МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь
$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$
При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω, хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB, если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение
$$\sqrt{2x^2-5x+3}-\sqrt{2x^2+2x+1}=2-7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-12;24)$, $Q(3;24)$ и $R(15;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2-2x_1+y_2-y_1=12$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система
$$\begin{cases} ax-y+10b=0, \\ \left((x+8)^2+y^2-1\right)\left(x^2+y^2-4\right) \leqslant 0 \end{cases}$$
имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B. Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC, если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответсвенно равны 4,5 и 2.

Пусть x_1, x_2, x_3 – максимальные степени вхождения делителя 2 в a, b, c соотв-но; y_1, y_2, y_3 – та же ст. вхожд. 7 – a, b, c.

Тогда из $\begin{cases} ab \vdots (2^{14} \cdot 7^{10}) \\ bc \vdots (2^{17} \cdot 7^{17}) \\ ac \vdots (2^{20} \cdot 7^{37}) \end{cases}$ понимаем, что

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 14 \; ① \\ x_2 + x_3 \geq 17 \; ② \\ x_1 + x_3 \geq 20 \; ③ \end{cases} \quad ② - ① \Rightarrow x_3 - x_1 \geq 3, \; + ③ \Rightarrow 2x_3 \geq 23; \quad x_3 \geq 11{,}5$$

Из ① $\Rightarrow \min(x_1 + x_2) = 14$; $\min x_3 = 12 \Rightarrow \min(x_1 + x_2 + x_3) = 12 + 14 = 26$

$$\begin{cases} y_1 + y_2 \geq 10 \; ① \\ y_2 + y_3 \geq 17 \; ② \\ y_1 + y_3 \geq 37 \; ③ \end{cases} \quad ② - ① \Rightarrow y_3 - y_1 \geq 7, \; + ③ \Rightarrow 2y_3 \geq 44; \quad y_3 \geq 22$$

$\min(y_1 + y_2) = 10$; $\min(y_3) = 22 \Rightarrow \min(y_1 + y_2 + y_3) = 10 + 22 = 32$.

Итого мы нашли min степени вхождения для произведения делителей 2 и 7, чтобы минимизировать abc учтём, что не сущ. других простых делителей a, b, c, тогда $\min(abc) = 2^{26} \cdot 7^{32}$

Ответ: $2^{26} \cdot 7^{32}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Черновик

1) $ab \vdots (2^{14}\cdot 7^{10})$ Пусть $a \vdots (2^{x_1}\cdot 7^{y_1}), b \vdots (2^{x_2}\cdot 7^{y_2}), c \vdots (2^{x_3}\cdot 7^{y_3})$,

2) $bc \vdots (2^{17}\cdot 7^{17})$ где $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3 \in \mathbb{N}\cup\{0\}$.

3) $ac \vdots (2^{20}\cdot 7^{37})$ Тогда из 1) и 2) $\Rightarrow \begin{cases} x_3 - x_1 = 3 \\ y_3 - y_1 = 7 \end{cases}$

из 2) и 3) $\Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 = 3 \\ y_1 - y_2 = 20 \end{cases}$ из 1) и 3) $\Rightarrow \begin{cases} x_3 - x_2 = 6 \\ y_3 - y_2 = 27 \end{cases}$

Следствие основании на отличии степеней делителей различные $\frac{a+b}{(a+b)^2 \cancel{+4ab}}$ $3+5$

букв пар. $(a+b)^2$ $\overset{ab}{14} + 3k \vdots 6$

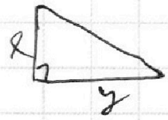
Система на „иксы": $\begin{cases} x_3 - x_1 = 3 \Rightarrow x_3 = x_1 + 3 \\ x_1 - x_2 = 3 \\ x_3 - x_2 = 6 \text{ - (подставим } x_3) \Rightarrow (x_1+3) - x_2 = 6 \end{cases}$

Получим $\begin{cases} x_1 - x_2 = 3 \\ x_1 + 3 - x_2 = 6 \end{cases}$ - равносильные $2^{14}\cdot 7 + 3\cdot 5$

Система на „игреки": $\begin{cases} y_3 - y_1 = 7 \Rightarrow y_3 = y_1 + 7 \\ y_1 - y_2 = 20 \\ y_3 - y_2 = 27 \Rightarrow y_1 + 7 - y_2 = 27 \end{cases}$ - равносильные

