



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.
4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-12;24)$, $Q(3;24)$ и $R(15;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

a, b, c — натуральные

$$\begin{cases} ab: 2^{14} 7^{10} \\ bc: 2^{17} 7^{17} \\ ac: 2^{20} 7^{37} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ab: 2^{14} \\ bc: 2^{17} \\ ac: 2^{20} \end{cases} \Rightarrow ab \cdot bc \cdot ac: 2^{51} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 b^2 c^2: 2^{51} \Rightarrow abc: 2^{26}, \text{ где } a, b, c \text{ — нат.}$$

Поскольку $ac: 7^{37}$ и b — натуральное, то $abc: 7^{37}$

$$\text{Значит } \begin{cases} abc: 2^{26} \\ abc: 7^{37} \end{cases} \Rightarrow abc: 2^{26} 7^{37}$$

$$\text{Тогда } abc_{\min} = 2^{26} 7^{37}$$

$$\text{Пример: } a = 7^{20} \cdot 2^9, b = 2^6, c = 7^{17} \cdot 2^{11}$$

$$ab = 7^{20} \cdot 2^{15} \text{ и } 2^{15} 7^{20} : 2^{14} 7^{10}$$

$$bc = 7^{17} \cdot 2^{17} \text{ и } 2^{17} 7^{17} : 2^{17} 7^{17}$$

$$ac = 7^{37} \cdot 2^{20} \text{ и } 2^{20} 7^{37} : 2^{20} 7^{37}$$

$$abc = 2^{26} 7^{37}$$

Значит пример верен и $abc_{\min} = 2^{26} 7^{37}$

$$\text{Ответ: } abc_{\min} = 2^{26} 7^{37}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Раз $\frac{a}{b}$ — несократимая дробь, то $(a; b) = 1$

Если мы можем сократить числитель и знаменатель на m знаем $\begin{cases} a+b : m \\ a^2 - 6ab + b^2 : m \end{cases}$

$$a^2 - 6ab + b^2 = (a+b)^2 - 8ab$$

Если $a+b : m \Rightarrow (a+b)^2 : m$, тогда $8ab : m$

Если $(a; m) \neq 1$, то пусть $(a; m) = k$, где $k > 1$

Тогда раз $a : k$ и $m : k$ и $a+b : m \Rightarrow a+b : k \Rightarrow b : k$,

значит $(a; b) = k$ или больше, а у нас $(a; b) = 1$ противоречие

значит $(a; m) = 1$

Аналогичными рассуждениями получим $(b; m) = 1$, тогда

$(ab; m) = 1$, а раз $8ab : m$, то $m_{\max} = 8$

Пример для $m = 8$, $a = 1$, $b = 7$

$$\frac{a+b}{a^2 - 6ab + b^2} = \frac{1+7}{1 - 42 + 49} = \frac{8}{8} = \frac{1}{1} = 1$$

Ответ: $m_{\max} = 8$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

 МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$$

$$\begin{aligned} & (\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1})(\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1}) = \\ & = 2x^2 - 5x + 3 - 2x^2 - 2x - 1 = 2 - 7x \end{aligned}$$

Значит $\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 1$

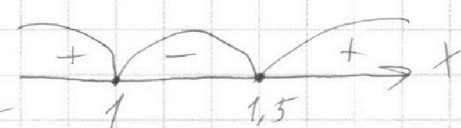
Заметим что если хотя одно из подкоренных чисел больше 1, то второе не отриц. значит их сумма больше одного.

Тогда
$$\begin{cases} 0 \leq 2x^2 - 5x + 3 \leq 1 \\ 0 \leq 2x^2 + 2x + 1 \leq 1 \end{cases}$$

⇓

$$\begin{cases} 1) 0 \leq 2x^2 - 5x + 3 \\ 2) 2x^2 - 5x + 2 \leq 0 \\ 3) 0 \leq 2x^2 + 2x + 1 \\ 4) 2x^2 + 2x \leq 0 \end{cases}$$

1) $D = 25 - 24 = 1$



$x_1 = \frac{5 + 1}{4} = 1,5$
 $x_2 = \frac{5 - 1}{4} = 1$
 $x \in (-\infty; 1] \cup [1,5; +\infty)$

2) $D = 25 - 16 = 9$

Продолжение на следующей странице

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

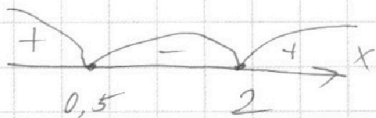
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$x_1 = \frac{5+3}{4} = 2$$

$$x_2 = \frac{5-3}{4} = 0,5$$



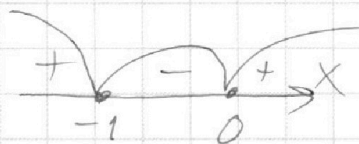
$$x \in [0,5; 2]$$

3) $D = 4 - 8 = -4 < 0$, это парабола ветвями вверх, значит при любом x , выражение положительное

4) $D = 4$

$$x_1 = \frac{-2+2}{4} = 0$$

$$x_2 = \frac{-2-2}{4} = -1$$



$$x \in [-1; 0]$$

Тогда $\left\{ \begin{array}{l} x \in (-\infty; -1] \cup [1,5; +\infty) \\ x \in [0,5; 2] \\ x \in [-1; 0] \end{array} \right.$

⇐

$$x \in \emptyset$$

Ответ: $x \in \emptyset$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$$

Давайте зафиксируем сумму $2x_2 + y_2$ и обозначим за z .

