$. Если взять числа $а = 2^4 \cdot 3^7 \cdot 5^{20}$
$в = 2^3 \cdot 3^4$ $с = 2^{10} \cdot 3^{11} \cdot 5^{23}$, то их произведение равно
$2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$, а $ав \vdots 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{20} > 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14}$ $вс \vdots 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{23} > 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18}$
$ас \vdots 2^{14} \cdot 3^{18} \cdot 5^{43} > 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43}$. Тогда наименьшее возможное значение произведения авс — это $2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$.
Ответ: $2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$



Так как $\frac{AB}{BD}=\frac{13}{10} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{BD}{AD}=\frac{10}{3}$. Пусть

$BD=10x$, $AD=3x$.

Так как $\angle C=90^\circ$, а CD – высота, то $CD^2=BD\cdot AD=$

$=30x^2 \Rightarrow CD=x\sqrt{30}$.

Так как окружность касается AC в т. A, то $\angle EAC=$ $=\angle EFA$. Так как $FE\parallel AB$, то $\angle EFA=\angle FAB$.

$\angle CBA=90^\circ-\angle BCD=90^\circ-(90^\circ-\angle ACD)=\angle ACD$.

Значит $\triangle AEC\sim\triangle AFB$ по двум углам. Тогда

$\frac{EC}{BF}=\frac{AC}{AB}$. $AB=BD+AD=13x$. $AC=\sqrt{DC^2+AD^2}=$

$=x\sqrt{39}$. Пусть $EC=y$. Тогда $BF=\frac{y\cdot AB}{AC}=\frac{y\cdot 13}{\sqrt{39}}$.

Так как $FE\parallel BA \Rightarrow \angle CFE=\angle CBA=\angle ACD \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle CEF\sim\triangle ADC$ по двум углам. Тогда $\frac{FC}{EC}=\frac{AC}{AD} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{x\sqrt{10^2+\sqrt{30}^2}-\frac{y\cdot 13}{\sqrt{39}}}{y}=\frac{\sqrt{39}}{3} \Rightarrow 2y\sqrt{39}=3x\sqrt{130} \Rightarrow y=\frac{x\cdot 3\sqrt{130}}{2\sqrt{39}}$

Коэффициент подобия $\triangle ECF$ и $\triangle DAC = \frac{AD}{EC} = \frac{3\cdot 2\sqrt{39}}{3\sqrt{130}} = \frac{2\sqrt{39}}{\sqrt{130}}$. Отношение площадей этих треугольников равен коэффициенту подобия в квадрате, то есть $\frac{4\cdot 39}{130} = \frac{6}{5}$

Ответ: $\frac{6}{5}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$5\arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$

ОДЗ: т.к. $0 \le \arccos(\alpha) \le \pi \Rightarrow 0 \le 5\arccos(\alpha) \le 5\pi \Rightarrow$

$\Rightarrow 0 \le \frac{3\pi}{2} + x \le 5\pi \Rightarrow -\frac{3\pi}{2} \le x \le \frac{7\pi}{2}$

$5\arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x \Rightarrow \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin x = \cos\left(\frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{10} - \frac{x}{5}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{5} - \frac{x}{5}\right)$

$\sin x - \sin\left(\frac{\pi}{5} - \frac{x}{5}\right) = 0 \Rightarrow 2\sin\left(\frac{6x-\pi}{10}\right)\cos\left(\frac{4x+\pi}{10}\right) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \sin\left(\frac{6x-\pi}{10}\right) = 0 \\ \cos\left(\frac{4x+\pi}{10}\right) = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + \frac{5\pi k}{3} \\ x = \pi + \frac{5\pi k}{2} \end{array}\right. \quad k \in Z$$

$-\frac{3\pi}{2} \le \frac{\pi}{6} + \frac{5\pi k}{3} \le \frac{7\pi}{2} \,\Big|\cdot\frac{6}{\pi}; \ -9 \le 1 + 10k \le 21 \,\Big|-1;$

$-10 \le 10k \le 20 \,\Big|:10; \ -1 \le k \le 2 \Rightarrow x = -\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{6};$
$\frac{11\pi}{6}; \frac{21\pi}{6}.$

$-\frac{3\pi}{2} \le \pi + \frac{5\pi k}{2} \le \frac{7\pi}{2} \,\Big|\cdot\frac{2}{\pi}; \ -3 \le 2 + 5k \le 7 \,\Big|-2;$

