



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^8 3^{14} 5^{12}$, bc делится на $2^{12} 3^{20} 5^{17}$, ac делится на $2^{14} 3^{21} 5^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 5 : 2$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3, \quad \text{и} \quad \log_5^4 y + 4 \log_y 5 = \log_{y^3} 0,2 - 3.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-16; 80)$, $Q(2; 80)$ и $R(18; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 100, $SA = BC = 16$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

| | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



~ 1

Дано: $a, b, c \in \mathbb{N}$

$$ab: 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12}$$

$$bc: 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{17}$$

$$ac: 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{39}$$

Найти: abc - наим.

$$1) \text{ Пусть } \begin{cases} ab = k \cdot 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12} \\ bc = m \cdot 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{17} \\ ac = n \cdot 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{39} \end{cases}$$

где $k, m, n \in \mathbb{N}$

$$\text{Тогда } \begin{cases} b = \frac{k}{a} \cdot 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12} & (1) \\ c = \frac{m}{b} \cdot 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{17} & (2) \\ c = \frac{n}{a} \cdot 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{39} & (3) \end{cases}$$

$$(2) = (3) \quad \frac{m}{b} \cdot 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{17} = \frac{n}{a} \cdot 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{39}$$

$$b = \frac{m}{n} \cdot a \cdot 2^{-2} \cdot 3^{-1} \cdot 5^{-22}$$

$$(1): \quad \frac{m}{n} \cdot a \cdot 2^{-2} \cdot 3^{-1} \cdot 5^{-22} = \frac{k}{a} \cdot 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12}$$

$$\frac{m}{n} a^2 = \frac{kn}{m} \cdot 2^{20} \cdot 3^{15} \cdot 5^{34}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

| | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$a = \sqrt{\frac{kn}{m} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \cdot 3^{15} \cdot 5^{34}} =$$
$$= 2^5 \cdot 3^7 \cdot 5^{17} \sqrt{\frac{kn}{m} \cdot 3}$$

Заметим, что

$$abc = \underbrace{2^5 \cdot 3^7 \cdot 5^{17} \sqrt{\frac{kn}{m} \cdot 3}}_a \cdot \underbrace{m \cdot 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{17}}_b =$$

$$= 2^{17} \cdot 3^{27} \cdot 5^{34} \sqrt{m^2 \cdot \frac{kn}{m} \cdot 3} =$$
$$= 2^{17} \cdot 3^{27} \cdot 5^{34} \sqrt{knm \cdot 3}$$

Т.к. $abc \in \mathbb{N} \Rightarrow \sqrt{knm \cdot 3} \in \mathbb{N}$
(нога $a, b, c \in \mathbb{N}$)

и т.к. $\nexists abc$ - наим $\Rightarrow \sqrt{knm \cdot 3}$ - наим \Rightarrow

$\Rightarrow \sqrt{knm \cdot 3} = 3$, при $k=3$ или $n=3$ или $m=3$

Тогда $abc = 2^{17} \cdot 3^{27+1} \cdot 5^{34}$

Ответ: $2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{34}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

| | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$12m = 16\pi - 4\pi k \quad /:4$$

$$3m = 4\pi - \pi k$$

$$m = \frac{4\pi}{3} - \frac{\pi k}{3}, \quad \pi \leq m < 2\pi$$

$$\pi \leq \frac{4\pi}{3} - \frac{\pi k}{3} < 2\pi \quad /: \pi$$

$$1 \leq \frac{4}{3} - \frac{k}{3} < 2 \quad / \cdot 3$$

$$3 \leq 4 - k < 6 \quad / -4$$

$$-1 \leq -k < 2$$

$$-2 < k \leq +1, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$k = -1 \quad m = \frac{4\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3} \quad \chi = -2\pi + \frac{5\pi}{3} = -\frac{\pi}{3}$$

$$k = 0 \quad m = \frac{4\pi}{3} \quad \Rightarrow \quad \chi = 0 \cdot 2\pi + \frac{4\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$$

$$k = 1 \quad m = \frac{4\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = \pi \quad \chi = 2\pi + \pi = 3\pi$$

Ответ: $(-2\pi; \frac{\pi}{2})$; $-\frac{\pi}{3}$; $\frac{4\pi}{3}$; 3π .

