



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^8 3^{14} 5^{12}$, bc делится на $2^{12} 3^{20} 5^{17}$, ac делится на $2^{14} 3^{21} 5^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 5 : 2$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{8xz} 625 - 3, \quad \text{и} \quad \log_5^4 y + 4 \log_y 5 = \log_{y^3} 0,2 - 3.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-16; 80)$, $Q(2; 80)$ и $R(18; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 100, $SA = BC = 16$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пусть x - степень вхождения двойки в a , y - в b ,
 z - в c . Тогда, т.к. $ab : 2^8$; $bc : 2^{12}$; $ac : 2^{14}$ \Rightarrow

$$\begin{aligned} \Rightarrow \begin{cases} x+y \geq 8 \\ y+z \geq 12 \\ z+x \geq 14 \end{cases} & \Rightarrow 2(x+y+z) \geq 34 \Rightarrow (abc)^2 : 2^{34} \Rightarrow \\ & \Rightarrow abc : 2^{17} \end{aligned}$$

Аналогично, т.к. $ab : 3^{11}$; $bc : 3^{20}$; $ac : 3^{21}$

то $(abc)^2 : 3^{55}$ но т.к. $abc \in \mathbb{N}$, то степень
вхождения тройки в abc должна быть целой \Rightarrow
 $\Rightarrow abc : 3^{28}$

$$abc : ac \Rightarrow abc : 5^{39}$$

Т.к. 2; 3; 5 попарно взаимнопросты, то

$$abc : 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39} \Rightarrow abc \geq 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$$

$$\begin{aligned} \text{Пример: } a &= 2^5 \cdot 3^8 \cdot 5^{13} & ab &= 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12} \\ b &= 2^3 \cdot 3^9 \cdot 5^0 & bc &= 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{17} \\ c &= 2^9 \cdot 3^{13} \cdot 5^{20} & ac &= 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{39} \end{aligned}$$

$$abc = 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$ab \cdot bc \cdot ac = (abc)^2$$

$$ab \geq 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12}$$

$$bc \geq 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{17}$$

$$ac \geq 2^{21} \cdot 3^{14} \cdot 5^{39}$$

$$\Rightarrow (abc)^2 \geq 2^{34} \cdot 3^{34}$$

$$\begin{array}{l} abc : ab \\ abc : bc \\ abc : ac \end{array}$$

$$\Rightarrow abc : \text{НОК}(2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12}; 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{17}; 2^{21} \cdot 3^{14} \cdot 5^{39}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow abc : 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{39}$$

$$\Rightarrow abc \geq 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{39}$$

Пусть x - степень вхождения двойки в a , y - в b , z - в c . Тогда, так как $ab : 2^8$; $bc : 2^{12}$; $ac : 2^{21}$ \Rightarrow

$$\begin{array}{l} x+y \geq 8 \\ y+z \geq 12 \\ z+x \geq 21 \end{array}$$

$$\Rightarrow 2(x+y+z) \geq 34 \Rightarrow x+y+z \geq 17 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow abc : 2^{17}$$

Аналогично $(abc)^2 : 3^{55} \Rightarrow abc : 3^{28}$ (т.к. $abc \in \mathbb{N}$)

а также $(abc)^2 : 5^{68} \Rightarrow abc : 5^{34}$

Т.к. $2, 3, 5$ попарно взаимнопросты следует, что

$$abc : 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{34} \Rightarrow abc \geq 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{34}$$

Пример: $a = 2^5 \cdot 3^8 \cdot 5$
 $b = 2^3 \cdot 3^7 \cdot 5$
 $c = 2^9 \cdot 3^{13} \cdot 5$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

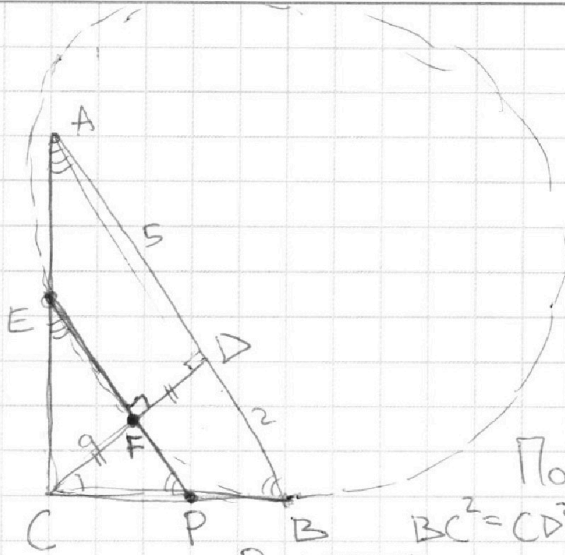
Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



В силу масштаба
будем считать, что
 $AB = 7$.

