



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.
4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-12; 24)$, $Q(3; 24)$ и $R(15; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{ord}_2(a) = \alpha_1, \text{ord}_7(a) = \alpha_2$$

$$ab: 2^{14} \cdot 7^{10} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 \geq 14 \\ \alpha_2 + \beta_2 \geq 10 \end{cases}$$

$$\text{ord}_2(b) = \beta_1, \text{ord}_7(b) = \beta_2$$

$$bc: 2^{17} \cdot 7^{17} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta_1 + \gamma_1 \geq 17 \\ \beta_2 + \gamma_2 \geq 17 \end{cases}$$

$$\text{ord}_2(c) = \gamma_1, \text{ord}_7(c) = \gamma_2$$

$$ac: 2^{30} \cdot 7^{37} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \gamma_1 \geq 30 \\ \alpha_2 + \gamma_2 \geq 37 \end{cases}$$

$$(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2) \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{aligned} \text{ord}_2(abc) &= \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 \\ \text{ord}_7(abc) &= \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 \end{aligned} \Rightarrow \text{требуется найти } \min \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 \text{ и } \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2$$

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 \geq 14 \\ \beta_1 + \gamma_1 \geq 17 \\ \gamma_1 + \alpha_1 \geq 30 \end{cases} \Rightarrow 2(\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1) \geq 14 + 17 + 30 = 51$$
$$\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 \in \mathbb{Z} \Rightarrow \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 \geq 26$$

$$\begin{cases} \alpha_2 + \beta_2 \geq 37 \\ \beta_2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 \geq 37$$

$$\begin{cases} abc: 2^{26} \cdot 7^{37} \\ abc: 7^{37} \end{cases} \Rightarrow abc: 2^{26} \cdot 7^{37} \Rightarrow abc \geq 2^{26} \cdot 7^{37}$$

Пример: $a = 2^9 \cdot 7^{10}, b = 2^5, c = 2^{12} \cdot 7^{27}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Дробь $\frac{x}{y}$ сократима на $k \Leftrightarrow \text{НОД}(x, y) = k$

$\frac{a}{b}$ несокр. $\Leftrightarrow \text{НОД}(a, b) = 1$

$$m \leq \text{НОД}(a+b, a^2 - 6ab + b^2) = (a+b, a^2 - 6ab + b^2 - (a+b)^2) =$$

$$= (a+b, -8ab) \stackrel{\uparrow}{=} (a+b, 8) \leq 8$$

докажем, что $(a+b, ab) = 1$

Пусть $(a+b, ab) \geq p$ (p - простое)

$ab : p \Rightarrow a : p$ (без оч. дел.)

$a+b : p \Rightarrow b : p$ (т.к. $a : p$), $\Rightarrow (a, b) \geq p$, противоречие

$m \leq 8 \Rightarrow$ наиб. $m = 8$

Пример: $a=1, b=7$ $\frac{1}{7}$ несокр.

$$\frac{7+1}{1^2 - 6 \cdot 7 \cdot 1 + 7^2} = \frac{8}{1+49-42} = \frac{8}{8} = 1 \quad \swarrow \text{сокр. на } 8$$

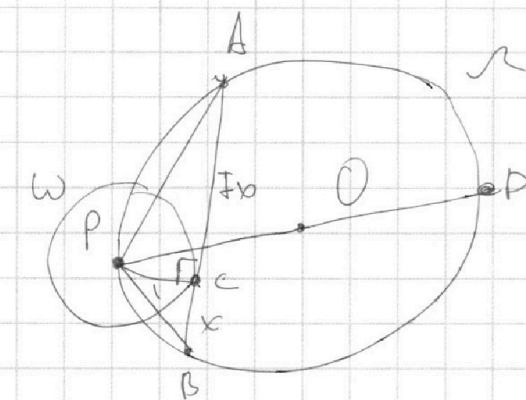
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$AC = 7x, CB = x$$

Пусть $AC = 7x, CB = x$

$$\sin \angle APB = \frac{AB}{2R\sqrt{2}} = \frac{8x}{2 \cdot 7x \sqrt{2}} = \frac{4}{7\sqrt{2}}$$

$$\cos \angle APB = \sqrt{1 - \left(\frac{4}{7\sqrt{2}}\right)^2} = \dots$$

Заметим, что если не фиксировать отношение, то перемещая A по Ω , так чтобы AB оставалась касательной, то AC/CB будет увеличиваться (A лежит на одной из дуг PD (P-центр ω , D-diam. центр ω и P точки))

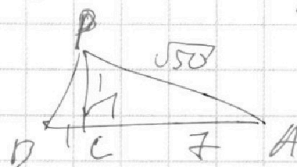
Значит подходим всего однократно.

Покажем, что $x=1$ подходит. ($AB=8$)

и при $x=1$ $\triangle ACB$ - равноб. равноуг. (AB -касат. $\Rightarrow \angle PCB = 90^\circ$)

$$\angle PBA = 45^\circ$$

$$AP = \sqrt{7^2 + 1^2} = \sqrt{50}$$



Радиусе окр. Ω как оп. окр. $\triangle APB$:

$$R = \frac{AP}{2 \sin \angle PBA} = \frac{\sqrt{50} \cdot \sqrt{2}}{2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{100}}{2} = \frac{10}{2} = 5,$$

т.т.д.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$$

$$(\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1})(\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1}) = (2 - 7x) \cdot$$

$$(\sqrt{2x^2 - 5x + 3})^2 - (\sqrt{2x^2 + 2x + 1})^2 = (2 - 7x)(\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1}) \cdot (\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1})$$

$$2x^2 - 5x + 3 - 2x^2 - 2x - 1 = (2 - 7x)(\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1})$$

$$-7x + 2 = (2 - 7x)(\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1})$$

$$(2 - 7x)(\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} - 1) = 0$$

$$2x^2 - 5x + 3 \geq 0 \Leftrightarrow (2x - 3)(x - 1) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x \geq \frac{3}{2} \end{cases}$$