Тогда.

$y_2 = z - 2x_2$, это прямая $y = -2x$, смещённая на z вверх.

$y_1 = z - 12 - 2x_1$, это прямая $y = -2x$, смещённая

на $z - 12$ вверх.

Заметим, что для любого знач. из пред. зав. y_1 от x_1 , и любого y_2 от x_2 , для одного z найдем уравнение для прямой QR

уравнение

$$y = kx + b \quad Q(3; 24); R(15; 0)$$

$$\begin{cases} 24 = 3k + b \\ 0 = 15k + b \end{cases} \Rightarrow 24 = -12k \Rightarrow k = -2$$

$$24 = -6 + b \Rightarrow b = 30$$

Тогда прямая QR параллельна прямой зависимости y_2 от x_2 и y_1 от x_1 .

Заметим, что z_{\max} достигается

когда прямая зависимости y_2 от x_2 это QR.

продолжение на следующей странице

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Тогда $z_{\max} = 6 = 30$

Раз $PQRO$ параллелограмм, то $PO \parallel OR$, тогда

заметьте что z_{\min} достигается когда

прямая зависимости y_1 от x_1 это PO ,

тогда $z_{\min} - 12 = 0 \Rightarrow z_{\min} = 12$

Заметим что если z - четное, то x_2 может
принимать 13 вариантов целых в любой случай x_1 , тогда

13.

Если z - нечетное, то x_2 может
принимать лишь 12 вариантов целых и x_1 , тогда 12^2

Четных z всего 10, а нечетных z всего 9.

Тогда всего вариантов $12^2 \cdot 9 + 13^2 \cdot 10$

Ответ: $12^2 \cdot 9 + 13^2 \cdot 10$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

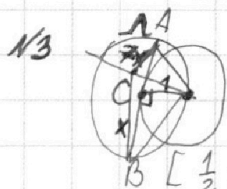


Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



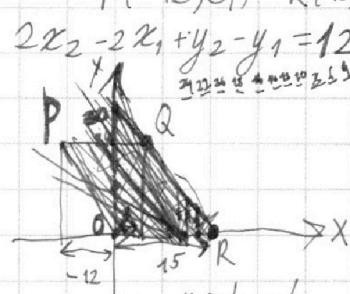
N1 a, b, c - кет. 3^4
 $ab: 2^{14} 7^{10}$
 $bc: 2^{17} 7^{17}$
 $ac: 2^{20} 7^{37}$
 $a^2 b^2 c^2: 2^{51} 7^{51}$
 $abc: 2^{26} 7^{37}$
 $abc_{min} = 2^{26} 7^{37}$
 Пример: $c = 7^{17} \cdot 2^{21}, a = 7^{20} \cdot 2^{9}, b = 3 \cdot 5 \cdot 15 \cdot 6 = 90$
 $b = 2^5$
 8
 $9 - 90 + 15$
 $(a;b) = 1$
 $a+b = m$
 $(a+b)^2 = m$
 $8ab = m$
 $m_{max} = 8$
 $1, 7$

N2 a, b - неск. $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$
 $\frac{a+b}{a^2 - ab + b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2 - 3ab}$
 $(a;b) = 1$
 $a+b = m$
 $8ab = m$
 $m_{max} = 8$
 $1, 7$



N3 $R_n = 1$
 $R_n = 5$
 N4 $\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$
 $\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 1$
 $1 \geq 2x^2 - 5x + 3 \geq 0$
 $1 \geq 2x^2 + 2x + 1 \geq 0$
 $0 \geq 2x^2 - 5x + 2$
 $2x^2 - 5x + 3 \geq 0$
 $0 \geq 2x^2 + 2x$
 $2x^2 + 2x + 1 \geq 0$
 $D = 25 - 16 = 9$
 $\frac{5 \pm 3}{4} = 0.5, 2$
 $D = 25 - 24 = 1$
 $\frac{5 \pm 1}{4} = 1.5, 1$
 $D = 4 - 8 < 0$