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

| | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$8m = 4\pi + 4\pi k \quad /:8$$

$$m = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi k}{2}, \quad 0 \leq m < \pi$$

$$0 \leq \frac{\pi}{2} + \frac{\pi k}{2} < \pi \quad /: \frac{\pi}{2}$$

$$0 \leq 1 + k < 2 \quad /-1$$

$$-1 \leq k < 1, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$k = -1 \quad m = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0 \Rightarrow x = -2\pi + 0 = \boxed{-2\pi}$$

$$k = 0 \quad m = \frac{\pi}{2} + 0 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = 0 + \frac{\pi}{2} = \boxed{\frac{\pi}{2}}$$

II 3 и 4 случая, $\pi \leq m < 2\pi$

$$10(m - \frac{3\pi}{2}) = \pi - 4\pi k - 2m$$

$$10m - 15\pi = \pi - 4\pi k - 2m$$

$$12m = +16\pi - 4\pi k$$

$$m = 2\pi - \frac{\pi k}{2}$$

$$\pi \leq 2\pi - \frac{\pi k}{2} < 2\pi \quad /:\pi$$

$$1 \leq 2 - \frac{k}{2} < 2 \quad /-2$$

$$-1 \leq -\frac{k}{2} < 0$$

$$0 < \frac{k}{2} \leq 1 \quad / \cdot 2$$

$$0 < k \leq 2, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$k = 1 \quad m = 2\pi - \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow x = 1 \cdot 2\pi + \frac{3\pi}{2} = \frac{7\pi}{2}$$

$$k = 2 \quad m = 2\pi - \frac{\pi \cdot 2}{2} = \pi \Rightarrow x = 2 \cdot 2\pi + \pi = 5\pi$$

Ответ: $-2\pi; \frac{\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}; 5\pi.$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~ 3

$$\text{ГО } \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$$

Пусть $m = x \text{ \% } 2\pi \Rightarrow x = k \cdot 2\pi + m, k \in \mathbb{Z}$
(m - остаток x от деления на 2π)

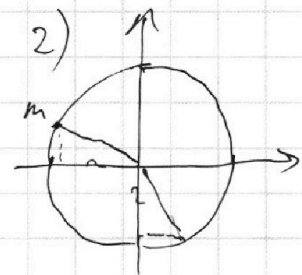
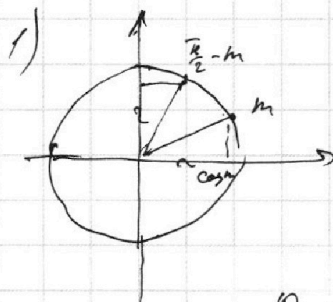
Понятно ~~а~~ $\cos x = \cos m$

$$\arcsin(\cos x) = \arcsin(\cos m)$$

Реш 4 случая

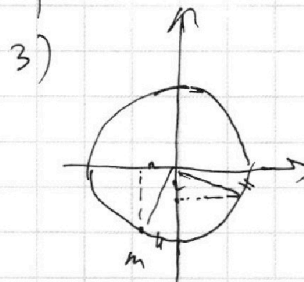
1) $m \in \text{I}$

$$\arcsin(\cos m) = \frac{\pi}{2} - m$$



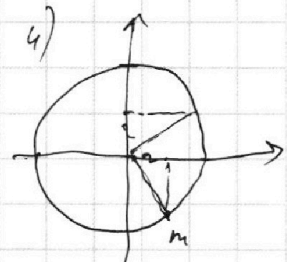
2) $m \in \text{II}$

$$\arcsin(\cos m) = \frac{\pi}{2} - m$$



3) $m \in \text{III}$

$$\arcsin(\cos m) = \frac{\pi}{2} - (3\pi - m) = m - \frac{5\pi}{2}$$



4) $m \in \text{IV}$

$$\arcsin(\cos m) = m - \frac{3\pi}{2}$$

$$\text{ГО } \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$$

$$\text{ГО } \arcsin(\cos m) = \pi - 2(k \cdot 2\pi + m)$$

НОУ

I 1 и 2 (углы $0 \leq m < \pi$)

$$\text{ГО } \left(\frac{\pi}{2} - m\right) = \pi - 4\pi k - 2m$$

$$5\pi - 10m = \pi - 4\pi k - 2m$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0 & (1) \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \quad 3y = ax + 4b$$

$$y = \frac{a}{3}x + \frac{4}{3}b \quad \text{— наклонная прямая}$$

*проходят через $\frac{4}{3}b(0; \frac{4}{3}b)$
 $\frac{a}{3}$ — угол наклона*

$$(2): \quad x^2 + y^2 - 1 = 0 \quad | \quad x^2 + y^2 - 20y + 64 = 0$$

$$x^2 + y^2 = 1 \quad \text{— окружность} \quad | \quad y^2 - 20y + 100 + x^2 - 100 + 64 = 0$$