~~Условие~~ $2x^2 + 2x + 1 > 0$ при $\forall x$, т.к. $D = 4 - 4 \cdot 2 \cdot 1 < 0$

Если $\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 1$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{2x^2 + 2x + 1} \leq 1 \Rightarrow 2x^2 + 2x + 1 \leq 1$$

$$x(x+1) \leq 0$$

$$0 \leq x \leq -1 \Rightarrow x \in \emptyset$$

$$\sqrt{2x^2 + 2x + 1} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{2x^2 - 5x + 3} \leq 1 \Rightarrow 2x^2 - 5x + 3 \leq 1$$

$$2x^2 - 5x + 2 \leq 0$$

$$(2x - 1)(x - 2) \leq 0$$

$$\frac{1}{2} \leq x \leq 2$$

$$\begin{cases} -1 \leq x \leq 0 \\ \frac{1}{2} \leq x \leq 2 \end{cases}, \text{противоречие}$$

Значит $\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} - 1 \neq 0$

$$2 - 7x = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{7} \quad (x \text{ удовлетворяет условию } \begin{cases} x \leq 1 \\ x \geq \frac{3}{2} \end{cases})$$

Ответ: $x = \frac{2}{7}$

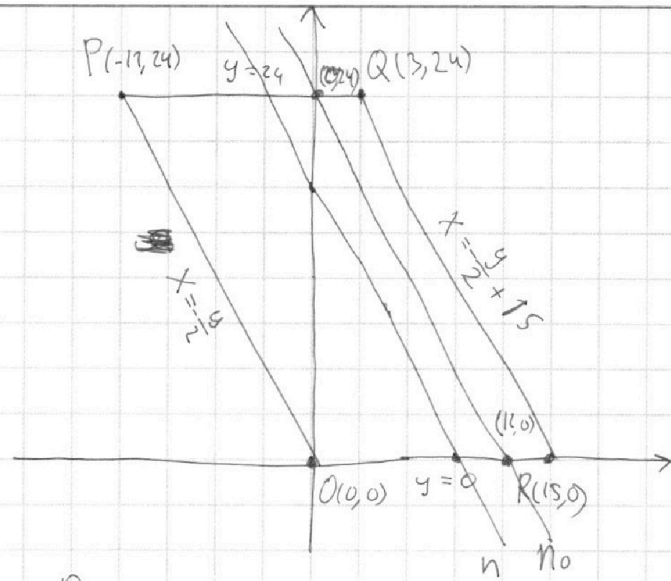
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Уравнение прямой
 OP: $x = -\frac{y}{2}$ (т. P и O принадлежат)
 RQ: $x = -\frac{y}{2} + 15$ (т. R и Q принадлежат)

Условие того, что пара точек (x_0, y_0) лежит внутри параллелограмма, равносильно:

$$\begin{cases} 0 \leq y_0 \leq 24 \\ -\frac{y_0}{2} \leq x_0 \leq -\frac{y_0}{2} + 15 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq y_0 \leq 24 \\ 0 \leq 2x_0 + y_0 \leq 30 \end{cases}$$

Покажем, что кол-во решений системы $\begin{cases} 0 \leq y_0 \leq 24 \\ 2x_0 + y_0 = n \end{cases}$ ($n \in \mathbb{Z}, 0 \leq n \leq 30$)

равно 13. ~~Заметим, что при разном n~~

$2x_0 + y_0 = n$ - прямая, пар. PQ и QR, т.е. при сдвиге (при замене n на другое) кол-во решений не изм.

Рассмотрим $n = 24$. Пересеч. $2x_0 + y_0 = 24$ с осями совпадают с пересеч. $2x_0 + y_0$ со сторонами параллелограмма, т.е. ~~все решения лежат внутри~~ т.е. $x_0, y_0 \geq 0$, причём все такие значения x_0 и y_0 подходят.

~~следовательно~~ $y_0 \geq 0 \Rightarrow 0 \leq 2x_0 \leq 24$, y_0 x_0 13 реш, т.е.г.

$$(2x_2 + y_2) - (2x_1 + y_1) = 12, \text{ следовательно } \text{любой } 0 \leq n_1 \leq 18 \text{ соответствует } 12 \leq n_2 \leq 30.$$

Для фиксированного n_1 решений (При $n_1 < 0$ реш нет, при $n_1 > 18$ $n_2 > 30$ и реш нет)

$13 \cdot 13 = 169$ (каждо $(x_i, y_i; x_i, y_i)$ выбираются независимо)

Выбрав n_1 13 способов, получим ответ $13 \cdot 169 = 3221$

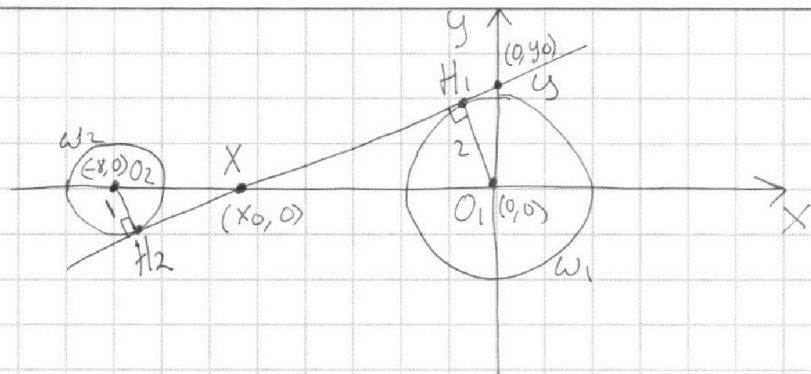
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$(x+8)^2 + y^2 = 1$ и $x^2 + y^2 = 4$ — окружности ω_1 и ω_2 радиусами 1 и 2.
 Из центра O_1 проведем перпендикуляр к прямой l .
 Увидим, что они не пересекаются. Решения ур-ний:

$x^2 + y^2 = 4$ — окружность ω_1 и её внутренность

$(x+8)^2 + y^2 = 1$ — окружность ω_2 и её внутренность

Т.к. окружности не пересекаются, решим

$(x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0$ будут окружности ω_1 и ω_2 , и их внутренности.