• Верно: $x_1 + x_2 = 14$, $y_1 + y_2 = 10$, $x_2 + x_3 = 17$, $y_2 + y_3 = 17$,

$x_1 + x_3 = 20$, $y_1 + y_3 = 37$



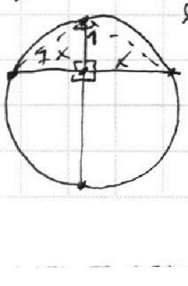
$\frac{1}{2} x y \sin\alpha$ 1

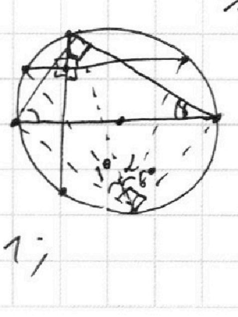
$\cancel{x_2 = 14 - x_2}$ 1. $x_1 = 14 - x_2$ $x_3 = 17 - x_2 \Rightarrow 14 - x_2 + 17 - x_2 = 20$;

$\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 14 \\ x_2 + x_3 \geq 17 \\ x_1 + x_3 \geq 20 \end{cases}$ 5 12 8 12

$x_3 - x_1 \geq 3$
$x_3 + x_1 \geq 20$ $\Rightarrow 2x_3 \geq 23$;
$x_3 \geq 11,5$





$S_1 = \frac{1}{2}(\sqrt{49x^2+1})(\sqrt{x^2+1})\sin\alpha$ $\frac{H}{} = \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha}$

$S_1 = 1 \cdot AK \cdot \frac{1}{2} \cdot 10\sin\alpha$

$\sqrt{7x^2} = 1$;

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Пусть $a^2-6ab+b^2 \vdots \frac{(a+b)}{k}$, где $k \in \mathbb{N}$, тогда

найдём минимальные K, чтобы выполнялась делимость.

$$\frac{(a+b)}{k}\cdot t = a^2-6ab+b^2;$$

$$\frac{(a+b)t}{k} = a^2+2ab+b^2-8ab;$$

$$\frac{(a+b)t}{k} = (a+b)^2-8ab$$

$$8ab = (a+b)\left(a+b-\frac{t}{k}\right) \text{ — ищем } \max\left(\frac{t}{k}\right)$$

$(a+b) \not\vdots\, a$, $(a+b) \not\vdots\, b \Rightarrow \left(a+b-\frac{t}{k}\right) \vdots\, ab$

№2

Запишем в виде $\frac{a+b}{(a+b)^2-8ab}$, пусть $(a+b) \vdots m$,

тогда $(a+b)^2 \vdots m$, найдём может ли $ab \vdots m$,

иначе $(a+b)^2-8ab \not\vdots\, m$. Пусть m содерж. в делителях a и b, но такого не может быть, т.к. a,b — взаимнопростые.

Пусть содерж. или в a^4, или в b^4, но тогда $(a+b) \not\vdots\, m$ — против-ие.

Пусть какая-то часть делителей m содерж в a^4, а какая-то в b^4, но тогда $\exists$ какой-нибудь делитель из делителей m в a^4 или b^4, он есть в одном, но его нет в другом $\Rightarrow (a+b) \not\vdots\, m$ — против-ие.

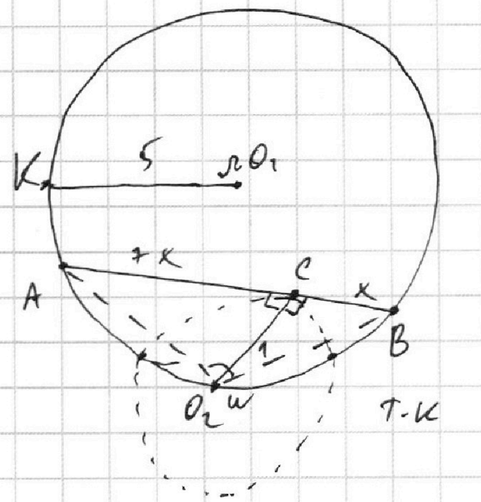
Значит m может быть только делителем 8, а max - 8. Ответ: $m=8$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



Дано: окр. ω и окр. Ω,

$AC : CB = 7$, $r(\omega)=1$, $r(\Omega)=5$ (O_2, C; O_1, K)

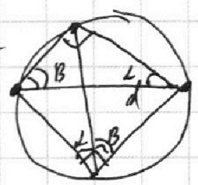
Найти: $AB = ??$

Решение: 1. Пусть $AC = 7x$, $CB = x$,

т.к. окр. ω кас. $AB \Rightarrow O_2C \perp AB$.

