МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^6 3^{13} 5^{11}$, bc делится на $2^{14} 3^{21} 5^{13}$, ac делится на $2^{16} 3^{25} 5^{28}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой AC в точке A, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке E, а катет BC – в точке F. Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1{,}4$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ \left(x^2 + y^2 - 25\right)\left(x^2 + y^2 + 18y + 77\right) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6\log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4 (0{,}5y) + \log_{0{,}5y} 11 = \log_{0{,}125y^3}\left(11^{-13}\right) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-15;90)$, $Q(2;90)$ и $R(17;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 180, $SA = BC = 20$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 6$, а радиус сферы Ω равен 8.

Для минимизации значений a, b, c положим, что в их разложении на простые множители отсутствуют ~~за~~ простые числа, отличные от 2, 3, 5.

Пусть $a = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2} \cdot 5^{\alpha_3}$; $b = 2^{\beta_1} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\beta_3}$, $c = 2^{\gamma_1} \cdot 3^{\gamma_2} \cdot 5^{\gamma_3}$.

Условие задачи эквивалентно системе систем:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 \geq 6 \\ \beta_1 + \gamma_1 \geq 14 \\ \gamma_1 + \alpha_1 \geq 16 \end{cases}, \quad \begin{cases} \alpha_2 + \beta_2 \geq 13 \\ \beta_2 + \gamma_2 \geq 21 \\ \gamma_2 + \alpha_2 \geq 25 \end{cases}, \quad \begin{cases} \alpha_3 + \beta_3 \geq 11 \\ \beta_3 + \gamma_3 \geq 13 \\ \gamma_3 + \alpha_3 \geq 28 \end{cases},$$

При $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

У первой системы существует решение, при котором все неравенства обращаются в равенства: $\alpha_1 = 4, \beta_1 = 2, \gamma_1 = 12$.

Из второй системы следует, что $\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 \geq 29{,}5$; учитывая что они целые неотрицательные, получаем $\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 \geq 30$. Существует решение $\alpha_2 = 9$; $\beta_2 = 5$; $\gamma_2 = 17$; но тогда сумма равна 31. Если любое из чисел $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ уменьшить на 1, также получим решения; в таких решениях сумма равна 30. Чем больше каждое из чисел $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$, тем больше искомое произведение $abc = 2^{\alpha_1+\beta_1+\gamma_1} \cdot 3^{\alpha_2+\beta_2+\gamma_2} \cdot 5^{\alpha_3+\beta_3+\gamma_3}$, так что возьмем эти значения. То есть, мы доказали, что $\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 \geq 30$, и привели пример, когда неравенство обращается в равенство.

Из третьей системы $\gamma_3 + \alpha_3 \geq 28$; учитывая что $\beta_3 \geq 0$, получаем $\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 \geq 28$. Пример: $\alpha_3 = 14$, $\beta_3 = 0$, $\gamma_3 = 14$, все неравенства выполняются.

Итак, $(\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1)_{min} = 18$, $(\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2)_{min} = 30$, $(\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3)_{min} = 28$,

$(abc)_{min} = 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$.

Ответ: $2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Продолжение задачи №2!

Заметим, что, если при изменении AO на величину x_1 NO изменилась на величину x_2, то при повторном изменении AO на величину x_1 NO также изменится на величину x_2, то есть, NO и AO линейно зависимы.

Найдём такое NO, что $NO = AO$. Обозначим $NO = x$.

Линейность: $\dfrac{\frac{\sqrt{14}}{\sqrt5} - x}{\frac{\sqrt{14}}{\sqrt5} - \frac{8}{\sqrt{70}}} = \dfrac{\frac{2}{\sqrt5} - x}{\frac{2}{\sqrt5} - \frac{9}{2\sqrt5}}$. Решая, получаем:

$$x = \frac{6\sqrt5 - 3\sqrt{14}}{1}$$

$$OH = AO - \frac{2}{\sqrt5} = \cancel{\frac{30 - 3\sqrt{70}}{\sqrt{70}\sqrt5} - \frac{34}{\sqrt{70}\sqrt5}} = \frac{28}{5}\sqrt5 - 3\sqrt{14};$$

$$CF = 2NG = 2OH = \frac{56}{5}\sqrt5 - 3\sqrt{14};$$

$$\triangle CEF \sim \triangle ADC; \quad \frac{S_{ADC}}{S_{CEF}} = \left(\frac{CF}{AC}\right)^2 = \left(\frac{\frac{56}{\sqrt5} - 3\sqrt{14}}{\sqrt2}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{56}{\sqrt{10}} - 3\sqrt7\right)^2 = \cancel{\frac{56^2}{10} - \frac{6\cdot56\cdot\sqrt7}{\sqrt{10}} + 9\cdot7} = \left(\frac{56 - 3\sqrt{70}}{\sqrt{10}}\right)^2 =$$

$$= \frac{7}{10}\left(64\cdot7 - 2\cdot8\sqrt7\cdot3\sqrt{10} + 9\cdot10\right) = \cancel{\frac{7}{10}} = 376{,}6 - 33{,}6\sqrt{70}.$$