$ax - y + 10b = 0$ — прямая l с угл. коэф-том a при x .

Если она пересекает оси Oy и Ox в точках

$Y(0, y_0)$ и $X(x_0, 0)$, то $a = -\frac{y_0}{x_0}$.

Если l не проходит внутри одной из окружностей, то решений ~~первого уравнения~~ бесконечно много, если не касается одной

из окружностей, то не более 1-го, т.к. со второй окружностью l не имеет 1 и 2

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



будет не более 1-го пересечения.

Значит l - общая касательная к ω_1 и ω_2 .

K_1 и K_2 - точки касания.

$\triangle XO_1K_1 \sim \triangle XO_2K_2$ (т.к. X - пересечение линий центров и касательной)

$$\frac{XO_1}{O_1K_1} = \frac{XO_2}{O_2K_2} \Rightarrow \frac{|XO_1|}{2} = \frac{|XO_2|}{1} \Rightarrow |XO_1| = 2|XO_2|$$

$$X_0^2 = 4(X_0^2 + 16X_0 + 64)$$

$$3X_0^2 + 64X_0 + 256 = 0$$

$$X_0 = \frac{-64 \pm \sqrt{64^2 - 4 \cdot 3 \cdot 256}}{6} = \frac{-32 \pm 16}{3} \Rightarrow \begin{cases} X_0 = -\frac{16}{3} \\ X_0 = -16 \end{cases}$$

Площадь $\triangle XO_1O_2$ 2-мя способами:

$$XO_1 \cdot O_1O_2 = XO_2 \cdot O_1K_1$$

$$|XO_1| \cdot |YO_1| = \sqrt{X_0^2 + Y_0^2} \cdot 2 \Rightarrow X_0^2 Y_0^2 = 4(X_0^2 + Y_0^2) \Rightarrow$$

$$Y_0^2 = \frac{4X_0^2}{X_0^2 - 4}$$

$$a^2 = \frac{Y_0^2}{X_0^2} = \frac{4}{X_0^2 - 4} = \begin{cases} \frac{4}{16^2 - 4} = \frac{1}{60} \\ \frac{4}{\left(\frac{16}{3}\right)^2 - 4} = \frac{3}{52} \end{cases}$$

При любом ^{таком a^2} существуют X_0 и Y_0 , т.е. существует прямая и существует b .

Значит $\begin{cases} a = \pm \sqrt{\frac{1}{60}} \\ a = \pm \sqrt{\frac{3}{52}} \end{cases}$

Мет $2a^2$

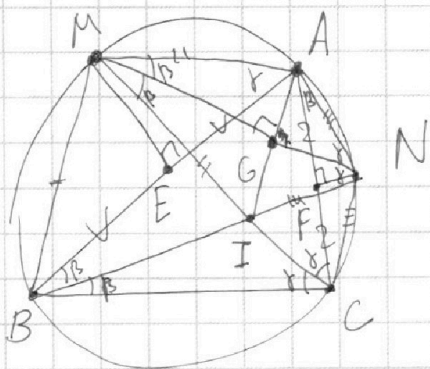
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



I - центр впис. сф.

E, F, G - середины AB, AC, AI
 M - середина AB $\Rightarrow AM = BM = MI$,
 CM - бис-са $\angle ACB$ ($\angle BCM = \angle MCA = \gamma$)
 по лемме о туп. углу. Аналогично
 $AN = NI = NC$, $\angle ABN = \angle CBN = \beta$.

G - середина AI, $AM = MI$ ($\Rightarrow \triangle AMI$ - равноб.) $\Rightarrow MG$ - высота и бис-са $\angle IMA$. $\angle IMA \stackrel{\text{(по вписанной)}}{=} \angle ABC = 2\beta \Rightarrow \angle IMG = \angle AMG = \beta$.

F - середина AC, $\triangle ANC$ - равноб. ($AN = NC$) $\Rightarrow FN$ - высота и бис-са $\angle ANC$. $\angle NAC = \angle NBC = \beta$ по впис.

Угол $\triangle ANF$ и $\triangle AMG$ - прямоугольные с углом β при вершине, т.е. $AG = AM \sin \beta$, $FN = AF \operatorname{tg} \beta$, $AN = \frac{NF}{\sin \beta}$.

Аналогично $AG = AN \sin \gamma$, $ME = AE \operatorname{tg} \gamma$, $AM = \frac{EM}{\sin \gamma}$.

