МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^9 3^{10} 5^{10}$, bc делится на $2^{14} 3^{13} 5^{13}$, ac делится на $2^{19} 3^{18} 5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой BC в точке B, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке F, а катет AC – в точке E. Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $5\arcsin(\cos x) = x + \dfrac{\pi}{2}$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6\log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2\log_{5y} 3 = \log_{25y^2}\left(3^{11}\right) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-14;42)$, $Q(6;42)$ и $R(20;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 90, $SA = BC = 12$.

   а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

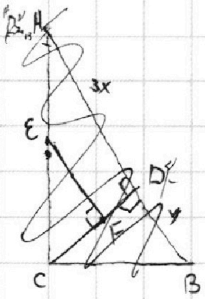
   б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



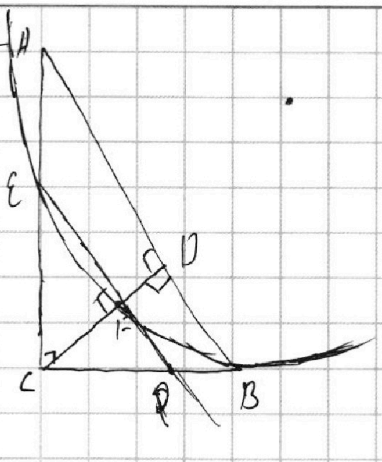
~~AB ∥ EF~~ ~~$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle DEF}} = 2$~~

№1 Решение. Если число x делится на $\cancel{d}x$, число y на $\cancel{d}y$, а число z на $\cancel{d}z$, то число xyz делится на $\cancel{d}x \cdot \cancel{d}y \cdot \cancel{d}z$.

Поэтому $ab \cdot bc \cdot ca$ делится на $2^{42} \cdot 3^{41} \cdot 5^{53}$, но $ab \cdot bc \cdot ca = (abc)^2$ – точный квадрат, т.е. $(abc)^2$ делится и на $2^{42} \cdot 3^{42} \cdot 5^{54} \Rightarrow abc$ делится на $2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{27}$. Итак $abc \geq 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{27}$. Но ac кратно 5^{30}, поэтому и abc кратно 5^{30}. Т.е. $abc \geq 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$. В качестве примера рассмотрим $a = 2^7 \cdot 5^{15} \cdot 3^7$; $b = 2^2 \cdot 3^{3}$; $c = 2^{12} \cdot 3^{11} \cdot 5^{15}$.

Ответ: $2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$

№2



Решение: Пусть P — точка пересечения прямой EF ~~сторо~~ с отрезком BC, тогда $PB^2 = PF \cdot PE$. С другой стороны, раз $EF \parallel AB$, то $CF \perp EP$, т.е. CF — высота в прямоугольном ~~треугольнике~~ $\triangle CEP$. А значит, $PC^2 = PF \cdot PE$. Итак $PC^2 = PF \cdot PE = PB^2 \Rightarrow$ т. P — середина BC, значит EF — средняя линия $\triangle CAD \Rightarrow$

$$\frac{S_{\triangle CEF}}{S_{\triangle ACD}} = \frac{1}{4}.$$ Но $$\frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{AD}{AB} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{S_{\triangle CEF}}{S_{\triangle ABC}} =$$

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{16}, \quad \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle CEF}} = \frac{16}{3}.$$

Ответ: $\frac{16}{3}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№3 Решение: $5\arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$ $\quad |:5$

$\arcsin(\cos x) = \frac{x+\frac{\pi}{2}}{5}$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \cos(x+2\pi n) = \sin\left(\frac{x}{5}+\frac{\pi}{10}\right), \ n\in Z \\ \cos(-x+2\pi n) = \sin\left(\frac{x}{5}+\frac{\pi}{10}\right), \ n\in Z \end{array}\right. \\ -\frac{\pi}{2} \le \frac{1}{5}\cdot\left(x+\frac{\pi}{2}\right) \le \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \frac{\pi}{2} - x - 2\pi n = \frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}, \ n\in Z \\ \frac{\pi}{2} + x - 2\pi n = \frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}, \ n\in Z \end{array}\right. \\ \cancel{5\pi} -\frac{5\pi}{2} \le x + \frac{\pi}{2} \le \frac{5\pi}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \frac{-6x}{5} = 2\pi n - \frac{4\pi}{10}, \ n\in Z \\ \frac{4x}{5} = -\frac{4\pi}{10} + 2\pi n, \ n\in Z \end{array}\right. \\ -3\pi \le x \le 2\pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} - \frac{5}{3}\pi n, \ n\in Z \\ \cancel{x = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}} \ x = -\frac{\pi}{2} + \frac{5}{2}\pi n, \ n\in Z \end{array}\right. \\ -3\pi \le x \le 2\pi \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{3} - \frac{5}{3}\pi = -\frac{4}{3}\pi \\ \frac{\pi}{3} - \frac{10}{3}\pi = -3\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + \frac{5}{3}\pi = 2\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} \end{array}\right.$$