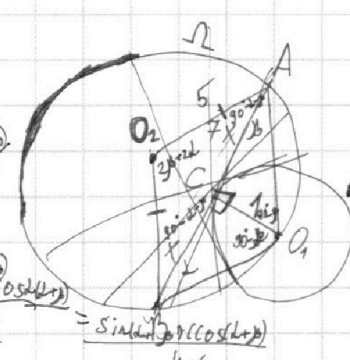
N5 $O(0;0)$
 $P(-12;24)$
 $Q(3;24)$
 $R(15;0)$



$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$
 $2x + 3y = 12$
 $sg = 12 - 2ax$
 $\Delta x \leq 15$
 $\Delta y \leq 24$
 $(y;0) \rightarrow (3;0)$
 $(2;2)$
 $(1;4)$
 $(0;6)$
 $(-1;8)$
 $(-2;10)$
 $x_2 y_2 = \text{const}$
 $y_2 = \text{const} - 2x_2 - 12$

$(a; m) = 1$
 $(b; m) = 1$
 $y = ax + 10b$
 $(x+8)^2 + y^2 - 1 \geq 0$
 $(x^2 + (ax+10b)^2 - 1) \geq 0$
 Δ
 $1 \Delta 0$
 $1 \Delta 0$
 $1 \Delta 0$
 $68 + 6x \geq 1$
 $16x \geq -67$
 $x \geq -\frac{67}{16}$
 $\sin^2 \beta + \cos^2 \beta = 1$
 $67 + 6x \leq 1$
 $x \leq -\frac{67}{16}$

$30 = \text{const} + y = kx + b$
 $24 = 3k + b$
 $0 = 15k + b$
 $k = -2, b = 30$
 $30 \geq \text{const} - 12 \geq 0$
 $12 \geq \text{const} - 12 \geq 0$
 $18 \geq \text{const} - 12 \geq 0$
 $10 = 1440$
 $2x_2 + y_2 = \text{const}$
 $y_2 = 2x_2 + \text{const}$



$\sin(90^\circ - \beta) = \frac{\cos(\beta)}{5}$
 5
 $\sin \frac{1}{2}(\beta + \alpha) = \frac{2 \sin \frac{1}{2}(\beta + \alpha) \cos \frac{1}{2}(\beta + \alpha)}{8x} = \frac{\sin(\beta + \alpha) \cos(\beta + \alpha)}{4x}$

$\cos^2 \beta + \sin^2 \beta = 1$
 $\frac{\sin \alpha}{1} = \frac{\sin(90^\circ - \beta)}{x}$
 $\sin(\alpha + \beta) = \cos \beta \sin \alpha + \sin \beta \cos \alpha = 1$
 $(1 + 49x^2) \sin^2 \beta = \cos^2 \beta = 1$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

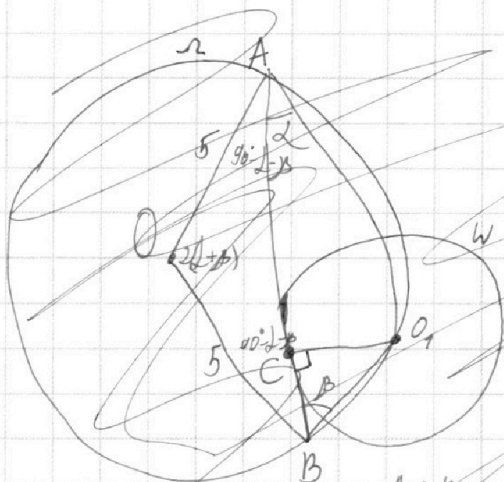
Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Дано $R_n = 5$, $R_w = 1$, $AC:CB = 7:1$

Найти: AB

Решение:

Обозначим $\angle BAO_1$ за α ($\angle ABO_1$ за β)
 Тогда $\angle AOB$ за $2(\alpha + \beta)$

$$AO = OB = R_n = 5.$$

$\triangle AOB$ равнобедренный (по определению)

$\angle OAB = \angle ABO$ (по свойству равнобедренного треугольника)

$\angle OAB + \angle ABO + \angle AOB = 180^\circ$ (по сумме углов в треугольнике)

Тогда $\angle OAB = \angle ABO = 90^\circ - \alpha - \beta$

По теореме синусов: $\frac{AB}{\sin 2(\alpha + \beta)} = \frac{OB}{\sin(90^\circ - \alpha - \beta)} = \frac{5}{\sin(90^\circ - \alpha - \beta) \cos(\alpha + \beta)}$

$$\sin 2(\alpha + \beta) = 2 \cos(\alpha + \beta) \sin(\alpha + \beta)$$

$$AB = \frac{2 \cos(\alpha + \beta) \sin(\alpha + \beta) \cdot 5}{\cos(\alpha + \beta)} = 10 \sin(\alpha + \beta)$$

По теореме синусов: $\sin \beta = \frac{1}{7}$

$O_1C \perp AB$ (по свойству касательной)



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