Также ME и NF - высоты $\triangle AMB$ и $\triangle ANC$ соотв., $\Rightarrow ME = 4,5$, $NF = 2$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AF} = \frac{\frac{ME}{\operatorname{tg} \gamma}}{\frac{FN}{\operatorname{tg} \beta}} = \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \gamma} \cdot \frac{4,5}{2}$$

По т. синусов $\frac{AB}{AC} = \frac{\sin \angle ACB}{\sin \angle ABC} = \frac{\sin \gamma}{\sin 2\beta}$

$$\frac{\sin \gamma}{\sin 2\beta} = \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \gamma} \cdot 2,25 \Rightarrow 2,25 = \frac{\operatorname{tg} \gamma \cdot \sin \gamma}{\operatorname{tg} \beta \cdot \sin 2\beta} = \frac{\frac{\sin \gamma}{\cos \gamma} \cdot 2 \sin \gamma \cos \gamma}{\frac{\sin \beta}{\cos \beta} \cdot 2 \sin \beta \cos \beta} = \frac{\sin^2 \gamma}{\sin^2 \beta}$$

$$\frac{\sin \gamma}{\sin \beta} = 1,5$$

Маса / usl

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

 МФТИ

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$AG = AN \sin \gamma = \frac{NF}{\sin \beta} \sin \gamma = NF \frac{\sin \gamma}{\sin \beta} = \frac{NF \sin \gamma}{\sin \beta} = \frac{2 \cdot 1,5}{2} = 3$$

~~Ответ: 3~~

$$AI = 2AG = 6$$

Ответ: $AI = 6$

Мисс Зюз 2

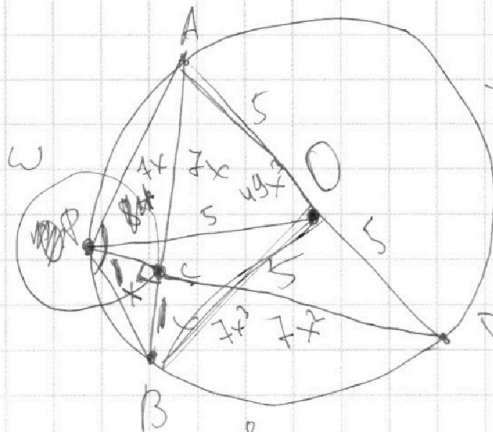
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



~~21~~
~~35~~
~~175~~
~~105~~
~~1225~~
 $\sin \alpha = \frac{4}{5}x$
 $\cos \alpha = \frac{3}{5}x$
 $50 \cdot g = 450$
 $g = 9$

$$x^2 + 1 + 49x^2 + 1 - 2 \cdot \frac{3}{5}x \cdot \sqrt{5} = 64x^2$$

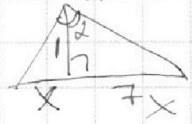
~~349~~
~~450~~
 $2.5 \cdot g$

$$349x^6 + 450x^4 + 9x^2 = 1225x^4 - 350x^2 + 25$$

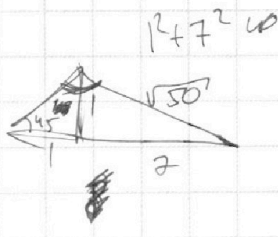
~~2 \cdot \frac{3}{5}x \cdot \sqrt{5} = 2 - 14x^2~~
~~3 \cdot 2x \cdot \sqrt{5} = 5 - 35x^2~~

$$49x^6 - 775x^4 + 341x^2 - 25 = 0$$

$BP^2 = x \cdot 8x$
 $\cos x = \frac{3}{5}x$



$8x = \sqrt{5} \cdot \frac{4}{5}x$



$\frac{\sqrt{50}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 10$

~~35~~
~~105~~
~~105~~
~~175~~
~~175~~
~~1050~~
~~1225~~

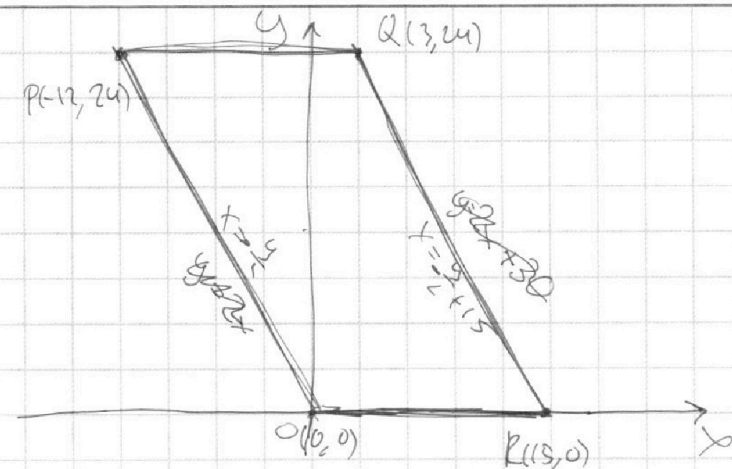
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