$-5 \le 5k \le 5 \,\Big|:5; \ -1 \le k \le 1. \Rightarrow x = -\frac{3\pi}{2}; \pi; \frac{7\pi}{2}.$

Ответ: $x = -\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{6}; \pi; \frac{11\pi}{6}; \frac{7\pi}{2}.$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

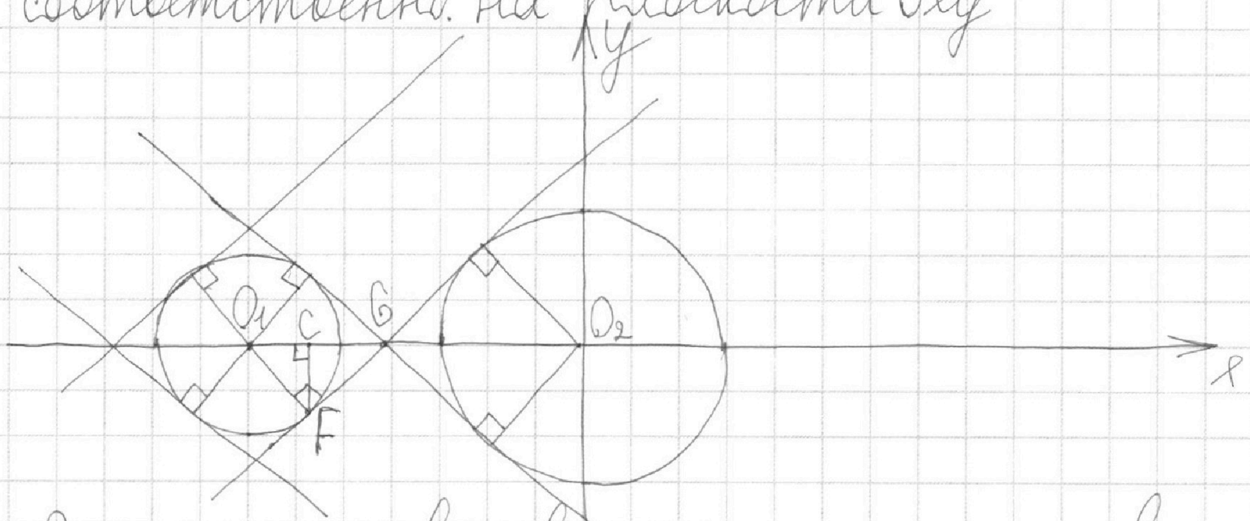
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} x+3ay-7b=0 \\ (x^2+14x+y^2+45)(x^2+y^2-9)=0 \end{cases}$$

$x^2+14x+y^2+45=0 \Rightarrow x^2+14x+49+y^2=2^2 \Rightarrow (x+7)^2+y^2=2^2$

$x^2+y^2-9=0 \Rightarrow x^2+y^2=3^2$. Изобразим две окружности с радиусами 2, 3 и центрами $(-7,0)$, $(0,0)$ соответственно на плоскости Oxy



Это множество является решением второго уравнения системы. Если $a=0$, то для решения первого уравнения $x=7b$, но можно взять любой y. Тогда множество решений первого уравнения — это прямая параллельная оси ординат. и с множеством решений второго уравнения будет иметь не более двух пересечений. Теперь

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$a \neq 0$. Тогда можем переписать первое уравнение как $y = -\frac{x}{3a} + \frac{7b}{3a}$. Это линейная функция. От a зависит старший коэффициент, а от b зависит значение в т. $x_0 = 0$.