2. По (Т) об отношении хорды и диаметра в окр-ти:

$d = \frac{AB}{\sin\alpha}$. Гр. док-ва



d - диаметр., α, β - углы ($\alpha+\beta=90^\circ$)

Произвольно разделим $\angle$ 90-ые α и β, соединив (·) к-ие луча и окр. с (·)-ами диаметра снова получим прям. Δ, т.к опир. на диаметр., его стороны (хорды равны соотв. $d\sin\alpha$ и $d\sin\beta$). Теперь используем, пусть $\angle AO_2B = \alpha \Rightarrow$

$AB = 10\sin\alpha$.

Т ΔAO_2B: $\begin{cases} S_{AO_2B} = \frac{1}{2}AB \cdot CO_2 = \frac{1}{2}\cdot 10\sin\alpha \cdot 1 \\ S_{AO_2B} = \frac{1}{2}\cdot AO_2 \cdot BO_2 \sin\alpha \end{cases}$

$\Downarrow$

$5\sin\alpha = \frac{1}{2}\left(\sqrt{49x^2+1}\right)\left(\sqrt{x^2+1}\right)\sin\alpha;$

$10 = \sqrt{(49x^2+1)(x^2+1)};$

$\Updownarrow$

$100 = (49x^2+1)(x^2+1)$ Пусть $x^2 = t$, тогда

$100 = (49t+1)(t+1);$ $49t^2+50t+1-100=0;$

продолжение - 3.

ОДЗ: $t>0,\ x>0$

$49t^2+50t-99=0;$

$t_1+t_2=-\frac{50}{49}$ $\Rightarrow t_1=1 \Rightarrow x=\sqrt{t}=1$

$t_1\cdot t_2=-\frac{99}{49}$ $\quad t_2=-\frac{99}{49}$

$AB=8x \Rightarrow AB=8.$

Ответ: $AB=8.$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

4 - продолжение

$x_{1,2} = \frac{11 \pm 2\sqrt{61}}{41}$

1. проверим выполнимость $7x - 1 \geq 0$

$\sqrt{61} \approx 8$ (точно лежит между 7 и 8 т.к $49 < 61 < 64$)

1) $\frac{11+16}{41} = \frac{27}{41}$ $7 \cdot \frac{27}{41} - 1 \geq 0$ - верно

$7 \cdot \frac{\overset{<0}{(11-16)}}{41} - 1 > 0$ - неверно.

2. проверим $c + \sqrt{b} \geq 0$:

$2 - 7x + \sqrt{2x^2+2x+1} \geq 0$, для $x = \frac{11+2\sqrt{61}}{41}$

$\Downarrow$

$\begin{cases} 2x^2 + 2x + 1 \geq (7x-2)^2 \\ 7x - 2 \geq 0 \end{cases}$ $\searrow 47x^2 - 30x + 3 \leq 0$

верно

$x_{1,2} = \frac{30 \pm \sqrt{30^2 - 4 \cdot 47 \cdot 3}}{2 \cdot 47} = \frac{30 \pm \sqrt{336}}{94}$

$\sqrt{336}$ - лежит между 18 и 19 $\Rightarrow x_1 \approx \frac{30+18}{94} = \frac{48}{94}$

$x_2 \approx \frac{30-18}{94} = \frac{12}{94}$

$\Downarrow$

$x \in \left(\frac{12}{94}; \frac{48}{94}\right)$

Понятно, что $\frac{11+2\sqrt{61}}{41} > \frac{30-\sqrt{336}}{94}$, осталось выяснить

$\frac{11+2\sqrt{61}}{41} \leq \frac{30+\sqrt{336}}{94}$, но $\frac{25}{41} > \frac{49}{94}$ $\left(\frac{50}{41} > \frac{98}{94}\right.$
$\frac{9}{41} > \frac{4}{94}$

$\left(\frac{25}{41}; \frac{27}{41}\right)$ $\left(\frac{48}{94}; \frac{49}{94}\right)$

$\Downarrow$

$\frac{11+2\sqrt{61}}{41}$ - не подходит

Ответ: $\frac{2}{7}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1} = 2 - 7x;$