Тогда т.к. $AD:DB = \frac{5}{2} \Rightarrow$
 $\Rightarrow AD = 5 \quad DB = 2$

CD - высота в прямом Δ
проведенная к гипотенузе \Rightarrow
 $\Rightarrow CD = \sqrt{AD \cdot DB} = \sqrt{10}$

$EF \parallel AB \Rightarrow EF \perp CD$

По т. Пифагора в ΔCBD :

$$BC^2 = CD^2 + BD^2 = 10 + 4 = 14 \Rightarrow BC = \sqrt{14}$$

P - пересечение EF с BC

Пусть длина $CF = a$.

Тогда т.к. $\Delta CPF \sim \Delta CBD$ (по 2-м углам) \Rightarrow

$$\Rightarrow PF = \frac{BD \cdot CF}{CD} = \frac{2a}{\sqrt{10}}; \quad CP = \frac{BC \cdot a}{CD} = \frac{a\sqrt{14}}{\sqrt{10}} \Rightarrow BP = \sqrt{14} - \frac{a\sqrt{14}}{\sqrt{10}}$$

$$\Delta CPE \sim \Delta CBA \text{ (по 2-м углам)} \Rightarrow PE = \frac{AB \cdot CF}{CD} = \frac{7a}{\sqrt{10}}$$

По св-ву касательной: $PB^2 = PF \cdot PE$

$$\left(\sqrt{14} \left(1 - \frac{a}{\sqrt{10}} \right) \right)^2 = \frac{14a^2}{10}$$

$$1 - \frac{2a}{\sqrt{10}} + \frac{a^2}{10} = \frac{a^2}{10} \Rightarrow a = \frac{\sqrt{10}}{2} \Rightarrow F \text{ - середина } CD$$

$$\Delta CEF \sim \Delta BAC \text{ (по 2-м углам)} \Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = k^2 = \frac{BC^2}{CF^2} =$$

$$= \frac{14}{\frac{10}{4}} = \frac{28}{\frac{10}{4}} = \frac{28 \cdot 4}{10} = \frac{112}{10} = \frac{56}{5} = 11,2$$

Ответ: 5,6

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$N3 \quad 10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$$

$$10 \arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = \pi - 2x$$

$$10\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \pi - 2x$$

$$5\pi - 10x = \pi - 2x$$

$$4\pi = 8x$$

$$x = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Проверка: } 10 \arcsin\left(\cos \frac{\pi}{2}\right) \stackrel{?}{=} \pi - \pi$$

$$10 \arcsin(0) \stackrel{?}{=} 0$$

$$0 = 0$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

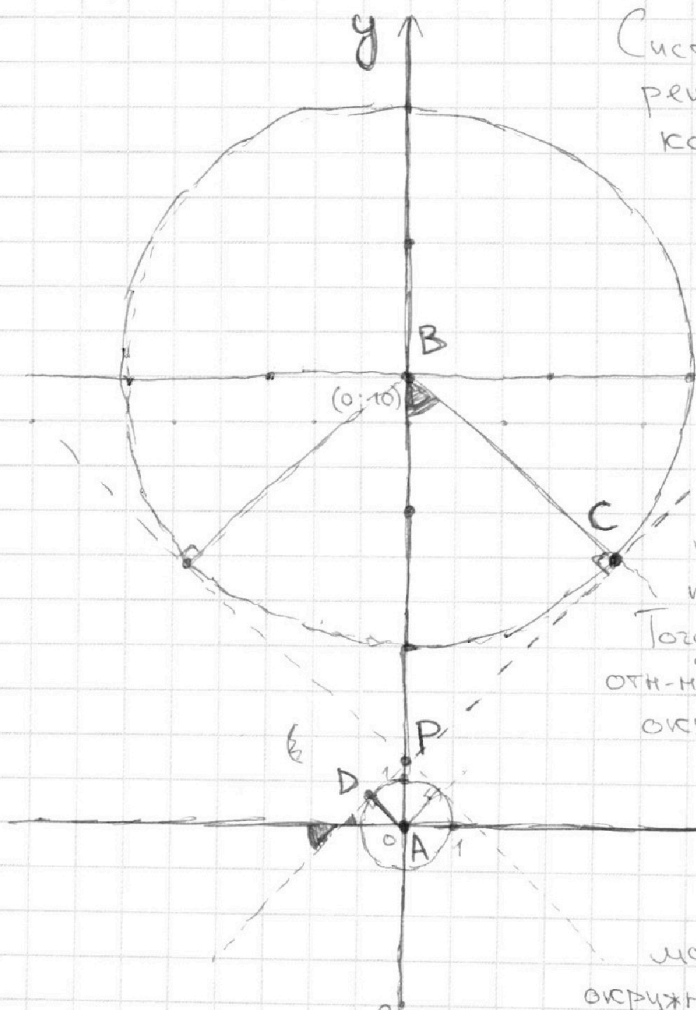
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{a}{3}x + \frac{4}{3}b \\ x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + (y - 10)^2 = 36 \end{cases}$$