Если $-\frac{1}{3a} \in (-\infty; -\frac{5\sqrt{6}}{12}] \cup [\frac{5\sqrt{6}}{12}; \infty)$, то прямая $y = -\frac{x}{3a} + \frac{7b}{3a}$ будет иметь максимум две точки пересечения с окружностями. Либо касается из обоих, либо пересекает одну из них в двух точках, а другую не пересекает. Но если $-\frac{1}{3a} \in (-\frac{5\sqrt{6}}{12}; \frac{5\sqrt{6}}{12})$ исключая $\{0\}$, то найдется такое b при котором прямая $y = \frac{-x}{3a} + \frac{7b}{3a}$ будет иметь по два пересечения с каждой окружностью. Отметим центры $(-7, 0)$ $(0, 0)$ как $O_1 . O_2$ соответственно. Нарисуем общую касательную, которая пересекает Ox в т. C, а окружность с центр. O_1 касается в точке F, отпустим высоту из точки F на Ox с основанием C. $O_1O_2 = 7$. $\frac{O_1C}{CO_2} = \frac{2}{3} \Rightarrow O_1C = \frac{14}{5}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$O_1C = t. \Rightarrow t\left(\frac{14}{5}-t\right) = CF^2 \Rightarrow t\left(\frac{14}{5}-t\right)+t^2 = O_1F^2 = 4 \Rightarrow$
$\Rightarrow t=\frac{10}{7}$; $CF=\sqrt{\frac{10}{7}\left(\frac{14}{5}-\frac{10}{7}\right)} = \frac{4\sqrt{6}}{7}$; $GC = \frac{14}{5}-t =$
$=\frac{14}{5}-\frac{10}{7}=\frac{48}{35}$. Тогда угол наклона этой общей касательной будет равен $\frac{5\sqrt{6}}{12}$. Теперь нарисуем симметричную прямую этой касательной относительно Ox, она тоже будет общей касательной этих окружностей. и наклон её будет равен $-\frac{5\sqrt{6}}{12}$.

Получается, что $-\frac{5\sqrt{6}}{12} < -\frac{1}{3a} < 0$ и $0 < -\frac{1}{3a} < \frac{5\sqrt{6}}{12} \Rightarrow \cancel{\left(-\frac{2\sqrt{6}}{15} < a < 0;\right)}$ $\frac{2\sqrt{6}}{15} < a$; $-\frac{2\sqrt{6}}{15} > a$

Ответ: $a \in \left(-\infty; -\frac{2\sqrt{6}}{15}\right) \cup \left(\frac{2\sqrt{6}}{15}; \infty\right)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$\begin{cases} \log_7^4(6x) - 2\log_{6x}7 = \log_{36x^2}343 - 4 \\ \log_7^4 y + 6\log_y 7 = \log_{y^2}(7^5) - 4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \log_7^4(6x) - \frac{2}{\log_7(6x)} = \frac{3}{2\log_7(6x)} - 4 \quad \Big| \cdot 2\log_7(6x) \\ \log_7^4 y + \frac{6}{\log_7 y} = \frac{5}{2\log_7 y} - 4 \quad \Big| \cdot 2\log_7 y \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\log_7^5(6x) + 8\log_7(6x) - 7 = 0 \\ 2\log_7^5 y + 8\log_7 y + 7 = 0 \end{cases}$$ Сложим данные ~~не~~равенства

$$(\log_7^5(6x) + \log_7^5 y) + 4(\log_7(6x) + \log_7 y) = 0$$

Каждое из слагаемых в скобках делится на $(\log_7(6x) + \log_7 y)$. Тогда этот множитель может равняться нулю.

$$\log_7(6xy) = 0 \Rightarrow 6xy = 1 \Rightarrow xy = \frac{1}{6}$$

Так как $-\infty < \log_7 6x, \log_7 y < \infty$ и уравнения, которые мы сложили, пятой степени, то они обязательно будут иметь хотя бы один корень. Так как производные этих уравнений $10\log_7^4(6x) + 8$, $10\log_7^4 y + 8$ всегда положительные, то каждое из

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

уравнений ~~них~~ имеет по одному корню. Если у уравнения $2\log_7^5(6x)+8\log_7(6x)-7=0$ корень равен $\log_7(6x)=t$, то для второго уравнения $2\log_7^5 y+8\log_7 y+7$ подойдет корень $\log_7 y=-t$ и он будет единственным.
Сумма этих корней как раз равна нулю
Значит $\log_7(6x)+\log_7 y=\log_7(6xy)=0 \Rightarrow 6xy=1 \Rightarrow$
$\Rightarrow xy=\frac{1}{6}$

Ответ: $xy=\frac{1}{6}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\log_7^4 x$

$-\log_{8x} 49^2 - \log_{32x^2} 7$

$\frac{2}{5}$

$-\log_{32x^2} 7^5$

$49^{\frac{3}{2}}$

$x^4 - \frac{2}{x} = \frac{3}{y^2} - 4$

$y^4 + \frac{6}{y} = \frac{2}{y \cdot 5} - 4$

$\begin{cases} x^4 - \frac{2}{x} = \frac{3}{2x} - 4 \\ y^4 + \frac{6}{y} = \frac{5}{2y} - 4 \end{cases}$