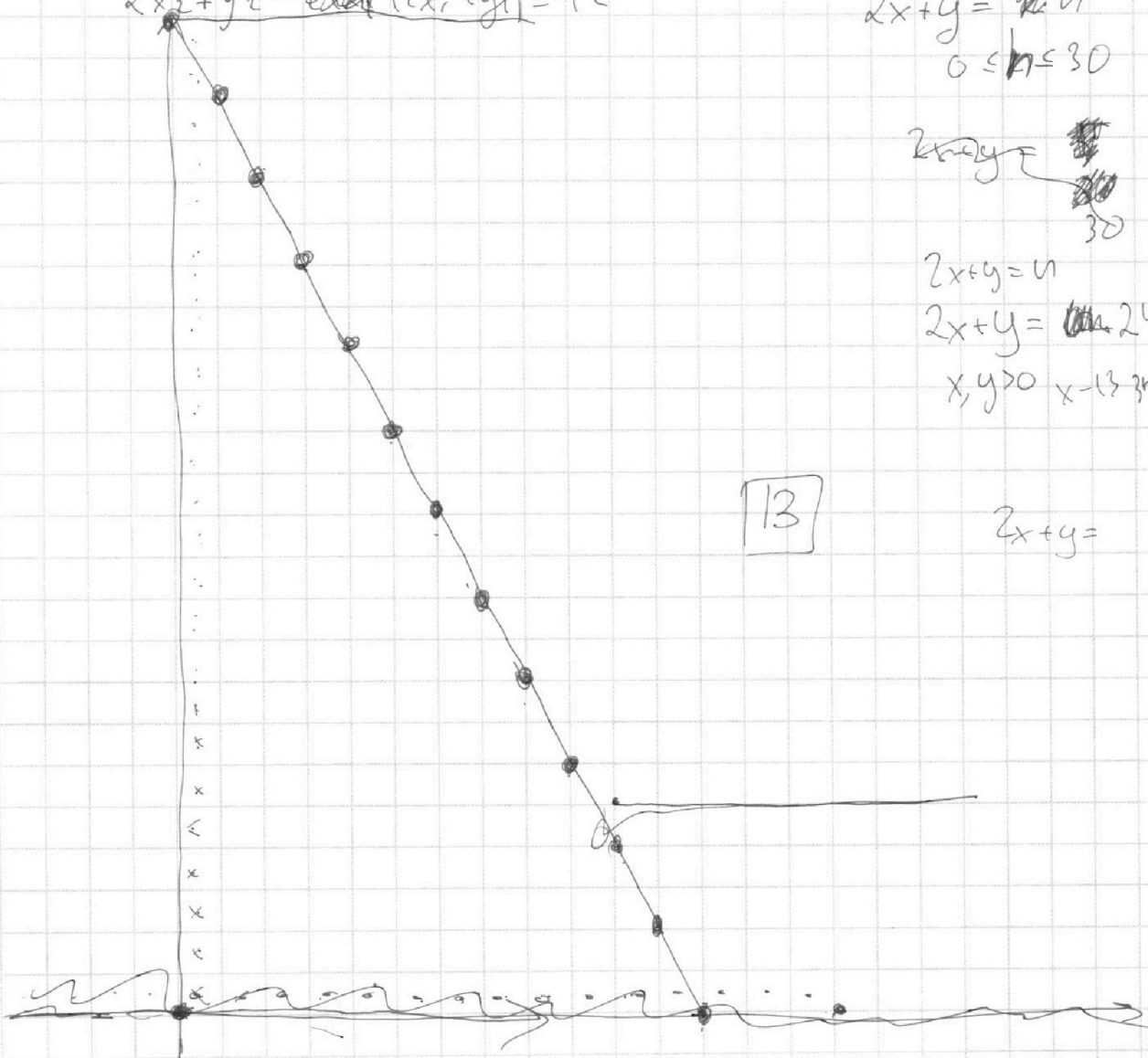
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$0 \leq y \leq 24$
 ~~$0 \leq x \leq 15$~~

~~$0 \leq x \leq 15$~~
 $-\frac{y}{2} \leq x \leq \frac{y}{2} + 15$
 $-y \leq 2x \leq y + 30$
 $0 \leq 2xy \leq 30$
 $2x + y = \frac{1}{2}n$
 $0 \leq n \leq 30$

$2x_2 + y_2 - (2x_1 + y_1) = 12$



$2xy \in [0, 30]$
 $2x + y = n$
 $2x + y = 24$
 $x, y > 0$

13

$2x + y =$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

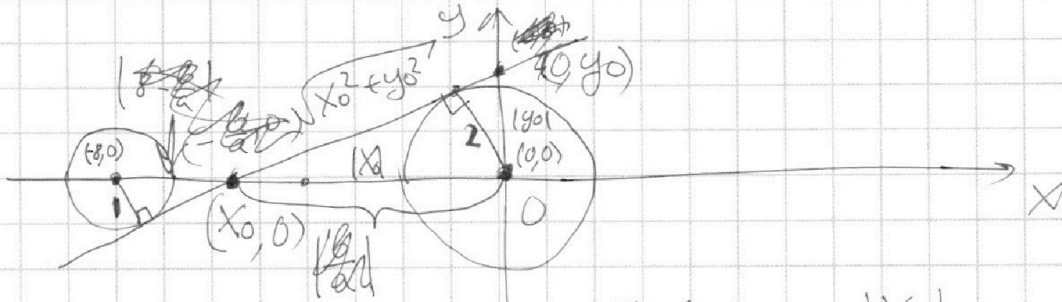
Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{8 + \frac{b}{a}x_0}{1} = \frac{16}{3}$$

$$16 = 3 \frac{b}{a} x_0 - \frac{16}{3}$$

$$x_0 = \frac{16}{3}$$

~~$$x_0 = -\frac{b}{a}$$~~

$$\frac{|x_0|}{|x_0 + 8|} = \frac{2}{1}$$

$$|x_0| = 2|x_0 + 8|$$

$$x_0^2 = 4(x_0^2 + 16x_0 + 64)$$

$$3x_0^2 + 64x_0 + 256 = 0$$

$$\frac{\sqrt{x_0^2 + y_0^2} \cdot 2}{2} = \frac{y_0 x_0}{2}$$

$$4(x_0^2 + y_0^2) = x_0^2 y_0^2 \quad -\frac{y_0}{x_0}$$

$$y_0^2(x_0^2 - 4) = 4x_0^2$$

~~$$y_0^2 = \frac{4x_0^2}{x_0^2 - 4}$$~~

$$y_0^2 = \frac{4x_0^2}{x_0^2 - 4}$$

$$\left(\frac{y_0}{x_0}\right)^2 = \frac{4x_0^2}{x_0^2 - 4} = \frac{4}{4x_0^2 - 4}$$

$$= \frac{-32 \pm 16}{3} = \begin{bmatrix} \frac{16}{3} \\ -16 \end{bmatrix}$$

$$ax + by = c$$

$$\frac{1}{64 - 4} = \frac{1}{60} = \frac{1}{60}$$

$$\frac{1}{64 - 4} = \frac{1}{60} = \frac{3}{52}$$

~~$$y_0 = b \quad x_0 = -\frac{b}{a}$$~~

$$\frac{y_0}{x_0} = \frac{b}{-\frac{b}{a}} = -a$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{x^2 - 5x + 3} = | - \sqrt{x^2 - 5x + 3} |$$