Ответ: $376{,}6 - 33{,}6\sqrt{70}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

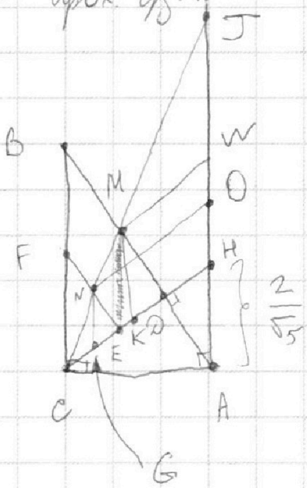
1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$AB:BD = 1{,}4 \iff AD:BD = 2:5 \iff AD:CD:BD = 2:\sqrt{10}:5$ (т.к. CD — высота, опущенная из прямого угла); отсюда $AC:BC = \sqrt{14}:\sqrt{35} = \sqrt{2}:\sqrt{5}$. Положим $AC = \sqrt{2}a$; $BC = \sqrt{5}a$; ~~тогда~~ ~~$CD = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{7}}a$, AD~~ тогда $AB = \sqrt{7}a$. При увеличении сторон в a раз площади увеличатся в a^2 раз, но отношение площадей не изменится.

EF — хорда окружности, значит, если N — середина EF, то центр окружности лежит на прямой, $\perp AB$ и прох. через N (т.к. $EF \parallel AB$). Центр окружности также леж на прямой, $\perp AC$ и прох через A.

Построим следующий чертёж:



Задача состоит в нахождении такой пары точек E, F (по которым строятся точки N и O), что $NO = AO = R$.

Обозначим $CF = f$. NG — средняя линия в $\triangle CDE$, поэтому $NG = \frac{f}{2}$. $NO \perp AB \perp CD$, поэтому $NO \parallel CD$, $NOHG$ — параллелограмм, $OH = \frac{f}{2}$. Отсюда $OA = \frac{f}{2} + \frac{2}{\sqrt{5}}$.

Вычислим NO. Если в качестве пары точек (E, F) взять пару (C, C), то $f = 0$, $NO = CH = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2} = \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{5}}$.

Если в качестве пары (E, F) взять (D, B), то $NO = MW$, где M — середина BD. $\triangle BMC \sim \triangle AMJ$, $MC : MJ = MB : MA =$

$$= \frac{\frac{1}{2}BD}{\frac{1}{2}BD + AD} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{\sqrt{7}}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{\sqrt{7}} + \frac{2}{\sqrt{7}}} = \frac{5}{9}, \quad CJ : MJ = \frac{14}{9}.$$

$\triangle MJW \sim \triangle CJH$, $MW : CH = MJ : CJ = \frac{9}{14}$,

$MW = \frac{9}{14} CH = \frac{9}{\sqrt{70}}$. При этом, если MK — средняя линия в $\triangle BCD$, то $MK = \frac{BC}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2} = WH$; $WA = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{9}{2\sqrt{5}}$.

Итак, у нас есть две пары значений NO и AO:

$\left\{NO = \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{5}};\ AO = \frac{2}{\sqrt{5}}\right\}$; $\left\{NO = \frac{9}{\sqrt{70}};\ AO = \frac{9}{2\sqrt{5}}\right\}$.