График первого ур-ия - прямая
Графики второго и третьего ур-ий - окружности

Система будет иметь ровно 4 решения тогда и только тогда, когда прямая $y = \frac{a}{3}x + \frac{4}{3}b$ будет пересекать каждую из этих окружностей в 2-х различных точках



Построим общие внутренние касательные к этим окружностям.

Пусть y той из них, у которой положительный коэф. при x этот коэф. равен k .

Тогда т.к. окружности симметричны отно-но оси y , то у второй окружности коэф. при $x = -k$

Заметим, что если $\frac{a}{3} \in [-k; k]$, то

$$\text{прямая } y = \frac{a}{3}x + \frac{4}{3}b$$

может пересекать только одну окружность или касаться обеих,

но тогда количество корней системы $\neq 4$. И наоборот, если $\frac{a}{3} \notin [-k; k]$, то взяв b такое, чтобы прямая $y = \frac{a}{3}x + \frac{4}{3}b$ проходила через точку пересечения общих внутренних касательных к окружностям, мы получим 4 пересечения \Rightarrow 4 корня.

Обозначим

Осталось посчитать k \longrightarrow

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Обозначим точкой A центр маленькой окр-ти
точкой B - центр большой. Точками C и D - точки
касания положительной общей касательной с
большой и маленькой окружностями. P - точка
пересечения касательных.

Очевидно, что $BC \parallel AD \Rightarrow$ по т. Палеса $\frac{AP}{BP} = \frac{AD}{BC}$
Пусть $|AP| = d$, тогда $BP = 10 - d$; $AD = 1$; $BC = 6$ (радиусы)
 $\Rightarrow \frac{d}{10-d} = \frac{1}{6} \quad \text{и} \quad d = 10 - d \quad d = \frac{10}{7} \quad BP = 10 - d = \frac{60}{7}$

По определению k - тангенс угла, образованного
положительной касательной с осью X . Очевидно, что этот
угол равен $\angle PBC$

$$\operatorname{tg} \angle PBC = \frac{PC}{BC}$$

~~По т. Пифагора в $\triangle PCB$:~~ По т. Пифагора в $\triangle PCB$: $PC^2 = PB^2 - BC^2 =$
 $= \left(\frac{60}{7}\right)^2 - 6^2 = \frac{36 \cdot 100 - 36 \cdot 49}{49} = \frac{36 \cdot 51}{49} \quad PC = \frac{6}{7} \sqrt{51}$

$$\operatorname{tg} \angle PBC = \frac{\frac{6}{7} \sqrt{51}}{6} = \frac{\sqrt{51}}{7}$$

$$\frac{a}{3} \in \left(-\infty; -\frac{\sqrt{51}}{7}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{51}}{7}; \infty\right)$$

$$a \in \left(-\infty; -\frac{3\sqrt{51}}{7}\right) \cup \left(\frac{3\sqrt{51}}{7}; \infty\right)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{Пусть } t = \log_5 2x; \quad s = \log_5 y$$

$$\begin{aligned} \text{Тогда } \log_5^4(2x) - 3\log_{2x} 5 &= \log_{8x^3} 625 - 3 & \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow t^4 - \frac{3}{t} &= \frac{4}{3t} - 3 & \Leftrightarrow t^4 - \frac{13}{3t} + 3 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log_5^4 y + 4\log_y 5 &= \log_{y^3} 0,2 - 3 & \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow s^4 + \frac{4}{s} &= -\frac{1}{3s} - 3 & \Leftrightarrow s^4 + \frac{13}{3s} + 3 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} t^4 - \frac{13}{3t} + 3 = 0 \\ s^4 + \frac{13}{3s} + 3 = 0 \end{cases} \quad t, s \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} t^5 + 3t - \frac{13}{3} = 0 \\ s^5 + 3s + \frac{13}{3} = 0 \end{cases}$$

$$\text{Сложим эти ур-ия: } t^5 + s^5 + 3(s+t) = 0$$

$$(s+t)(s^4 - s^3t + s^2t^2 - st^3 + t^4 + 3) = 0$$

Заметим, что $s^4 - s^3t + s^2t^2 - st^3 + t^4 > 0$, т.к. $s^5 + t^5 = 0$
тогда и только тогда, когда $t = -s$.