~~Заметим~~ $\cancel{(2x^2-5x+3)+(2-7x)=(2x^2+2x+1)}$

Заметим, что $2x^2-5x+3=(2x^2+2x+1)+(2-7x)$

Пусть $2x^2+2x+1=b$; $2-7x=c$, тогда

$\sqrt{b+c}-\sqrt{b}=c;$

$\sqrt{b+c}=c+\sqrt{b};$

$\Updownarrow$

$\begin{cases} b+c=c^2+2c\sqrt{b}+b; \\ c+\sqrt{b}\geq 0 \end{cases} \Rightarrow c=c^2+2c\sqrt{b};$

$c^2-c+2c\sqrt{b}=0;$

$c(c-1+2\sqrt{b})=0;$

1. $c=0$ ($c+\sqrt{b}\geq 0$ - выполняется)
2. $c-1+2\sqrt{b}=0;$
   $c=1-2\sqrt{b}$

1. $c=0 \Rightarrow 2-7x=0;$
   $2=7x;$
   $x=\frac{2}{7}$

Нужно убедиться только в $b\geq 0$, т.к. $\sqrt{b+c}$, где $c=0$ $=\sqrt{b}$.

для $2x^2+2x+1$, $\begin{cases} D=4-4\cdot 2\cdot 1<0 \\ a>0\ (2>0) \end{cases} \Rightarrow b>0$ при $x\in\mathbb{R}$.

2. $c=1-2\sqrt{b} \Rightarrow (2-7x)=1-2\sqrt{2x^2+2x+1};$

$2\sqrt{2x^2+2x+1}=7x-1;$

$\Updownarrow$

$\begin{cases} 4(2x^2+2x+1)=49x^2-14x+1 \Rightarrow 41x^2-22x-3=0; \\ 7x-1\geq 0 \end{cases}$

$x_{1,2}=\frac{22\pm\sqrt{22^2+4\cdot 41\cdot 3}}{2\cdot 41};$

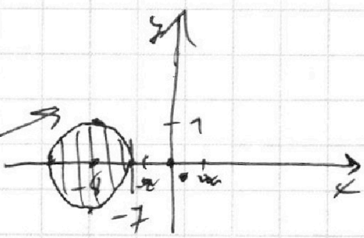
$x_{1,2}=\frac{22\pm 4\sqrt{61}}{2\cdot 41}=\frac{11\pm 2\sqrt{61}}{41}$

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \le 0 \end{cases}$$

Из 2-ого понимаем, что 1-ая или 2-ая скобка ≤ 0 (только 1).

1): $(x+8)^2 + y^2 - 1 \le 0$;

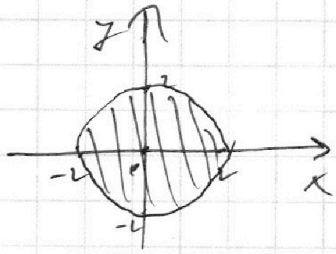
$(x+8)^2 + y^2 \le 1^2$;



2) $x^2 + y^2 - 4 \le 0$

$x^2 + y^2 \le 4$;

$x^2 + y^2 \le 2^2$

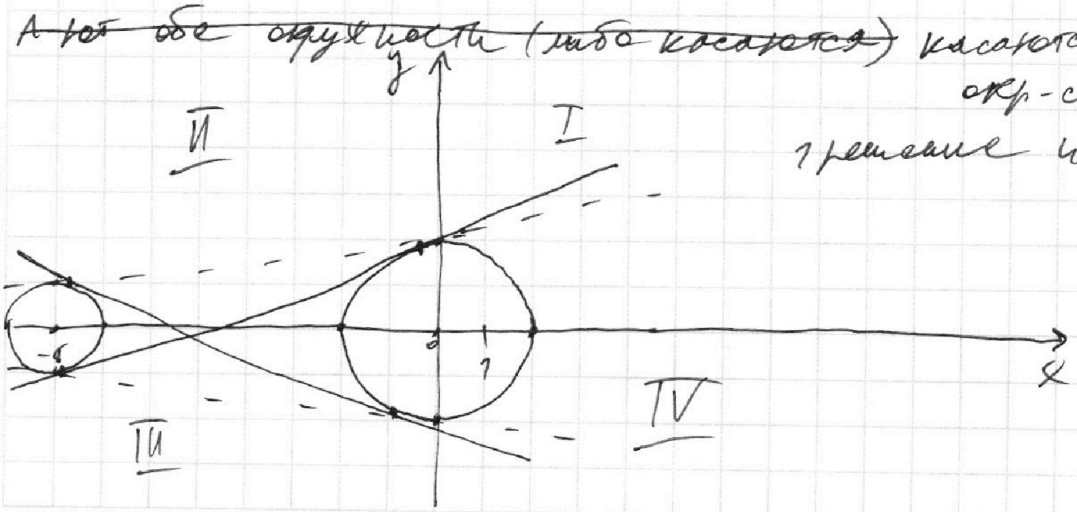


. Заметим окр.-ти не соприкасаются, не п-ся.