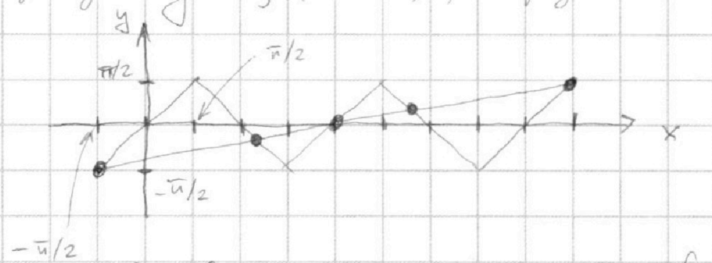
Вспомним тождество $\arcsin(a) + \arccos(a) = \frac{\pi}{2}$; перепишем исходное уравнение:

$$10\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin(x))\right) = 9\pi - 2x$$
$$-10\arcsin(\sin(x)) = 4\pi - 2x$$
$$\arcsin(\sin(x)) = \frac{1}{5}x - \frac{2\pi}{5}$$

Найдем, в какой области следует искать решения.
$-\pi/2 \le \arcsin(a) \le \pi/2$, откуда $-\frac{\pi}{2} \le \frac{1}{5}x - \frac{2\pi}{5} \le \frac{\pi}{2}$;
$-\frac{5\pi}{2} \le x - 2\pi \le \frac{5\pi}{2}$; $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{9\pi}{2}$.

Пользуясь следующими правилом: $\begin{cases} -\pi/2 \le x \le \pi/2 \Longrightarrow \arcsin(\sin(x)) = x \\ \sin(x) = \sin(x_1) \Longrightarrow \arcsin(\sin(x_1)) = \arcsin(\sin(x)) \end{cases}$

построим график функции $y = \arcsin(\sin(x))$, а также график функции $y = \frac{1}{5}(x - 2\pi)$, в пределах $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{9\pi}{2}$.



Отметим их пересечения, это и есть решения исходной системы.

Тривиальные решения: $x \in \left\{-\frac{\pi}{2}; 2\pi; \frac{9\pi}{2}\right\}$.

Первое нетривиальное решение — пересечение прямой $y = \frac{1}{5}(x - 2\pi)$ и прямой $y = \pi - x$; $x = \frac{7\pi}{6}$. Второе нетривиальное решение симметрично первому отн. $x = 2\pi$, т.е. $x = 4\pi - \frac{7\pi}{6} = \frac{17\pi}{6}$.

Ответ: $x \in \left\{-\frac{\pi}{2}; \frac{7\pi}{6}; 2\pi; \frac{17\pi}{6}; \frac{9\pi}{2}\right\}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Осталось найти такую прямую $x = m\left(y+\frac{45}{7}\right)$, что она имеет с окружностью $y^2+x^2=25$ одну общую точку.

$y^2 + m^2\left(y^2 + \frac{90}{7}y + \frac{2025}{49}\right) = 25;$

$(m^2+1)y^2 + \left(\frac{90}{7}m^2\right)y + \left(\frac{2025}{49}m^2 - 25\right) = 0$

Условие на единственное решение: $D=0$. (D — дискриминант).

$\left(2\cdot\frac{45}{7}m^2\right)^2 - 4(m^2+1)\left(\left(\frac{45}{7}\right)^2 m^2 - 25\right) = 0$

$\cancel{4\cdot\left(\frac{45}{7}\right)^2 m^4} - 4\left(\cancel{\left(\frac{45}{7}\right)^2 m^4} + \left(\frac{45}{7}\right)^2 m^2 - 25m^2 - 25\right) = 0;$

$\cancel{-4}\left(\left(\left(\frac{45}{7}\right)^2 - 25\right)m^2 - 25\right) = 0;$

$\left(\frac{45}{7}-5\right)\left(\frac{45}{7}+5\right)m^2 = 25;$

$10\cdot 80\cdot m^2 = 25\cdot 7^2;$

$m = \pm\frac{35}{\sqrt{800}} = \pm\frac{35\sqrt{2}}{40}; \ m>0; \ m = \frac{35\sqrt{2}}{40}.$

Подставим $k = -\frac{6a}{5}$ в неравенство $-m<k<m$:

$-\frac{35\sqrt{2}}{40} < -\frac{6a}{5} < \frac{35\sqrt{2}}{40}; \quad -\frac{35\sqrt{2}}{40} < \frac{6a}{5} < \frac{35\sqrt{2}}{40};$

$-\frac{35\sqrt{2}}{48} < a < \frac{35\sqrt{2}}{48}.$

Ответ: $a \in \left(-\frac{35}{48}\sqrt{2}; \frac{35}{48}\sqrt{2}\right)$.

Для задачи 4 это 2 лист из 2.