$$\text{Отсюда } s^4 - s^3t + s^2t^2 - st^3 + t^4 + 3 > 3 \Rightarrow \text{не обращается в } 0$$

$$\Rightarrow s+t = 0$$

$$\begin{aligned} \log_5 2x + \log_5 y &= 0 & \Leftrightarrow \log_5 2xy = 0 & \Rightarrow 2xy = 1 & \Rightarrow \\ \Rightarrow xy &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } xy = \frac{1}{2}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$5x_1 - 5x_2 + y_2 - y_1 = 45 \Leftrightarrow x_1 - x_2 + \frac{y_2}{5} - \frac{y_1}{5} = 9$$

Теперь давайте уменьшим единичный отрезок оси y в пять раз

Теперь $O = (0; 0)$ $Q = (2; 20)$
 $P = (-16; 20)$ $R = (18; 0)$

У нас надо в таком параллелограмме найти все ~~пары~~ пары точек таких, что $x_1 - x_2 +$

Рассмотрим систему координат такую, что в ней ось x обычная, а ось y имеет ед. отрезок равный трем пяти ед. отрезкам изначальной системы коорд.

Тогда в новой системе коорд:

$$O = (0; 0) \quad P = (-16; 16)$$

$$Q = (2; 16) \quad R = (18; 0)$$

Заметим, что мы можем двигать наш параллелограмм на вектора с целыми координатами и от этого # подходящих пар не изменится, т.к.:

$$5(x_2 + \alpha_x) - 5(x_1 + \alpha_x) + (y_2 + \alpha_y) - (y_1 + \alpha_y) = 5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1$$

где α_x и α_y - сдвиги по осям x и y

Рассмотрим парал-м с вершинами $(-80; 80)$ $(10; 80)$; $(0; 0)$ $(0; 80)$

Заметим, что # искомых пар в парал-ме PQRO = # пар точек, таких, что $x_2 - x_1 + y_2 - y_1 = 45$ в новом парал-ме

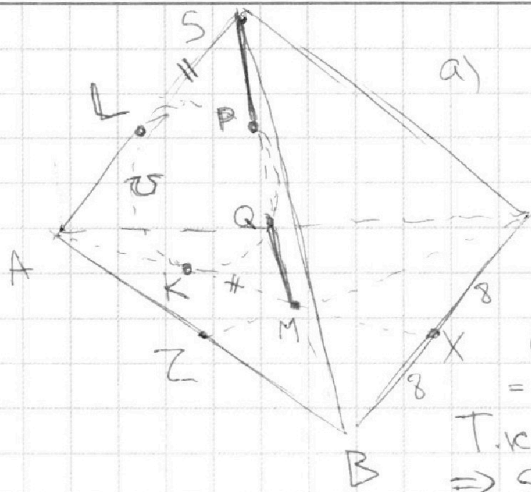
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



а) Пусть X - середина BC
Y - середина AC
Z - середина AB

Степень точки S отн-но $\alpha = SL^2 = SP \cdot SQ$

Степень точки M отн-но $\alpha = MK^2 = MQ \cdot MP$

Т.к. $MP = MQ = SP \Rightarrow SL^2 = MK^2 \Rightarrow SL = MK$

$AK = AL$ (отрезки касательных из A к α) \Rightarrow

$\Rightarrow AS = AM = BC = 16$

~~M~~ M - точка пересечения медиан $\Rightarrow AX = \frac{3}{2} AM = 24$
 $\Rightarrow AM = 2MX \Rightarrow$

$\Rightarrow MX = 8$. В $\triangle BMC$ медиана MX равна половине BC \Rightarrow

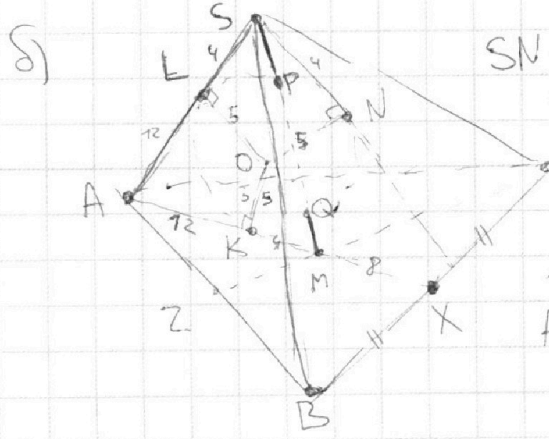
$\Rightarrow \angle BMC = 90^\circ$

M - точка пересечения медиан $\triangle ABC \Rightarrow S_{BMC} = \frac{S_{ABC}}{3} = \frac{100}{3}$