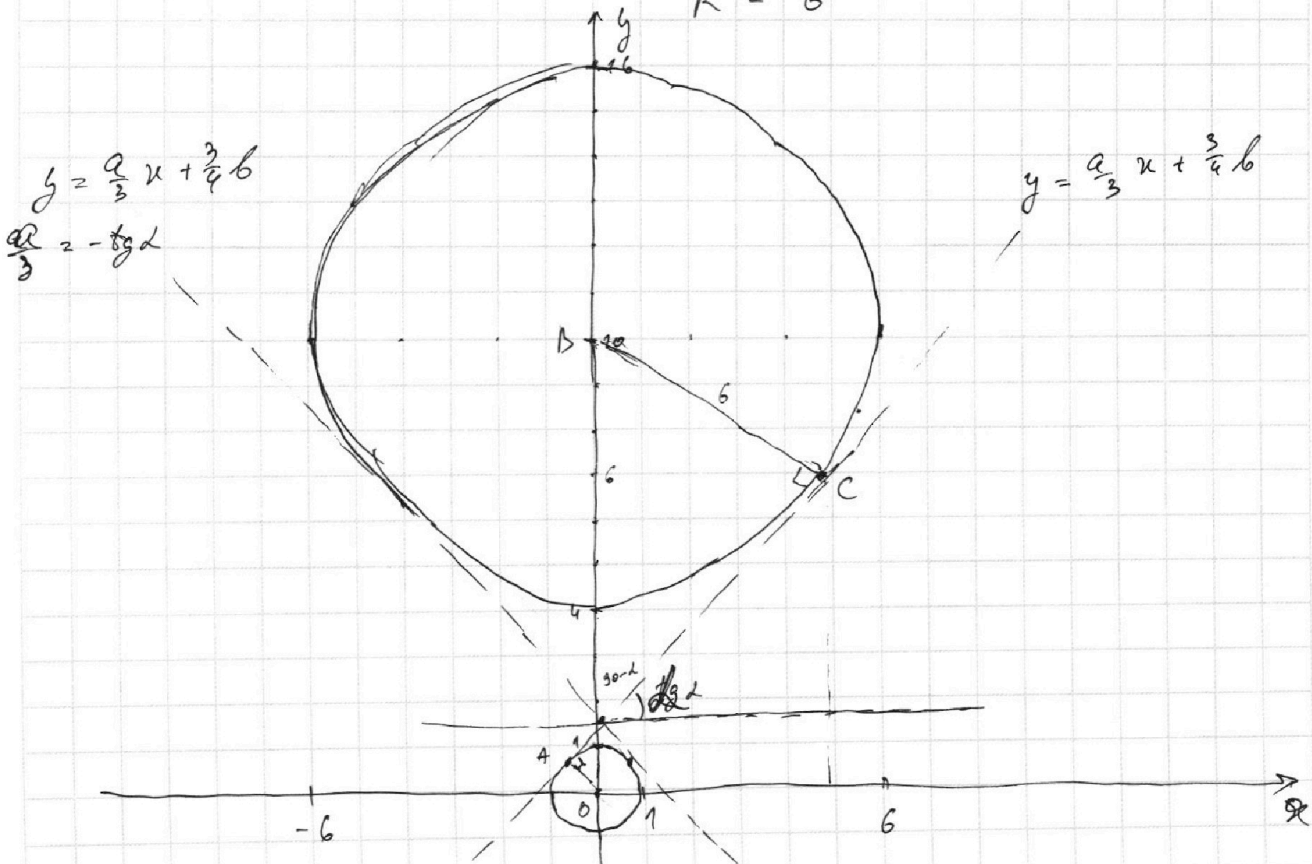
окр-тб

$$(0; 0) \text{ — центр} \quad | \quad x^2 + (y - 10)^2 = 36 \text{ — окружность}$$

окр-тб

$$R = 1$$

$$R = 6$$



Проведем внутр касат, найдем α — угол наклона

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

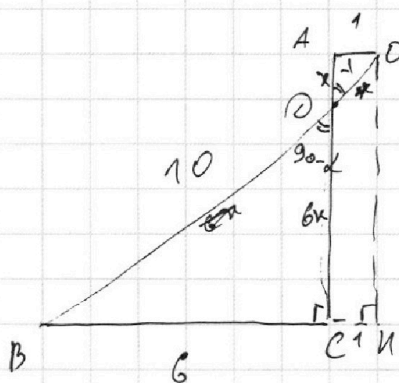
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Т.к. система имеет 4 решения \Rightarrow

Каждое значение a , для которых нет таких
система
уравнений не может иметь 4 решения.