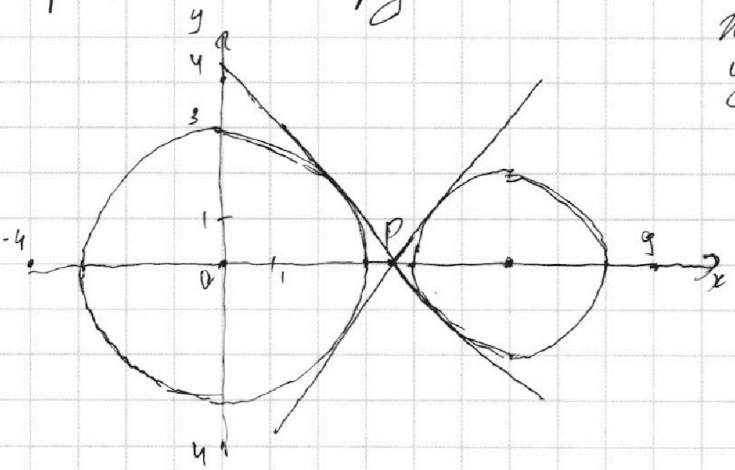
Ответ: $x = \frac{\pi}{3}$; $x = -\frac{4}{3}\pi$; $x = -3\pi$; $x = 2\pi$; $x = -\frac{\pi}{2}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4 $\begin{cases} ax+2y-3b=0 \\ (x^2+y^2-9)(x^2+y^2-12x+32)=0 \end{cases}$ Решение: Множители второго уравнения - уравнения окружностей в центре (0;0) и $r=3$ - первого и в центре в точке (6;0) $R=2$ - второй. (т.к. $x^2+y^2-12x+32)=0 \iff (x-6)^2+y^2=2^2$). Первое - уравнение прямой, т.е. угол наклона должен быть такой, что с помощью свободного члена мы можем ее „перенести" так, чтобы она пересекла обе окружности.



Иначе говоря прямая должна быть между общими касательными. Точка P делит отрезок [3;4] в отношении радиусов окружностей, т.е имеет координаты (3,(6);0). Уравнения касательных из этой точки имеют коэфициенты при x:

$K_1 = 15/11 \cdot \sqrt{\frac{11}{9}}$ и $K_2 = -K_1$. Из первого уравнения $y = -\frac{a}{2}x + \frac{3}{2}b$. Т.е. $-K_1 < \frac{a}{2} < K_1 \iff -2K_1 < a < 2K_1 \Rightarrow -\frac{30}{11}\cdot\sqrt{\frac{11}{9}} < a < \frac{30}{11}\cdot\sqrt{\frac{11}{9}}$.

Ответ: $a \in \left(-\frac{30}{11}\cdot\sqrt{\frac{11}{9}}; \frac{30}{11}\sqrt{\frac{11}{9}}\right)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№5 Решение: $\log_3^4 x + 6\log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8$ и $\log_3^4 5y + 2\log_{5y} 3 = \log_{25y^2}(3^{11}) - 8$

$\log_3^4 x + 6\log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8$

$\log_3^4 x + 6\log_x 3 = \log_x 3^4 - 8$

$\log_3^5 x + 6\log_x 3 \cdot \log_3 x = 10\log_x 3 \cdot \log_3 x - 8\log_3 x$

$\log_3^5 x + 6 = 10 - 8\log_3 x$

$a = \log_3 x$ $x > 0$

$b = \log_3 5y$ $y > 0$, т.к. иначе $\log_{5y} 3$ и $\log_x 3$ - не опр.

$\log_3^4 5y + 2\log_{5y} 3 = 2\log_{5y} 3^{11} - 8$

$\log_3^5 5y + 2 = 22 - 8 \cdot \log_3 5y$

$a^5 + 8a = 4$

$b^5 + 8b = 20$ - т.е. ур-е $z^5 + 8z - c = 0$. Имеет не более одного

решения, т.к. производная $5z^4 + 8 > 0$ =>

сущ-ет не более одной пары a, b удовлетворяющей

системе => сущ. не более одной пары x, y, удовл.