~~Вот так~~

$$5 \pm \sqrt{25 - 4x^2} \\ 4x^2$$

$$2x^2 - 5x + 3 = 1 + 2x^2 + 2x + 1 - 2\sqrt{x^2 - 5x + 3}$$

244/4 61

$$-7x + 1 = 2\sqrt{x^2 - 5x + 3}$$

~~222~~

$$11 \pm \sqrt{121 - 4x^2}$$

$$49x^2 - 14x + 1 = 8x^2 + 8x + 4$$

$$41x^2 - 22x - 3 = 0$$

$$0 \leq 2x^2 - 5x + 3$$

$$x(x+2) \leq 0$$

$$2x^2 - 5x + 3 = 1 + 2x^2 + 2x + 1 -$$

$$2x^2 - 5x + 3 \leq 1 \\ 2x^2 - 5x + 2 \leq 0 \\ (2x - 1)(x - 2) \leq 0 \\ \frac{1}{2} \leq x \leq 2$$

$$2x^2 - 5x + 3 \leq 1$$

$$2x^2 - 5x + 2 \leq 0$$

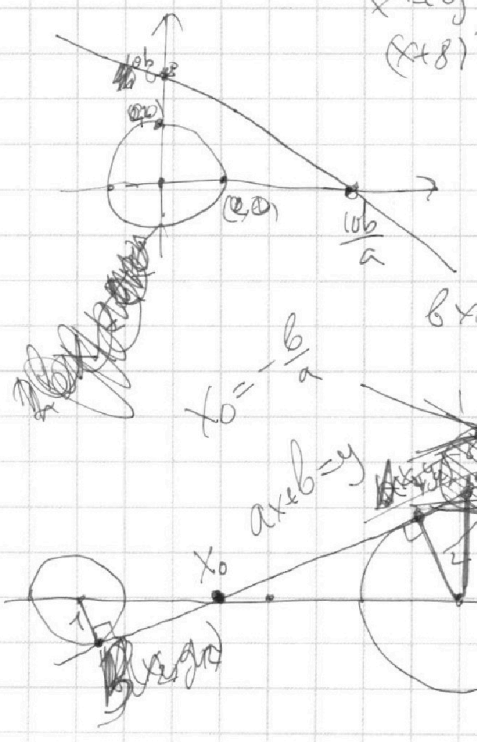
$$(2x - 1)(x - 2) \leq 0$$

$$\frac{1}{2} \leq x \leq 2$$

$$x^2 + y^2 - 4 \leq 0$$

$$(x+8)^2 + y^2 - 1 = 0$$

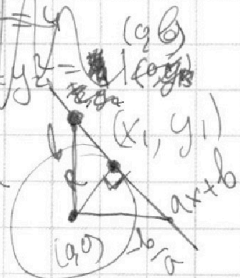
$$y = ax + b$$



$$5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 2 \cdot 27} \\ 4$$

$$= \frac{5 \pm \sqrt{52}}{4}$$

$$x^2 + y^2 = R^2 \\ b^2 - R^2 = y_1^2 - R^2 \\ b^2 + y_1^2 - R^2 = 2b^2$$



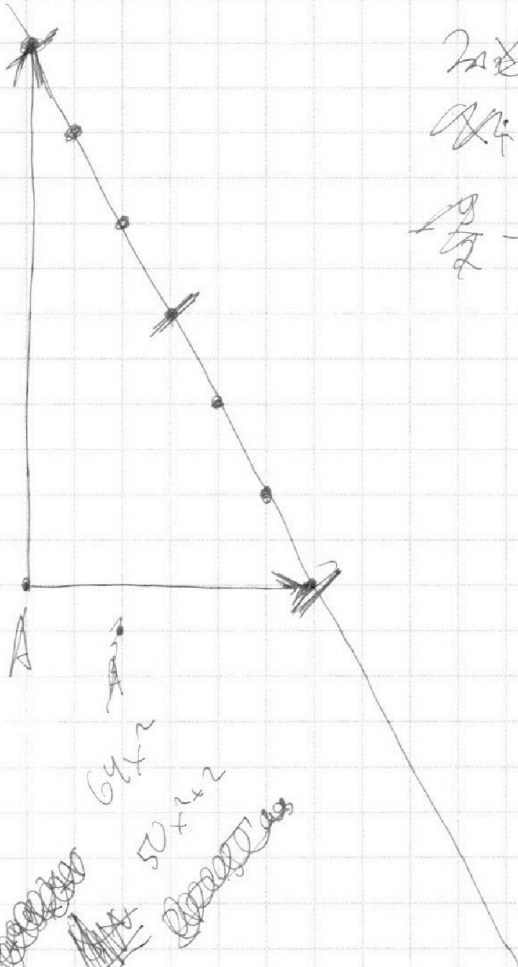
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$2x_1 + y_1 = 12$$