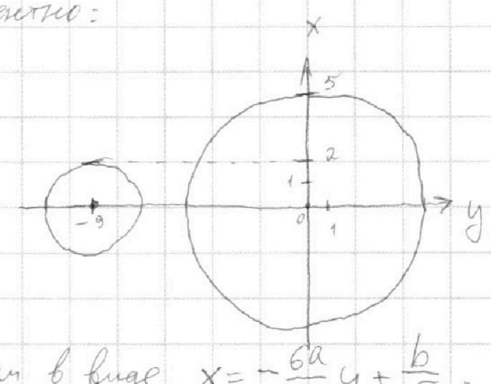
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Второе уравнение системы эквивалентно:

$$\left[\begin{array}{l} y^2+x^2=5^2 \text{ — окружность}\\ (y+9)^2+x^2=2^2 \text{ — окружность}\end{array}\right.$$



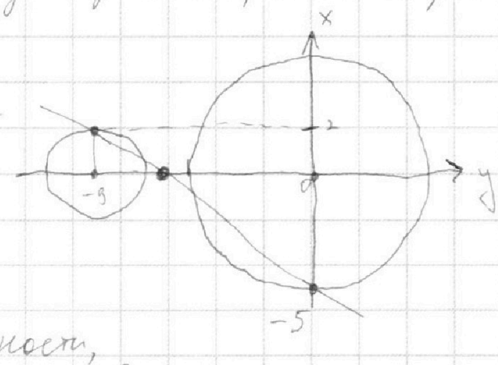
Его решения изображены на графике справа.

Первое уравнение системы перепишем в виде $x=-\frac{6a}{5}y+\frac{b}{5}$.

На графике это прямая. Поскольку значение b не задано, из-за равенства свободного члена $\frac{b}{5}$ положение прямой может быть любым, но её угловой коэффициент равен $k=-\frac{6a}{5}$.

Пусть угловые коэффициенты общих внутренних касательных к окружностям равны m и $-m$ $(m>0)$. Это верно, т.к. центры обеих окружностей лежат на прямой $x=0$. Очевидно, что при $-m<k<m$ существует такое положение прямой из условия, что она пересекает каждую окружность в двух различных точках. При $k=\pm m$ максимальное число суммарных пересечений равно 2. Займёмся поиском m.

~~Рэн~~ Общие внутренние касательные пересекаются в центре гомотетии, переводящей одну окружность в другую, с отрицательным коэффициентом гомотетии.



Крайняя верхняя точка одной окружности, очевидно, перейдёт при такой гомотетии в крайнюю нижнюю точку другой окружности, значит, соединяющая их прямая проходит через центр гомотетии. При этом центр гомотетии лежит на прямой, проходящей через центры окружностей.

Пусть координата центра гомотетии $(c, 0)$. Тогда

$\frac{2-0}{-9-c}=\frac{2-(-5)}{-9-0}$; откуда $-18=7(9+c)$; $c=-\frac{45}{7}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Обозначим $a = \log_{11}(x)$; $b = \cancel{\log_{11}(y)}\ \log_{11}(0,5y)$.
ОДЗ: $x>0$; $y>0$; $x \neq 1$; $y \neq 2$.
При этом $xy = 2 \cdot 11^{a+b}$.

Условие на x эквивалентно условию на a: $3a^5+15a-16=0$.
Заметим, что без учёта ОДЗ у такого уравнения относительно a имеется ровно одно действительное решение, поскольку функция $f(a) = 3a^5+15a-16$ — неубывающая как сумма неубывающих.

Аналогично: условие на y эквивалентно условию на b: $3b^5+15b+16=0$; без учёта ОДЗ существует ровно одно действительное решение отн. b.

~~Следствие из этих двух условий~~: $\cancel{3a^5+15a+3b^5+15b=0}$,

$\cancel{3(a+b)(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4+5)=0}$,

~~При этом~~ $\cancel{a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4=(a-b)^4+3a^3b-5a^2b^2+3ab^3=}$

$\cancel{=(a-b)^4+3}$

~~Очевидно из условия на a, что $a>0$, и из условия на b, что $b<0$, т.е. $a \neq 0$ и $b \neq 0$, поэтому~~

Заметим, что если некоторое a подходит под условие, то $b=-a$ также подходит под условие, и наоборот. Это значит, что, если оба числа a, b подходят под свои условия, то $a+b=0$.

ОДЗ в терминах a и b: $a \neq 0$; $b \neq 0$. Очевидно, $a=0$ не подходит под условие и не явл. решением, так что условие $a \neq 0$ выполнено. Аналогично, выполнено условие $b \neq 0$.

$xy = 2 \cdot 11^{a+b} = 2$. $xy \neq 0$, так что $\begin{cases} x \neq 0 \\ y \neq 0 \end{cases}$ выполнено.