$\begin{cases} 2x^5 - 4 = 3 - 8x \\ \cancel{5y^5 + 30 = 2 - 20y} \end{cases}$

$2y^5 + 12 = 5 - 8y$

$2y^5 + 8y + 7 = 0$

$\begin{cases} 2x^5 + 8x = 7 \\ 5y^5 + 20y = -28 \end{cases}$

$\begin{cases} 2x^5 + 8x - 7 = 0 \\ \cancel{5y^5 + 20y + 28 = 0} \end{cases}$

$2y^5 + 8y + 7 = 0$

$(x^5 + y^5) + 4(x + y) = 0$

$(x + y)(x^4 -$

$10x^4 + 8 = 0$

$10x^4$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$-\frac{5\sqrt6}{12} < -\frac{1}{3a} < 0 \qquad \log_{36x^2}\left(\frac{343}{(36x^2)^4}\right)$$

$$-\frac{2\sqrt6}{5}$$

$$-5a\sqrt6 < -4 < 0 \qquad \log_{6x}7 + \log_{36x^2}7 - 4$$

$$5a\sqrt6 > 4 > 0 \qquad \frac{5}{2\sqrt6}$$

$$a > \frac{4}{5\sqrt6} = \frac{2\sqrt2}{5\sqrt3} = \boxed{\frac{2\sqrt6}{15} < a}$$

$$\log_{6x}49 + \log_{36x^2}343$$

$$0 < -\frac{1}{3a} < \frac{5\sqrt6}{12}$$

$$a > \frac{4}{5\sqrt6}$$

$$0 < -4 < 5a\sqrt6$$

$$0 > a > -\frac{4}{5\sqrt6}$$

$$-\frac{4}{5\sqrt6} < a \qquad \log_{36x^2}(7^4 7^3)$$

$$\boxed{\log_{36x^2}(7^7)}$$

343

$$-\frac{5\sqrt6}{12} < -\frac{1}{3a} < \frac{5\sqrt6}{12}$$

343 | 7
28 | 49
63

$$5a\sqrt6 > 4 > -5a\sqrt6$$

$$7^3 \qquad a > \frac{4}{5\sqrt6} > -a$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\frac{\cancel{4}\sqrt{6}\,\cancel{35}\cdot 5}{\cancel{7}\,\cancel{48}\,12}$