$$0 \leq y_1 \leq 24$$

$$-\frac{y}{2} - \frac{y}{2} \leq x_1 \leq -\frac{y}{2} + 15$$

~~$$-\frac{y}{2} \leq x_1 \leq \frac{y}{2}$$~~

$$-y_1 \leq 2x_1 \leq -y_1 + 30$$

$$-y_2 \leq 2x_2 \leq -y_2 + 30$$

$$0 \leq 2x_1 + y_1 \leq 30$$

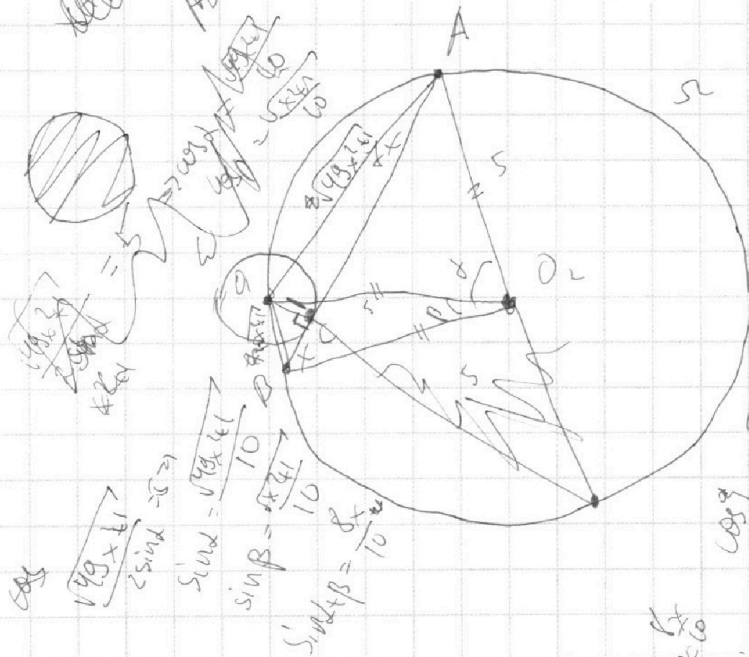
$$0 \leq 2x_2 + y_2 \leq 30$$

$$(2x_2 + y_2) - (2x_1 + y_1) = 12$$

$$2x_1 + y_1 = 10, 2, 3$$

$$2x_2 + y_2 = 2, 3, 4, 15$$

$$2x_1 + y_1 = \frac{1}{2}n \quad 0 \leq n \leq 15$$



$$\cos \alpha = \frac{10 \times 11}{10 \times 10}$$

$$\sin \alpha = \frac{10 \times 41}{10 \times 10}$$

$$\sin \beta = \frac{8 \times 10}{10 \times 10}$$

$$\cos \alpha = \frac{40 \times 11}{100} = \frac{440}{100} = \frac{11}{25}$$

$$\cos \beta = \frac{80}{100} = \frac{4}{5}$$

$$\cos \alpha = \frac{11}{25} = \frac{11 \cos \beta + 5 \sin \beta}{25}$$

$$11 \cos \alpha = 11 \cos \beta + 5 \sin \beta$$

$$11 \sqrt{1 - \frac{11^2}{25^2}} = 11 \times \frac{24}{25} + 5 \sqrt{1 - \frac{16}{25}}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

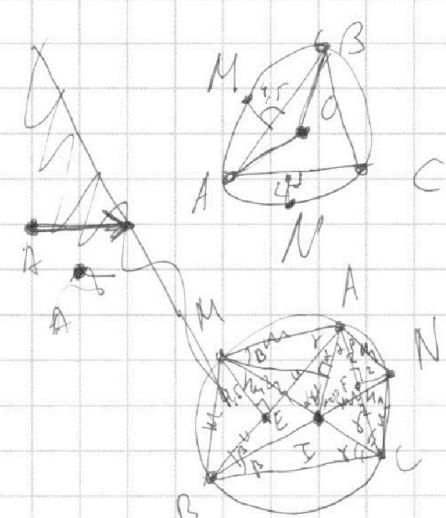
- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} ax+cy+igb = 0 \\ (x+ay)^2 - (x^2+ay^2) = 50 \\ x^2+ay^2 \leq 4 \\ (x+8)^2+ay^2 \leq 1 \end{cases}$$



$\angle F = 90^\circ$
 $AM = AN = \frac{AE}{\sin \beta}$
 $AN = \frac{AE}{\sin \beta}$

~~scribbles~~
 $x^2+ay^2 = y - \epsilon$
 $x^2+ay^2 = 1 - \epsilon$

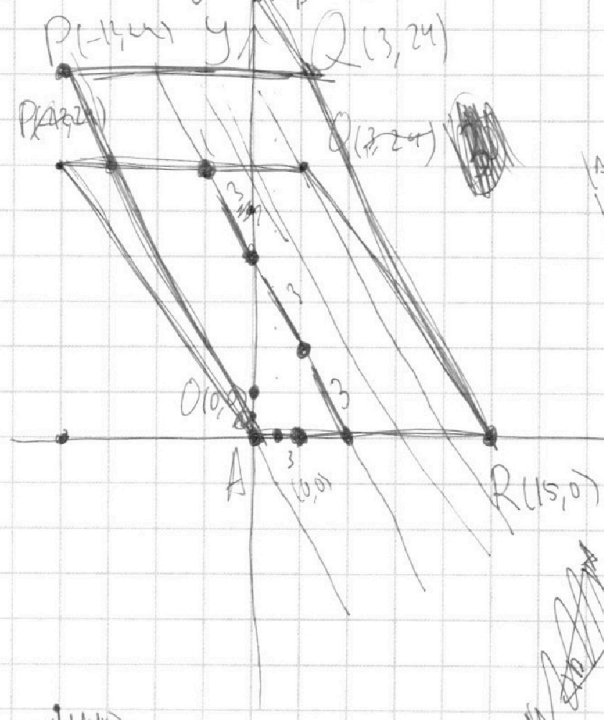
$$\frac{AB}{\sin \gamma} = \frac{AC}{\sin 2\beta} \Rightarrow \frac{AE}{AF} = \frac{AB}{AC} = \frac{\sin 2\gamma}{\sin 2\beta}$$

$$EM = AE \operatorname{tg} \gamma = \frac{EM}{NF} = \frac{AE}{AF} \cdot \frac{\operatorname{tg} \gamma}{\operatorname{tg} \beta} =$$