$\angle BMC = 90^\circ \Rightarrow S_{BMC} = \frac{BM \cdot MC}{2} \Rightarrow BM \cdot MC = \frac{200}{3}$

$BM = \frac{2}{3} BY; CM = \frac{2}{3} CZ \Rightarrow \frac{4}{9} BY \cdot CZ = \frac{200}{3} \Rightarrow BY \cdot CZ = 150$

$BY \cdot CZ \cdot AX = 24 \cdot 150 = 3600$



б) $SN = SL$ (отрезки касательных из S к α)

$SL = MK$ (доказано в п.а) $\Rightarrow MK = 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow AK = AL = 12$ (т.к. $AM = 16$)

ON - нормаль к (BCS) \Rightarrow

OK - нормаль к (ABC)

$\Rightarrow \angle((ABC), (BCS)) = \angle(ON, OK) = 90^\circ - \angle NOK$

$AK = KX = 12$

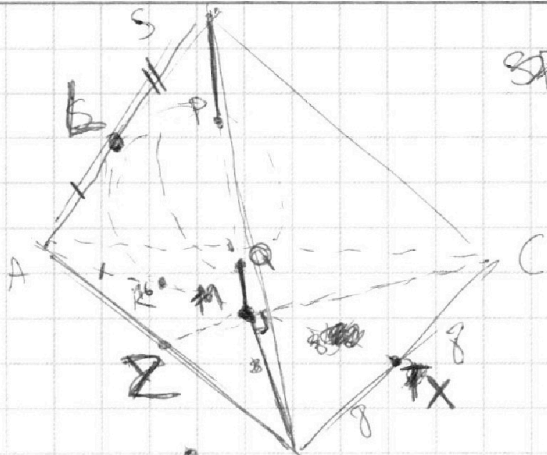
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

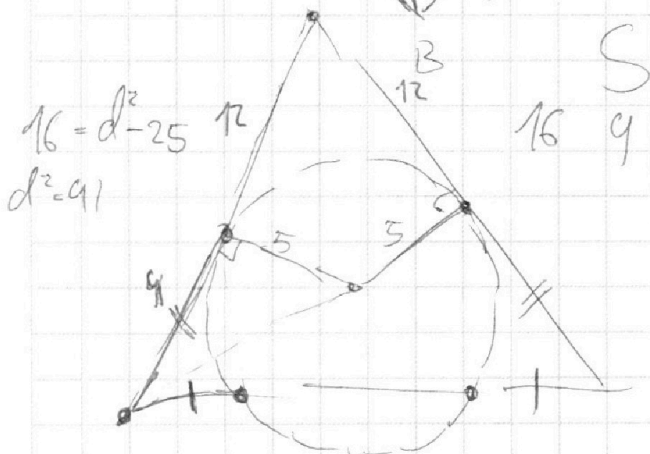
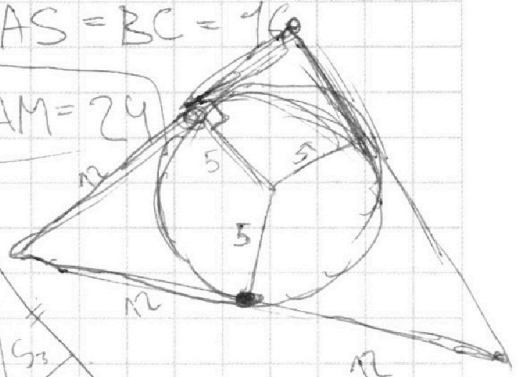


$$SP \cdot MK^2 = MQ \cdot MP$$

$$SL^2 = SP \cdot SQ \quad \Rightarrow MK = SL$$

$$AM = AS = BC = 16$$

$$AT = \frac{3}{2} AM = 24$$



$$16 = d^2 - 25$$

$$d^2 = 41$$

$$\frac{BM \cdot MC}{2} = \frac{100}{3}$$

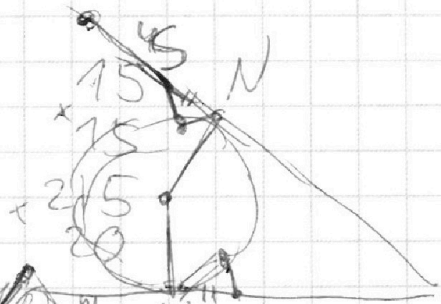
$$\frac{16}{24} \cdot \frac{16}{24} \cdot \frac{2}{3} = \frac{256}{32+24=56}$$