Ответ: $(xy) \in \{2\}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пусть прямая с угловым коэффициентом -6, прох. ч/з A, имеет уравнение $y_1 = -6x_1 + C$. Тогда по условию задачи прямая с угловым коэффициентом -6, прох. ч/з B, имеет уравнение $y_2 = -6x_2 + C + 48$. За C обозначена некоторая константа. Перепишем это условие.

Если A леж. на прямой $y = -6(x - c)$, ~~то~~
то B леж. на прямой $y = -6(x - (c+8))$. Здесь c — некоторая константа.

Вот удача, -6 — ~~коэф~~ угловой коэффициент одной пары боковых сторон параллелограмма! Дальше несложно.

~~Чтобы обе прямые~~ Это значит, что прямые, упомянутые ранее, либо не имеют общих точек с параллелограммом, либо имеют $15+1=16$ общих точек, координаты которых — целые числа. Такие прямые имеют c от 0 до 17 включительно. Не забываем, что $c+8$ тоже от 0 до 17 включительно. Итого есть 10 вариантов значений c — от 0 до 9 включительно, и 10 вариантов пар прямых, на которых соответственно лежат A и B.

На каждой прямой есть 16 точек с целыми координатами. Выбрать пару (A, B) на паре прямых можно $16 \cdot 16 = 256$ способами, выбрать пару прямых — 10 способов, итого $256 \cdot 10 = 2560$

Ответ: 2560.

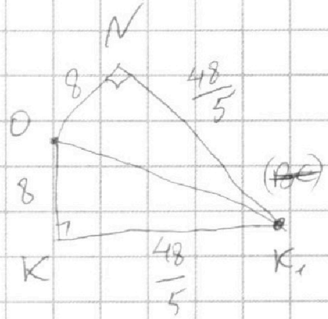
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\angle OK_1K = \operatorname{arctg}\left(\frac{40}{48}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{5}{6}\right)$;

$\angle OK_1N = \operatorname{arctg}\left(\frac{5}{6}\right)$;



$\angle KK_1N = 2\operatorname{arctg}\left(\frac{5}{6}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{2\cdot\frac{5}{6}}{1-\left(\frac{5}{6}\right)^2}\right) =$

$= \operatorname{arctg}\left(\frac{60}{11}\right)$ — искомый.

Ответ: 1) 8100

2) $\operatorname{arctg}\left(\frac{60}{11}\right)$.

Для задачи 7 это 2 лист из 2!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

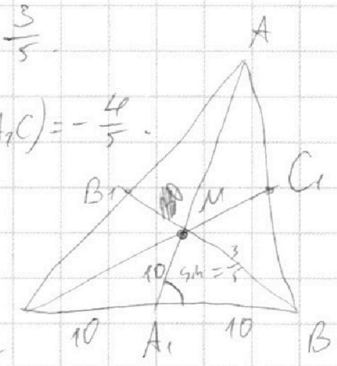
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$SP = MQ$; $SQ = MP$; $SP \cdot SQ = MP \cdot MQ$; у точек S и M равные степени отн. сферы Ω. SL кас. Ω, MK кас. Ω, откуда $SL = MK$. Также $AL = AK$ как отрезки касательных из одной точки, поэтому $AS = AM$. $AM = \frac{2}{3}AA_1$, $AA_1 = \frac{3}{2}AM = 30$.

$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot \left(AA_1 \cdot \sin(\angle AA_1B)\right) = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 30 \cdot \sin(\angle AA_1B) =$

$= 300 \sin(\angle AA_1B) = 180$; $\sin(\angle AA_1B) = \frac{3}{5}$.



Б.О.О. $AB \le AC$, тогда $\cos(\angle AA_1B) = \frac{4}{5}$; $\cos(\angle AA_1C) = -\frac{4}{5}$.

По теореме косинусов:

$CM = 10 \cdot \sqrt{2 - 2 \cdot \left(-\frac{4}{5}\right)} =$

$= 10 \cdot \sqrt{2 + \frac{8}{5}} = 10 \cdot \sqrt{\frac{18}{5}} = \frac{30\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = 6\sqrt{10}$;

$CC_1 = \frac{3}{2} CM = 9\sqrt{10}$

Аналогично, $BM = 10 \cdot \sqrt{2 - 2 \cdot \frac{4}{5}} = 10\sqrt{\frac{2}{5}} = 2\sqrt{10}$; $BB_1 = 3\sqrt{10}$.

$AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 30 \cdot 9\sqrt{10} \cdot 3\sqrt{10} = 30 \cdot 27 \cdot 10 = 8100$.