$\frac{5\sqrt{6}}{12} = \frac{1}{3a}$

$-\frac{1}{3a} = \frac{5\sqrt{3}}{12}$

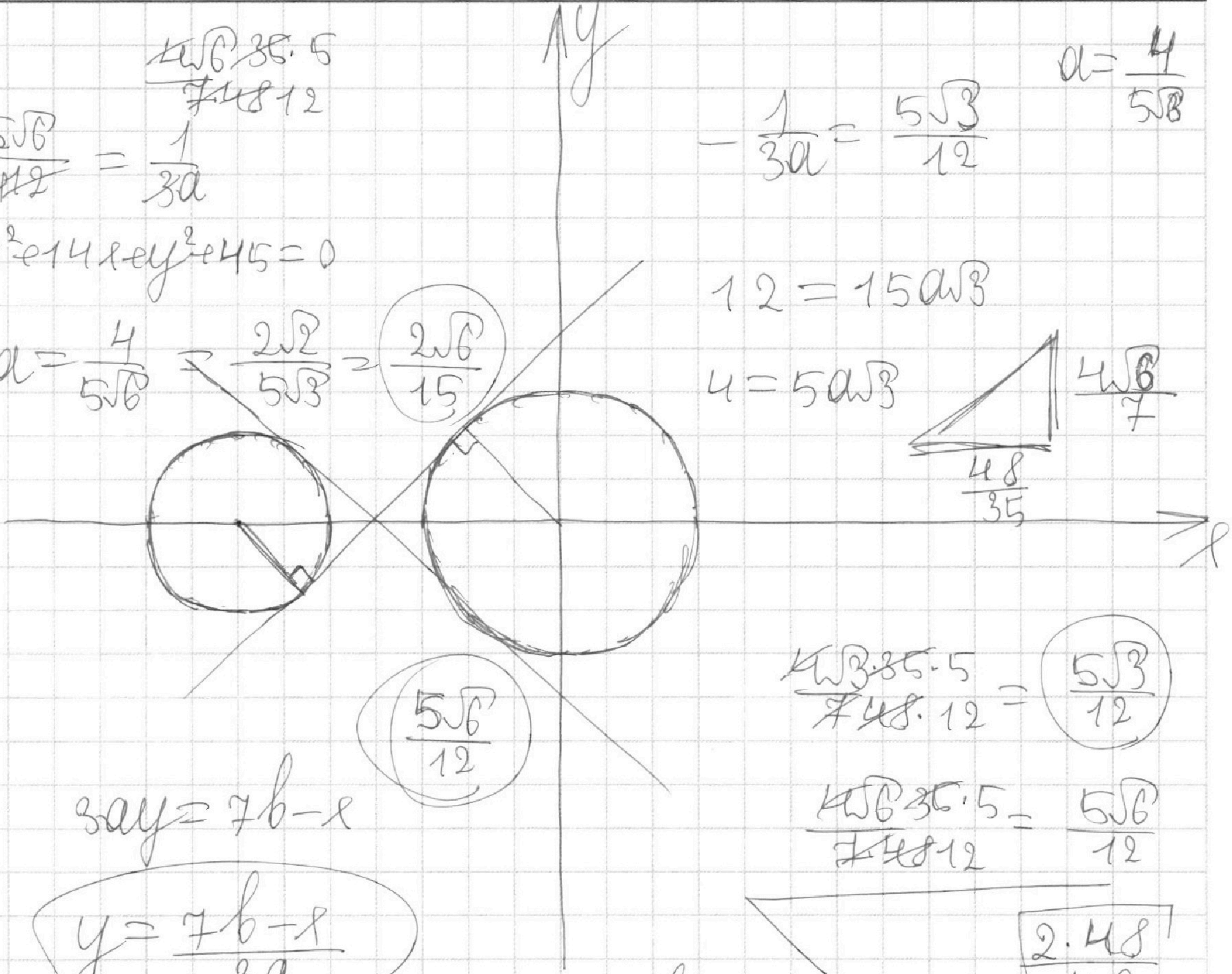
$a = \frac{4}{5\sqrt{3}}$

$x^2+14x+y^2+45=0$

$12 = 15a\sqrt{3}$

$a = \frac{4}{5\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{2}}{5\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{6}}{15}$

$4 = 5a\sqrt{3}$



$\frac{\cancel{4}\sqrt{3}\cdot\cancel{35}\cdot 5}{\cancel{7}\,\cancel{48}\cdot 12} = \frac{5\sqrt{3}}{12}$

$\frac{5\sqrt{6}}{12}$

$\frac{\cancel{4}\sqrt{6}\,\cancel{35}\cdot 5}{\cancel{7}\,\cancel{48}\,12} = \frac{5\sqrt{6}}{12}$

$3ay = 7b - x$

$y = \frac{7b-x}{3a}$

$\sqrt{\frac{2\cdot 48}{49}}$

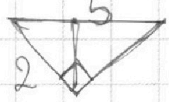
$\boxed{y = -\frac{x}{3a} + \frac{7b}{3a}}$

$\frac{7\cdot 2}{5}$

$\frac{\sqrt{16\cdot 6}}{7}$

$x^2+14x+49+y^2=4$

$\frac{14}{5}$



$(x+7)^2+y^2=2^2$

$-ax+7ab$

$16\cdot 6$

$ax+ab.$

$\frac{10}{7}\left(\frac{48}{35}\right)$

$\frac{98}{35} - \frac{50}{35}$

$x\left(\frac{14}{5}-x\right)+x^2=4$

$x = \frac{20}{14} = \frac{10}{7}$

$\frac{14x}{5} = 4$

$\frac{2\cdot 48}{49}$

$\frac{4\sqrt{6}}{7}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$2^{34}\cdot 3^{43}\cdot 5^{75} \le a^2b^2c^2$

$-\frac{3\pi}{2} \le \frac{\pi}{6} + \frac{5\pi k}{3} \le \frac{7\pi}{2}$

$2^{34}\cdot 3^{44}\cdot 5^{76} \le a^2b^2c^2$

$-9\pi \le \pi + 10k \le 21$

$2^{17}\cdot 3^{22}\cdot 5^{38} \le abc$

$-10 \le 10k \le 20$

18
14
+ 32
43
75

$a=\sqrt{2^{8}\cdot 3^{13}\cdot 5^{39}}$ $b=\sqrt{2^{6}\cdot 3^{9}\cdot 5}$ $c=\sqrt{2^{10}\cdot 3^{11}\cdot 5^{18}}$