$$p = 28$$

$$BM \cdot MC = \frac{200}{3}$$

$$24 \cdot 16 \cdot 16$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \cdot 150 \\ \hline 24 \\ \cdot 60 \\ \hline 30 \\ \cdot 3600 \end{array}$$

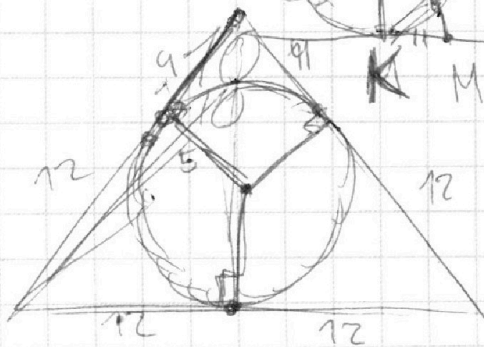


$$\sqrt{28 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 4}$$

$$7 \cdot$$

$$\begin{array}{r} 169 \\ \cdot 20 \\ \hline 3380 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 13 \\ \cdot 13 \\ \hline 39 \\ \cdot 13 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} y = \frac{a}{3}x + \frac{4}{3}b \\ (x^2 + y^2 = 1) \\ x^2 + (y-10)^2 = 36 \end{cases}$$

3600 -

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y = sx + t \end{cases} \quad 1 \text{ решение}$$

$$\begin{aligned} x^2 + s^2x^2 + 2sfx + t^2 - 1 &= 0 \\ x^2(s^2 + 1) + \dots \end{aligned}$$

$$x^2 + (y-10)^2 = 36$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{10-d} &= \frac{1}{6} \\ 6d &= 10-d \\ 7d &= 10 \\ d &= \frac{10}{7} \end{aligned}$$

$$\frac{36 \cdot 100 - 36 \cdot 49}{49} = \frac{36 \cdot 51}{49}$$

25
9+
18
6
2

$$36 \cdot 100 - 36 \cdot 49 = 36 \cdot 51$$

$$\frac{70-10}{7}$$

$$\frac{100-36}{65}$$

$$d^2 - 11 = (10-d)^2 - 36$$

$$d^2 - 1 = 100 - 36 + d^2 - 20d$$

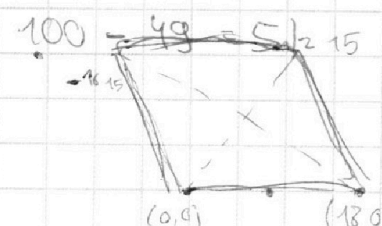
$$20d = 65$$

$$d = \frac{13}{4}$$

$$x_2 - x_1 + y_2 - y_1 = \frac{60}{7}$$

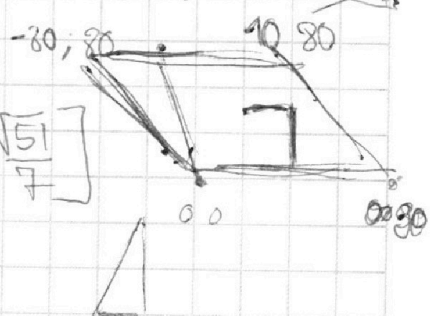
$$a \in \left(-\infty; -\frac{\sqrt{51}}{7}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{51}}{7}; \infty\right)$$

$$\frac{d}{10-d} = \frac{x+t}{1}$$



$$\tan \alpha = \frac{\sqrt{51}}{7} \quad a \in \left[-\frac{\sqrt{51}}{7}; \frac{\sqrt{51}}{7}\right]$$

$$\frac{18}{5} = 3.6$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

$$\log_{2x} 5 = t$$

$$\frac{1}{t^4} - 3t = \frac{4}{3}t - 3$$

$$\left(\frac{13t}{3} - \frac{1}{t^4} - 3 = 0 \right)$$

$$\frac{13s}{3} + \frac{1}{s^4} + 3 = 0$$

$$\left(t^5 + 3t - \frac{13}{3} = 0 \right)$$

$$\frac{13}{3t} - t^4 - 3 = 0$$

$$\frac{13}{3} \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{s} \right) + s^4 - t^4 = 0$$