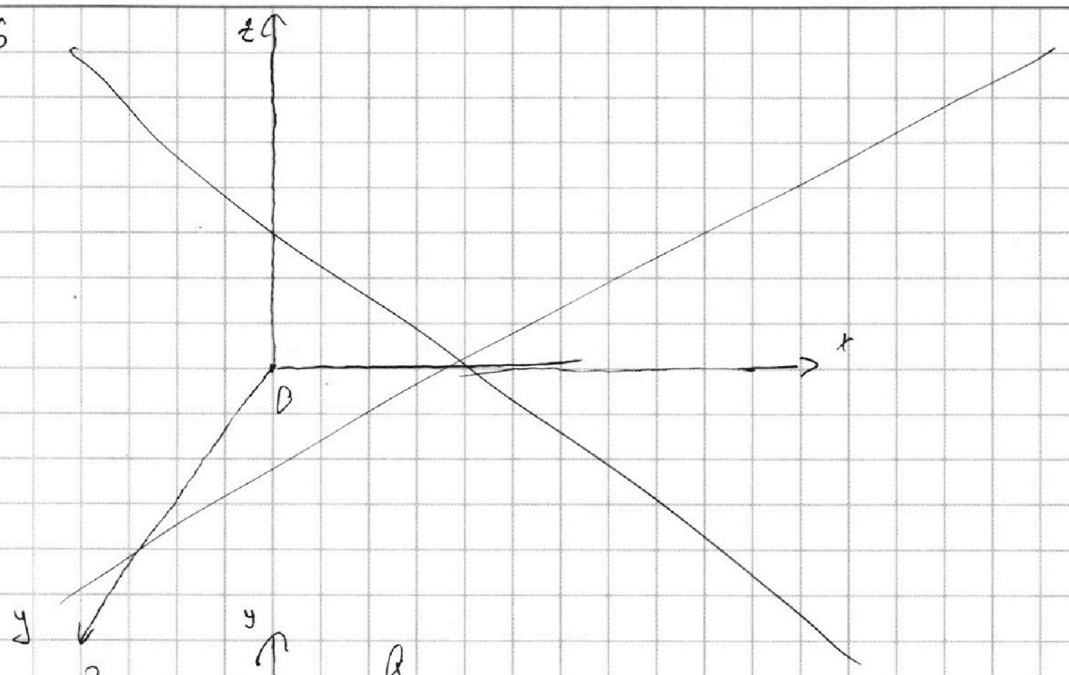
системе

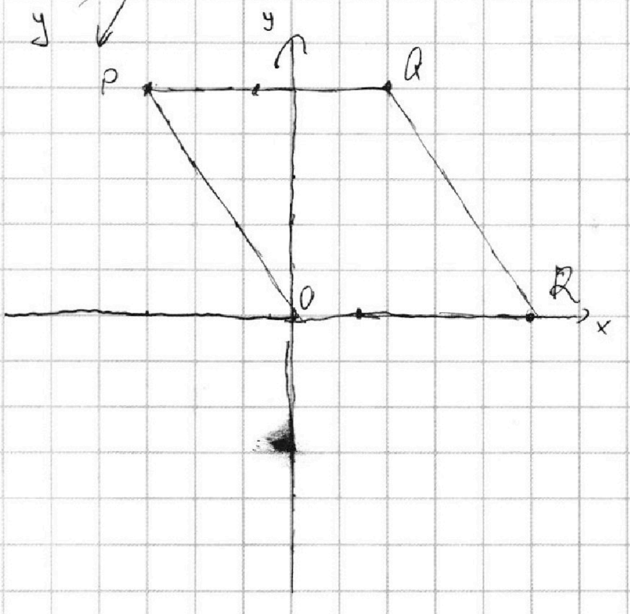
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№6





P(-14; 42); Q(6; 42); O(0; 0); R(20; 0).

Решение: Рассмотрим т. плоскости $(x_1; y_1)$. Заметим, что всякая т. B $(x_2; y_2)$ для которой $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$, лежит на прямой $y = -3x + (3x_1 + y_1 + 33)$. Эта прямая параллельна сторонам OP и QR параллелограмма, т.к. они тоже имеют коэффициент наклона -3. И так в каждой точке внутри параллелограмма с координатами $(x_1; y_1)$ соответствует ~~соответственно~~ ~~этого~~ все целые точки которые попали на отрезок прямой $y = -3x + (3x_1 + y_1 + 33)$, ограниченный отрезками OR и PQ. Продолжение на след. листе.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Продолжение: №6

Кол-во целых точек = кол-ву точек с целой абсциссой. В случае если y_1 кратно 3 их 15, иначе 14. Точки, у которых существуют парные (т.е. соответствующая им прямая пересекает параллелограмм), лежат в параллелограмме с вершинами $(0;0)$, $(-14;42)$, $(-5;42)$, $(9;0)$. Среди них с ординатой кратной 3: $15\cdot10=150$ шт., с ординатой не кратной 3 $28\cdot9=252$ шт. Тогда всего пар:

$150\cdot15+252\cdot14=5778$

Ответ: 5778

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№7 б) Решение: $4 = SN = SL = MK$, что было доказано в пункте а). $KA_1 = MK + MA_1 = 4 + 6 = 10$.