$\boxed{-1 \le k \le 2}$

$a=2^{4}\cdot 3^{7}\cdot 5^{20}$ $b=2^{3}\cdot 3^{4}\cdot 5$ $c=2^{10}\cdot 3^{11}\cdot 5^{23}$

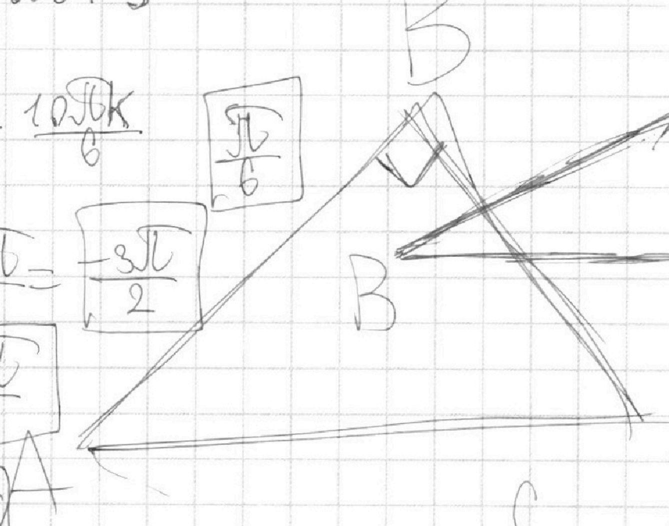
$b^2ac : 5^{32}$

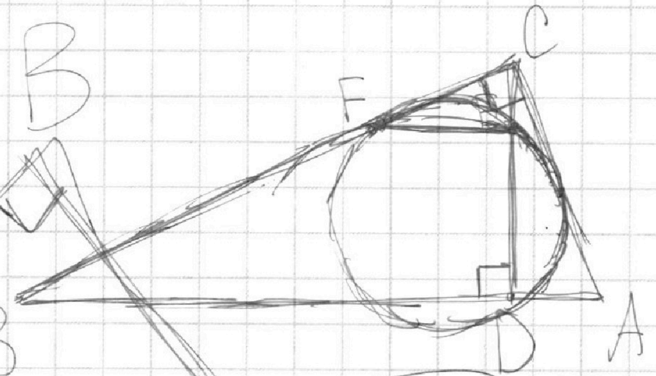
$\frac{\pi}{6}+\frac{10\pi k}{6}$ $\boxed{\frac{\pi}{6}}$

$-\frac{9\pi}{6} = \boxed{-\frac{3\pi}{2}}$

$\boxed{\frac{11\pi}{6}}$

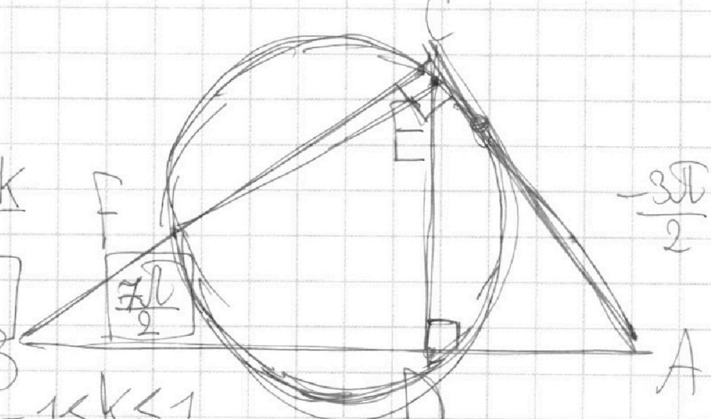
$\boxed{\frac{21\pi}{6}}$





C $\boxed{-\frac{3\pi}{2}}$ $\boxed{\frac{\pi}{6}}$ $\boxed{\pi}$ $\boxed{\frac{11\pi}{6}}$ $\boxed{\frac{7\pi}{2}}$