$$\frac{13}{3} \left(\frac{t+s}{ts} \right) + (s-t)(s+t)(s^2+t^2) = 0$$

$$(t+s) \left(\frac{13}{3ts} + (s-t)(s^2+t^2) \right) = 0$$

$$t+s=0 \quad \log_{52x} + \log_{5y} = 0 \quad \log_{52xy} = 0 \Rightarrow 2xy = 1 \Leftrightarrow xy = \frac{1}{2}$$

$$13 = 3ts(t-s)(s^2+t^2)$$

$$(s+t)(s^4 - s^3t + s^2t^2 - st^3 + t^4 + 3) = 0$$

$$\begin{matrix} 5^2 \\ 1 \\ 25 \end{matrix}$$

$$\log_y 5 = s$$

$$\frac{1}{s^4} + 4s = -\frac{1}{3}s - 3$$

~~$$\frac{11}{3}s - \frac{1}{s}$$~~

$$\log_{5y} = s$$

$$\frac{13}{3s} + s^4 + 3 = 0$$

$$s^5 + 3s + \frac{13}{3} = 0$$

$$s^5 + t^5 + 3t + 3s = 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$ab \geq 2^8 3^{14} 5^{12}$$

$$bc \geq 2^{12} 3^{20} 5^{17}$$

$$ac \geq 2^{14} 3^{21} 5^{39}$$

$$x+y \geq 8$$

$$y+z \geq 12 \quad 2(x+y+z) \geq 34$$

$$z+x \geq 14 \quad x+y+z \geq 17$$

$$abc : 2^{14} 3^{21} 5^{39}$$

$$\begin{array}{r}
 + 34 \\
 + 21 \\
 \hline
 55
 \end{array}$$

$$a =$$

$$x+y = 8$$



$$7$$



$$x+y+z = 17$$

$$z = 3$$

$$x = 5$$

$$y = 3$$

$$x+y+z = 28$$

$$x+y = 15$$

$$y+z = 20$$

$$z+x = 21$$

$$z = 13$$

$$x = 8$$

$$y = 7$$

$$12$$

$$+ 17$$

$$+ 29$$

$$\hline 39$$

$$68$$

$$14$$

$$x+y+z = 34$$

$$x+y = 12$$

$$y+z = 17$$

$$z+x = 39$$

$$56$$

$$68$$

$$y =$$

$$c$$

$$a+b \geq 12$$

$$b+c \geq 17$$

$$(a+c \geq 39)$$

$$2(a+b+c) \geq a+b \geq 68$$

$$\frac{1}{1}$$

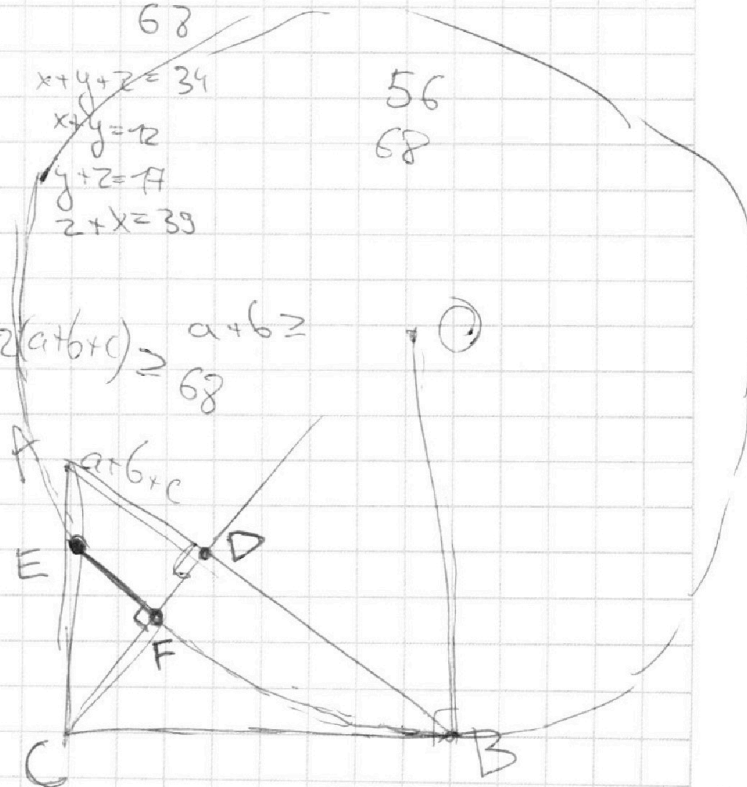
$$c = 20$$

$$a$$

$$\log_{8x^3} 625 = \frac{1}{\log_{625} 8x^3}$$

$$\frac{3}{5}$$

$$= \frac{1}{\frac{3}{4} \log_5 2x}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\sin(0) = 0$