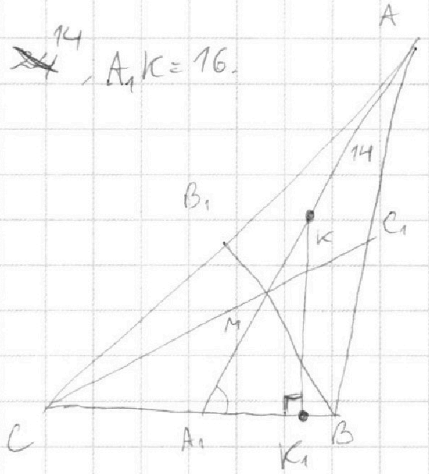
$SN = 6$; $SL = 6$; $AL = \cancel{24}\ 14$; $AK = \cancel{24}\ 14$, $A_1K = 16$.

KK_1 — перпендикуляр к BC,

$KK_1 = KA_1 \cdot \sin(\angle AA_1B) = \frac{48}{5}$

$K_1N = KK_1 = \frac{48}{5}$.

Сфера Ω вписана в двугранный угол при ребре BC, значит, $K_1N \perp BC$, и точки K, K_1, N, O (O — центр сферы) лежат в одной плоскости



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$a = 2^{\alpha_1} 3^{\alpha_2} 5^{\alpha_3}$; $b = 2^{\beta_1} 3^{\beta_2} 5^{\beta_3}$; $c = 2^{\gamma_1} 3^{\gamma_2} 5^{\gamma_3}$

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 \geq 6 \\ \beta_1 + \gamma_1 \geq 14 \\ \gamma_1 + \alpha_1 \geq 16 \end{cases} \qquad \begin{matrix} 13 \\ 21 \\ 25 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \cancel{11} \\ \cancel{13} \\ 28 \end{matrix}$$

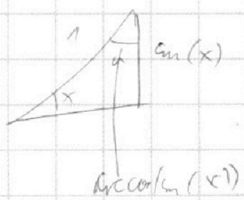
$\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 \geq 18$ $\qquad \geq \cancel{29{,}5}\ 30$

$4?\ 2?\ 12?$ $\qquad \cancel{9?\ 5?\ 6?}$ $\qquad \cancel{?}\ 0?\ \cancel{?}$

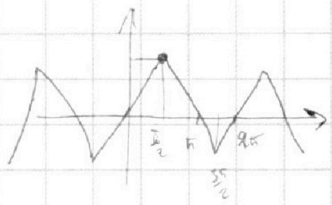
$9\ \ 5\ \ 17$ $\qquad 15\ \ \ 13$

$10 \arccos(\sin(x)) = 9\pi - 2x$

$\boxed{\arcsin(a) + \arccos(a) = \frac{\pi}{2}}$



~~arcsin(x)~~ $\arcsin(\sin(x)) =$

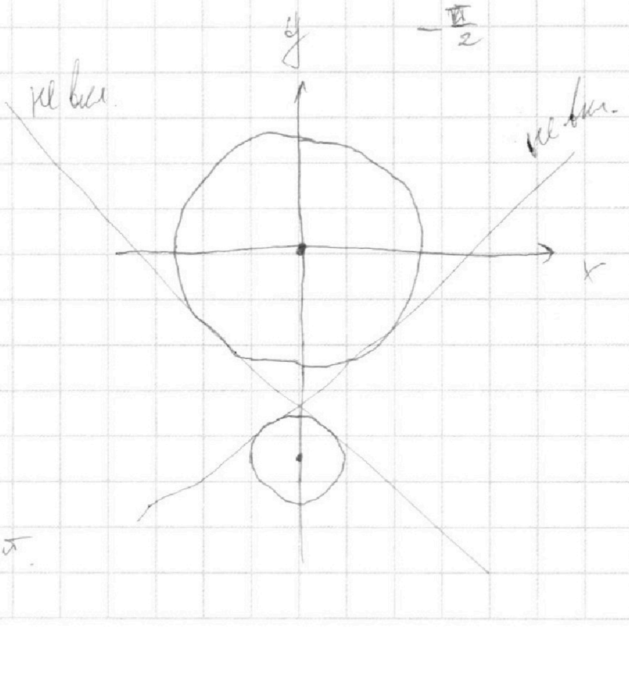


~~10 arcsin~~

$10\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin(x))\right) = 9\pi - 2x$

$-10 \arcsin(x) = 4\pi - 2x$ $\qquad \arcsin(x) = \left(\frac{1}{5}x - \frac{2\pi}{5}\right)$ $\quad \frac{\pi}{2} \quad -\frac{\pi}{2}$