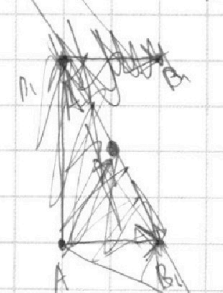
$$\frac{\sin \gamma}{\sin \beta} = \sqrt{\frac{4.5}{2}} = \sqrt{2.25} = 1.5 = \frac{\sin 2\gamma \operatorname{tg} \gamma}{\sin 2\beta \operatorname{tg} \beta}$$

$$\frac{AI}{2} = AM \sin \beta = \frac{EM}{\sin \gamma} \cdot \sin \beta = EM \cdot \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} = \frac{4.5}{1.5} = 3$$

$$\frac{AI}{2} = AN \sin \gamma = \frac{NF}{\sin \beta} \cdot \sin \gamma = 2 \cdot 1.5 = 3 \Rightarrow AI = 6$$



$20x + 15y = 12$
 $4x + 3y = 2.4$
 $5x + 4y = 3$
 $5x + 4y = 3$
 $20x + 15y = 12$
 $4x + 3y = 2.4$
 $5x + 4y = 3$
 $5x + 4y = 3$
 $20x + 15y = 12$
 $4x + 3y = 2.4$
 $5x + 4y = 3$
 $5x + 4y = 3$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ab : 2^{14} \cdot 7^{10}$$

$$bc : 2^{17} \cdot 7^{17}$$

$$ac : 2^w \cdot 7^{37}$$

$$abc : 2^{24} \cdot 7^{37}$$

$$abc : 2^{24} \cdot 7^{37}$$

$$\text{ord}_2(a) = \alpha_1$$

$$\text{ord}_2(b) = \beta_1$$

$$\text{ord}_2(c) = \gamma_1$$

$$\alpha_1 + \beta_1 \geq 14$$

$$\beta_1 + \gamma_1 \geq 17$$

$$\gamma_1 + \alpha_1 \geq 20$$

$$2(\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1) \geq 51$$

$$\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 \geq 26$$

$$\gamma_1 = 12$$

$$\alpha_1 = 9$$

$$\beta_1 = 5$$

$$\alpha_2 + \beta_2 \geq 10$$

$$\beta_2 + \gamma_2 \geq 17$$

$$\gamma_2 + \alpha_2 \geq 37$$

$$2(\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2) \geq 39$$

$$\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 \geq 20$$

$$\beta_2 = 0$$

$$\gamma_2 = 27$$

$$\alpha_2 = 10$$

34
17
51

10 17
37
54

$$\frac{a}{b} (a, b) = 1$$

~~max~~
max $\omega \Pi$

$$(a+b, a^2 - 6ab + b^2) =$$

$$= (a+b, 8ab) = (a+b, 8)$$

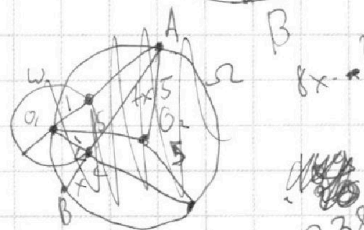
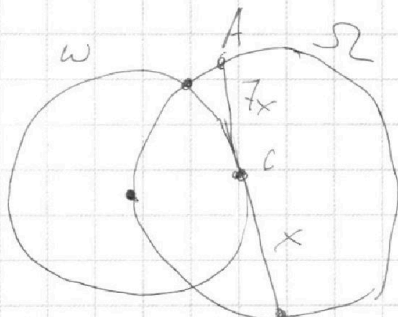
$$(a+b, ab) = 1 \quad \max \omega \Pi = 8 \quad m=8$$

$$a=5, b=7$$

$$a=5, b=7$$

$$\frac{8}{1 - 6 \cdot 5 \cdot 7 + 7^2} = \frac{8}{1 - 42 + 49} = \frac{8}{8} = 1$$

$$24 \cdot 25 = 24 \cdot 25 + 144$$



$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x + 2\sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

$$(\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1})(\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1}) = (2 - 7x)(\sqrt{2x^2 + 2x + 1} + \sqrt{2x^2 - 5x + 3})$$

$$2x^2 - 5x + 3 - 2x^2 - 2x - 1 = (2 - 7x)(\sqrt{2x^2 + 2x + 1} + \sqrt{2x^2 - 5x + 3})$$

$$x = 3.5$$

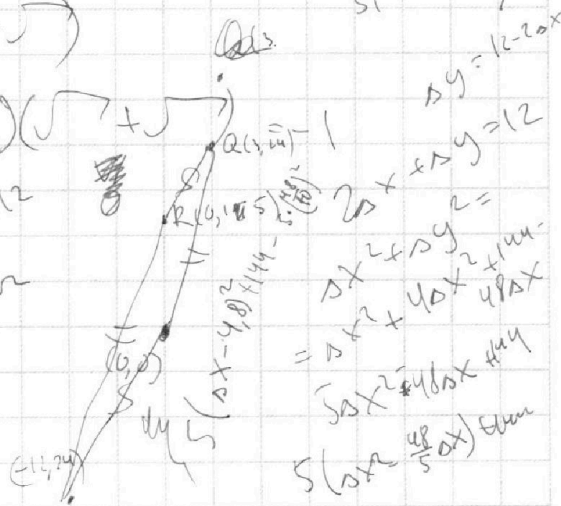
$$2x^2 - 2x + y_2 - y_1 = 12$$

$$2(x-1) + y_2 - y_1 = 12$$

1 2 3 4 5 6 7

⊕ ⊕ ⊕ ⊕

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x + 2\sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$



3380
- 163
3221

$$\Delta y = 12 - 2x$$

$$2x + 1 + y = 12$$

$$2x^2 + 2x + y^2 = 12$$

$$5(2x^2 + 2x + y^2) = 60$$