$0 = 0$

$10 \arcsin(0) = 0$

$10 \arcsin(\phi) = \pi$

$10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$

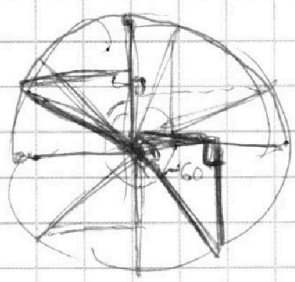
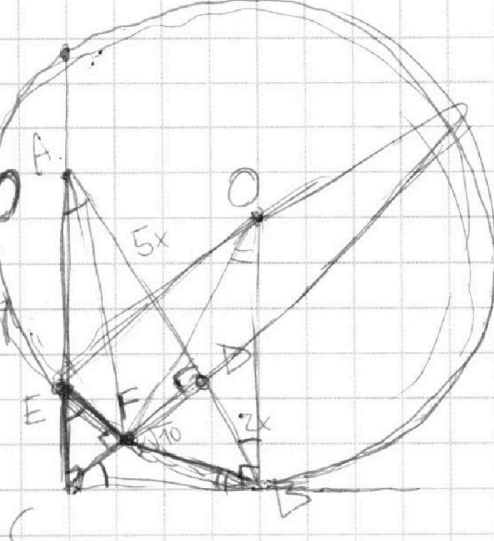
$\cos x$

$10 \arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi-x}{2}\right)\right)$

$10\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \pi - 2x$

5

$\frac{5\sqrt{10}}{10} = \frac{\sqrt{10}}{2}$



$\frac{5x}{CD} = \frac{CD}{2x}$

$CE \cdot CA = BC^2$

$PE = 2$

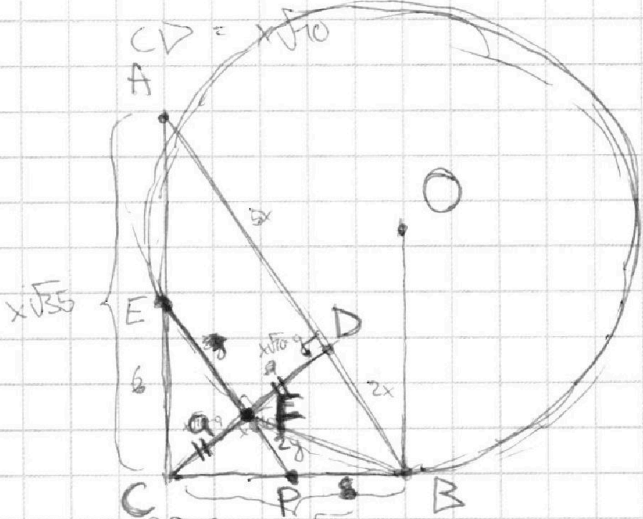
35

-14

49

$90 - (-60)$

$= 150$



$PF = \frac{2x}{x\sqrt{10}} \cdot a$

$PE = \frac{7x}{x\sqrt{10}} \cdot a$

$CP = \frac{x\sqrt{14}}{x\sqrt{10}} \cdot a$

$BP = x\sqrt{14} \left(1 - \frac{a}{x\sqrt{10}}\right)$

$25x^2 + 10x^2$

$x\sqrt{35}$

$\frac{a}{x\sqrt{10}} = \frac{6}{x\sqrt{35}}$

$BP^2 = PE \cdot PF$

$14x^2 \left(\frac{10x^2 + a^2 + 2ax\sqrt{10}}{10x^2}\right) = \frac{14x^2 a^2}{x^2 \cdot 10}$

$b = \frac{ax\sqrt{35}}{\sqrt{10}} = \left(a \cdot \sqrt{\frac{7}{2}}\right)$

$x\sqrt{35} = ax\sqrt{\frac{7}{2}}$

$14 \left(\frac{10 + a^2 + 2ax\sqrt{10}}{10}\right) = \frac{14a^2}{10}$

$7ax^2 \sqrt{\frac{7}{2}}$

$14(10 + a^2 + 2ax\sqrt{10}) = 14a^2$

2

$140 = 28a\sqrt{10}$

$a = \frac{5\sqrt{10}}{10} =$

$\cdot 5 = a\sqrt{10}$