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0 \\ \left[\begin{array}{l} x^2 + y^2 = 25 \\ x^2 + (y+9)^2 = 4 \end{array}\right. \end{cases}$$



$x = -\frac{6a}{5}y + \frac{b}{5}$ любое

$5\pi - 5x = x - 2\pi$; $\quad 6x = 7\pi$; $x = \frac{7}{6}\pi$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$(\log_{11}(x))^4 - 6\log_x(11) = \log_{x^3}\left(\frac{1}{121}\right) - 5$

$(\log_{11}(x))^4 - 6(\log_{11}(x))^{-1} = -2\cdot(3\log_{11}(x))^{-1} - 5$

$a^4 - \frac{6}{a} = -\frac{2}{3a} - 5 \quad | \cdot 3a$

$\log_{x^3}\left(\frac{1}{121}\right) = \frac{\ln\left(\frac{1}{121}\right)}{\ln(x^3)} = \frac{-2\ln(11)}{3\ln(x)} = -\frac{2}{3\log_{11}(x)}$

$3a^5 - 18 + 2 + 15a = 0$

$\boxed{3a^5 + 15a - 16 = 0}$

возрастает

$\cancel{3a(a^4+5) = 16}$

$\cancel{a = \frac{b}{3}}$

$(\log_{11}(0{,}5y))^4 + \log_{0{,}5y}(11) = \log_{(0{,}5y)^3}(11^{-13}) - 5$

$(\log_{11}(0{,}5y))^4 + (\log_{11}(0{,}5y))^{-1} = -13(\log_{11}(0{,}5y))^{-1} - 5$

$b^4 + \frac{1}{b} = -\frac{13}{3b} - 5 \quad | \cdot 3b$

$\cancel{3b^5 + 1 + 14 + 5b = 0}$

$\cancel{b^5 + 5b + 15 = 0}$

$\cancel{3b^5 + 15b + 45 = 0}$

$\cancel{3(a^5+b^5) + 15(a+b) = 29}$

$\cancel{3(a+b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4 + 5) = 29}$

$3b^5 + 3 + 13 + 15b = 0$

$3b^5 + 15b + 16 = 0$

$3(a^5+b^5) + 15(a+b) = 0$

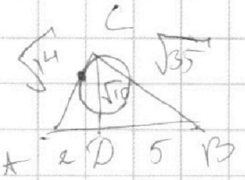
$3(a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4 + 5) = 0$

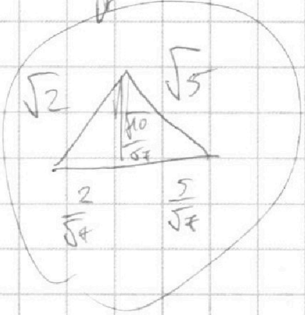
$3a^3b - 5a^2b^2 + 3ab^3 \quad + a^2b^2$

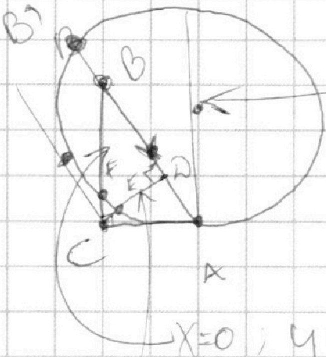
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!







$(x-\sqrt2)^2+(y-R)^2=R^2$

$x=0;\ y=R\pm\sqrt{R^2-2}$

$y=\frac{\sqrt2}{\sqrt5}x;\quad x^2-2\sqrt2x+2+\frac25x^2-\frac{2\sqrt2}{\sqrt5}Rx=0;$

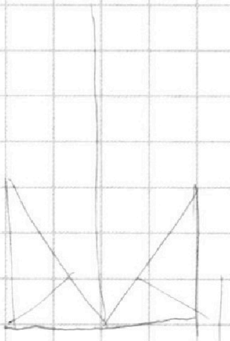
$\left(1+\frac25\right)x^2+\left(-2\sqrt2-\frac{2\sqrt2}{\sqrt5}R\right)x+2=0$