(x;y) лежит либо на 1-ой окр.-ти, либо на 2-ой ~~(включая границы)~~

Из 1-ого ур-ния: $ax - y + 10b = 0$; $ax + 10b = y$ — прямая на графике

Значит условию удовл-ют все прямые $y = ax + 10b$, которые ~~А-ют обе окружности (либо касаются)~~ касаются обоих окр-стей, иначе 1 решение или ∞.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что от a зависит $\angle$ наклона прямой.

II) Найдём a, когда прямая касается окр. $r=1$ в III полупл., а окр. $r=2$ во II полупл. у 4 остальных знач 3 пары точек п-ий.

$$\begin{cases} \cancel{x^2+y^2=4} \\ \cancel{(x+8)^2+y^2=1} \\ ax+10b=y \end{cases} \Rightarrow \cancel{16x+64=}$$

$$\begin{cases} x_1^2+y_1^2=4 \\ ax_1+10b=y_1 \end{cases} \Rightarrow \cancel{a\sqrt{4-y_1^2}+10b=y_1} \quad \cancel{a x_1^2 + \sqrt{4-x_1^2}=4} \Rightarrow a x_1^2+10b=\sqrt{4-x_1^2}$$

$$\begin{cases} (x_2+8)^2+y_2^2=1 \\ ax_2+10b=y_2 \end{cases} \Rightarrow a x_2^2+10b=\sqrt{1-(x_2+8)^2}$$

1. $a x_1^2 - \sqrt{4-x_1^2} + 10b = 0;$

2. $a x_2^2 + \sqrt{1-(x_2+8)^2} + 10b = 0;$

Существует всего 4 значения a удовлетвор. условию.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Черновик

$2x^2+4x+1$

900 $\quad 336 \,|\, 3$

112

$2x^2-5x+3=(x-1)\left(x-\frac{3}{2}\right)$

$\times 47$, 4, 2; $\times 188$, 3; 564

$2x^2+2x+11=$

$x_1+x_2=-1$

$x_1 x_2=\frac{1}{2}$

$(x-2x)^2$

~~$D=4-4\cdot 2\cdot 1$~~

$11+16$

$\frac{27}{41}$, 7

$16 \cdot 3$: $\times 16$, 16, 96, 16, 256

56

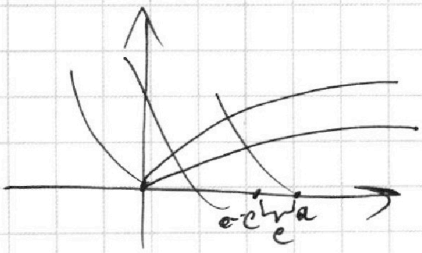
$7\cdot 8\cdot 2\cdot 3$

$\times 26$, 26, 156, 52

$\sqrt{b+c}-\sqrt{b}=c$

$14+11$

$\frac{25}{41}$



$\sqrt{b+c}-\sqrt{b}=c;$

$(b+c)+b-2\sqrt{(b+c)b}=c^2;$

$2b+c-c^2=2\sqrt{(b+c)b};$

$+61$, 16, 366

$90+81$

488, $\times 61$, 976

$\times 19$, 19, 171, $+19$, 361

$b+c=(c+\sqrt{b})^2;$

$b+c=c^2+2c\sqrt{b}+b;$

$c=c^2+2c\sqrt{b};$

$c^2-c+2c\sqrt{b}=0;$

$c(c-1+2\sqrt{b})=0;$

$c-1+2\sqrt{b}=0;$

$c=1-2\sqrt{b}$

$\frac{27}{41}$

$+22$, 22, 44

244

122

61

44, 484

$+492$, $976 \,|\, 2$, 488

$\frac{98}{94} \approx 1$

$\frac{50}{41} \approx 1{,}25$

$\left(\frac{25}{41}; \frac{27}{41}\right)$

$\left(\frac{48}{94}; \frac{49}{94}\right)$

$2-7x=1-2\sqrt{2x^2+2x+1};$

$22^2+4\cdot 41\cdot 3$

$61\cdot 2^4$

$\times 164$, 3, 492

$7x-1=2\sqrt{2x^2+2x\ldots}$

22