$\frac{13}{10}$



$\frac{2\pi}{2}+\frac{5\pi k}{2}$

$\boxed{-\frac{3\pi}{2}}$ $\boxed{\pi}$ $\boxed{\frac{7\pi}{2}}$

$-\frac{3\pi}{2} \le \pi + \frac{5\pi k}{2} \le \frac{7\pi}{2}$

$-1 \le k \le 1$

$-5 \le 5k \le 5$

$-3 \le 2+5\pi k \le 7$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x$

$\sin\left(\frac{5\pi}{12}-\frac{3\pi}{10}-\frac{x}{5}\right)$

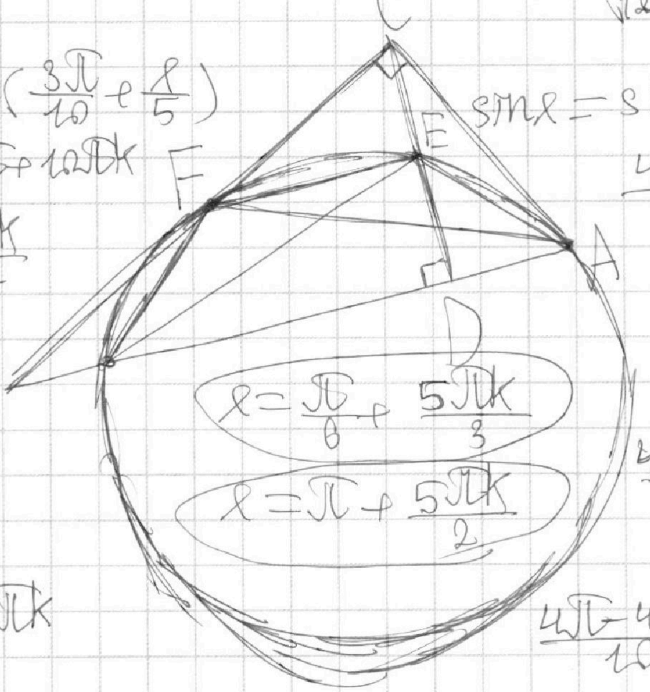
$\sin(x)=\cos\left(\frac{3\pi}{10}+\frac{x}{5}\right)$

$\sin x=\sin\left(\frac{\pi}{5}-\frac{x}{5}\right)$

$4x+\pi=5\pi+10\pi k$

$\frac{4x+\pi}{10}=$

$x=\pi+\frac{5\pi k}{2}$



$\boxed{x=\frac{\pi}{6}+\frac{5\pi k}{3}}$

$\boxed{x=\pi+\frac{5\pi k}{2}}$

$156 \,|\, 13$, 13, 26, 26, 0, 12

$\frac{4x-4\pi}{10}=\pi k$

$\frac{6x-\pi}{10}=\pi k$

$6x=\pi+10\pi k$

$\frac{4\pi-4x}{10}$ $\quad 39 \cdot 4 = 156$ $\quad \frac{x}{5}+\frac{5x}{5}$

$4x=4\pi+10\pi k$

$\frac{\cancel{a}\cdot 4\cdot 39}{\cancel{a}\cdot 130}=\frac{156}{130}=\frac{12}{10}=\frac{6}{5}$

$\frac{\sqrt{130}-a\sqrt{\frac{13}{3}}}{a}=\frac{\sqrt{39}}{3}$

$0\leq\frac{3\pi}{2}+x\leq 5\pi$ $\quad \sqrt{30}$

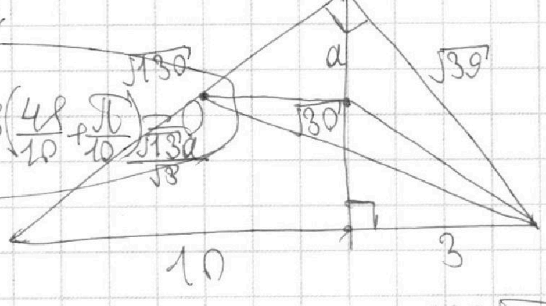
$3\sqrt{130}-a\sqrt{39}=a\sqrt{39}$

$-\frac{3\pi}{2}\leq x\leq\frac{7\pi}{2}$

$2a\sqrt{39}=3\sqrt{130}$

$2\sin\left(\frac{6x}{10}-\frac{\pi}{10}\right)\cos\left(\frac{4x}{10}+\frac{\pi}{10}\right)=0$

$\boxed{a=\frac{3\sqrt{130}}{2\sqrt{39}}}$



$\frac{10\pi-3\pi}{2}$ $\quad \frac{3\cdot 12\sqrt{39}}{3\cdot 2\sqrt{130}}$ $\quad \frac{13a}{\sqrt{39}}=\frac{\sqrt{13}a}{\sqrt{3}}$

$\sin(\alpha\pm\beta)$ $\quad \sin\alpha\pm\sin\beta=2\sin\left(\frac{\alpha\pm\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha\mp\beta}{2}\right)$