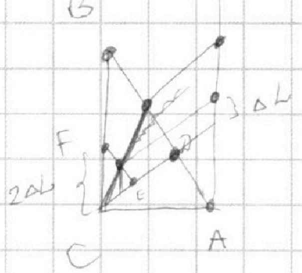
$7x^2-2\sqrt{10}\left(\sqrt5+R\right)+10=0$

$$x=\frac{5\sqrt2+\sqrt{10}R\pm\sqrt{10(R^2+10R+25)-70}}{7}$$

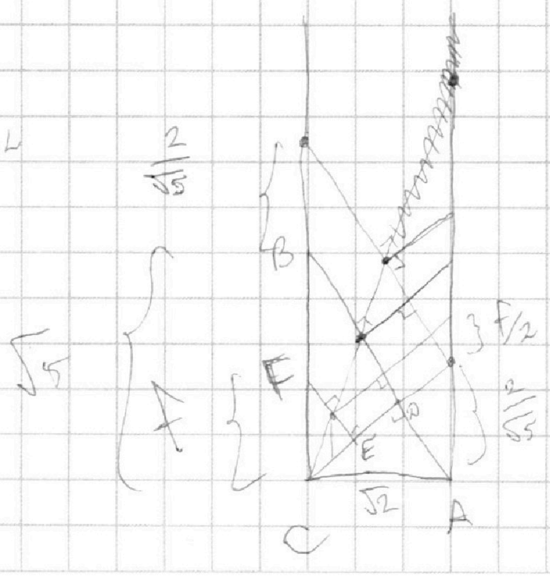
$$=\frac{5\sqrt2+\sqrt{10}R-\sqrt{10R^2+100R+180}}{}$$

$48\times7=336$





$\frac{2}{\sqrt5}$



$F=0$

$L=\frac{\sqrt{14}}{\sqrt5}$

$F=\frac{7}{\sqrt5}$

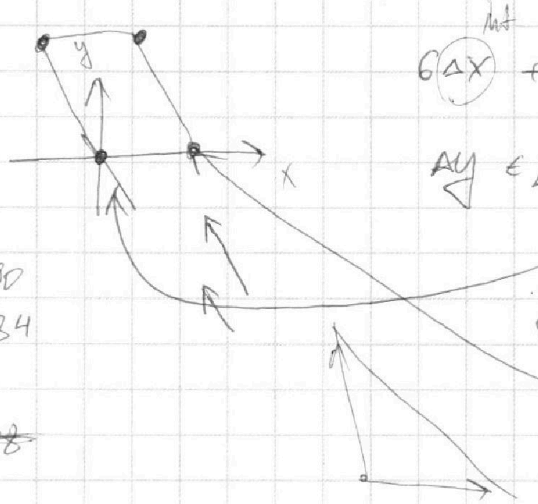
$L=\frac{\sqrt7}{2}\cdot\frac{\sqrt2}{\sqrt5}\cdot\frac{\sqrt2}{\sqrt5}=\frac{\sqrt2}{\sqrt{10}}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\cancel{\frac{a^5}{ab\sqrt{ab}} + 5\frac{a}{ab\sqrt{ab}} + \frac{b^5}{ab\sqrt{ab}} + 5\frac{b}{ab\sqrt{ab}} = a^{3,5}b^{-1,5} + 5a^{-0,5}b^{-1,5}}$$



$6\Delta x + \Delta y = 48$

$\Delta y \in [-90; 90]$

$6x_1 + y_1 = 0$

$y_1 = -6x_1$ $\quad 6x_1 + y_1 = 78$

$y_2 = -6(x_2 - 17)$

$-7; 90$

$-6; 84$

$\vdots$

~~$0; 48$~~

$\vdots$

$8; 0$

$\vdots$

$23; -90$

$6x_2 + y_2 = 6x_1 + y_1 + 48$

$64 \times 7 = 448$, $448 + 90 = 538$

$538 \times 7 = 3766$

Если A лежит на ~~$y = -6x + C$~~, то B лежит на ~~$y = -6x + (C + 48)$~~.

$y = -6(x - c)$

$y = -6(x - (c + 8))$

$(-6x; -6(x - 8)) - 16^2$ вар-тов

$(-6(x-1); -6(x - 9)) - 16^2$

$\vdots$

$(-6(x-7); -6(x-17)) - 16^2$

$16^2 \cdot \cancel{10}\ \cancel{160} = 2560$?

$(14 - \sqrt{14}x)(\ldots) =$

$= (4 + 2\sqrt{5}x)(\ldots)$

$14 - \sqrt{14}x = 2\sqrt{5}x - 4;$ $\quad x(\sqrt{14} + 2\sqrt{5}) = 18;$ $\quad x = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{7} + \sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{2} - \sqrt[3]{14 + 18\sqrt{5}}}{51}$ $\quad \sqrt[6]{5}$