Пусть т. H – основание перпендикуляра из т. K на BC. $KH = KA_1 \cdot \sin\angle MA_1C = KA_1 \cdot \sin 2\alpha$, т.к. A_1 – центр описанной окр. $\triangle B_1HC$ и $\angle MA_1C$ – в 2 раза больше $MBC = \alpha$. В прошлом пункте было получено равенство $\frac{12\sin 2\alpha \cdot 12\cos 2\alpha}{2} = 30$. Преобразуем его: $6 \cdot \sin 2\alpha = 5$, $\sin 2\alpha = \frac{5}{6}$, $KH = KA_1 \cdot \frac{5}{6} = \frac{10 \cdot 5}{6} = \frac{25}{3}$. Пусть O – центр сферы Ω, тогда по теореме ~~о 3~~ о 3 перпендикулярах. OH – перпендикулярно BC, а также OH лежит в биссекторной плоскости двугранного угла при ребре BC пирамиды SABC, поэтому двугранный угол при ребре BC = удвоенному ~~~~ $\angle OHK$.

Пусть $\angle OHK = \beta$, тогда $tg\beta = \frac{OK}{KH} = \frac{5}{\frac{25}{3}} = \frac{3}{5}$. $tg 2\beta = \frac{2tg\beta}{1 - tg^2\beta} = \frac{2 \cdot \frac{3}{5}}{1 - \frac{9}{25}} = \frac{30}{16} = \frac{15}{8}$.

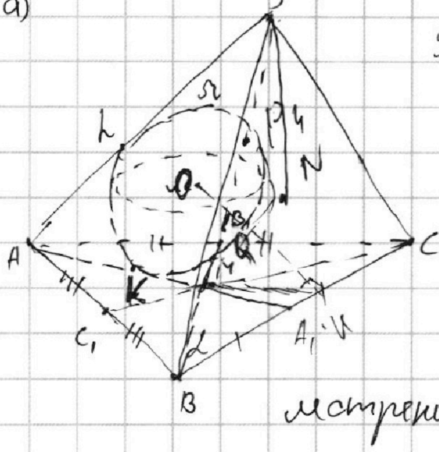
Ответ: б) двугранный угол при ребре $BC = arctg\frac{15}{8}$; а) $AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 2430$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№7 а)



$SP=MQ$ $S_{\triangle ABC}=90$, $SA=BC=12$, $SN=4$, $r=5$

Решение: Т.к. $SP=MQ$, то $SQ=MP$, $MK^2=MP\cdot MQ=SP\cdot SQ=SL^2 \Rightarrow MK=SL$, где равенства берутся из рассмотрения степеней точек S и M, относительно сферы Ω. Также $AL=AK$, т.к. AL и AK - касательные из т. A к сфере Ω. Тогда $12=BC=SA=AL+LS=AK+KM=AM$. Т.к. M - т. пересечения медиан в $\triangle ABC$, то $AM=2A_1M=BC=2CA_1$. В $\triangle BMC$ медиана MA_1 - в 2 раза меньше стороны $BC \Rightarrow \angle BMC=90^\circ$. Известно, что $S_{\triangle BMC}$ в трое меньше площади $\triangle ABC$, т.к. высота опущенная из A на BC, относится к высоте опущенной из M на BC, как $\frac{A_1A}{A_1M}=3$, поэтому $S_{\triangle BMC}=30$. Обозначим $\angle MBC$ за α. Тогда $MC=12\cdot\sin\alpha$, $\Rightarrow BM=12\cos\alpha$, $S_{\triangle BMC}=\frac{12\sin\alpha\cdot 12\cos\alpha}{2}=\frac{BM\cdot CM}{2}=30$. Произведение медиан в $\triangle ABC$ $=CC_1\cdot AA_1\cdot BB_1=\frac{3}{2}CM\cdot\frac{3}{2}BM\cdot 18=30\cdot 18\cdot\frac{3}{2}\cdot 3=15\cdot 18\cdot 9=$ 2430.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!