$$OB = 20$$

$$OK = AC = \sqrt{OB^2 - BK^2} \quad (1)$$

$$BK = BC + CK = 6 + 1 = 7$$

$$(2) \sqrt{10^2 - 7^2} = \sqrt{51}$$

Заметим, что $\triangle BCD \sim \triangle OAD$ \Rightarrow
($\angle BDC = \angle ADO$ - верт, по 2-ум углам
 $\angle BCD = \angle OAD = 90^\circ$)

$$\Rightarrow \frac{BC}{AO} = \frac{AD}{OD} = k$$

$$\frac{AD}{OD} = \frac{6}{1} \Rightarrow \text{пусть } AD = 6x \quad OD = x$$

$$OB = BD + OD = 6x + x = 7x = \sqrt{51} \quad 10$$

$$AC = AD + CD = 7x = \sqrt{51}$$

$$x = \frac{\sqrt{51}}{7}$$

$$OC = 6x = \frac{6\sqrt{51}}{7}$$

Тогда, $\text{tg} \angle BDC = \text{tg}(90 - \alpha) = \frac{BC}{OC} = \frac{6 \cdot 7}{6\sqrt{51}} = \frac{7}{\sqrt{51}}$

$$\text{ctg}(90 - \alpha) = \frac{\sqrt{51}}{7}$$

$$\text{tg} \alpha = \frac{\sqrt{51}}{7}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

| | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{a}{3} = \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{51}}{7}$$

Тогда система ^{может} иметь 4 решения

$$\frac{a}{3} > \operatorname{tg} \alpha$$

$$\frac{a}{3} > \frac{\sqrt{51}}{7}$$

и

$$\frac{a}{3} < -\frac{\sqrt{51}}{7}$$

$$a > 3 \frac{\sqrt{51}}{7}$$

$$a < -3 \frac{\sqrt{51}}{7}$$

$$\text{Ответ: } a > \frac{3\sqrt{51}}{7}; a < -\frac{3\sqrt{51}}{7}.$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

| | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{2x^3} 625 - 3 & (1) \\ \log_5^4 y + 4 \log_y 5 = \log_{y^3} 0,2 - 3 & (2) \end{cases} \quad xy = ?$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} 2x > 0 \\ 2x \neq 1 \\ y > 0 \\ y \neq 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x > 0 \\ x \neq \frac{1}{2} \\ y > 0 \\ y \neq 1 \end{cases}$$

(1): Замена: $\log_5(2x) = a$, с зр ОДЗ $a \neq 0$

$$\log_5^4 2x = a^4$$

$$\log_{2x} 5 = \frac{1}{\log_5 2x} = \frac{1}{a}$$

$$\log_{2x^3} 625 = \log_{(2x)^3} 5^4 = \frac{4}{3} \log_{2x} 5 = \frac{4}{3} \frac{1}{\log_5 2x} = \frac{4}{3a}$$

$$a^4 - 3 \cdot \frac{1}{a} = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{a} - 3 \quad | \cdot a \neq 0$$

$$a^5 - 3 = \frac{4}{3} - 3a$$

$$a^5 + 3a = 4 \frac{1}{3}$$

(2): Замена: $\log_5 y = b$, с зр ОДЗ $b \neq 0$

$$\log_5^4 y = b^4$$

$$\log_y 5 = \frac{1}{\log_5 y} = \frac{1}{b}$$

$$\log_{y^3} 0,2 = \frac{1}{3} \log_y \frac{1}{5} = -\frac{1}{3} \log_y 5 = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{b}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$b^4 + 4 \cdot \frac{1}{b} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{b} - 3 \quad / \cdot b \neq 0$$
$$b^5 + 4 = -\frac{1}{3} - 3b$$
$$b^5 + 3b = -4\frac{1}{3}$$
$$+ \begin{cases} a^5 + 3a = 4\frac{1}{3} \\ b^5 + 3b = -4\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$a^5 + b^5 + 3(a+b) = 0$$

Заметим, что $(a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4) =$
 $= a^5 - a^4b + a^3b^2 - a^2b^3 + ab^4 + a^4b - a^3b^2 + a^2b^3 - ab^4 + b^5 = a^5 + b^5$

$$(a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4) + 3(a+b) = 0$$

$$(a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4 + 3) = 0$$

$$a+b = 0 \quad | \quad \frac{a^5 + b^5}{a+b} + 3 = 0 \quad a+b \neq 0$$

$$\log_5 2x + \log_5 y = 0$$

$$\log_5 (2xy) = 0$$

$$2xy = 1$$

$$|xy = \frac{1}{2}|$$

Заметим, что выражение $(a^5 + b^5)$ и $(a+b)$

совпадают по знаку \Rightarrow

$$\Rightarrow \frac{a^5 + b^5}{a+b} > 0 \Rightarrow$$

Тогда $\frac{a^5 + b^5}{a+b} + 3 \geq 0$
реш нет

Ответ: $\frac{1}{2}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



| | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4 + 3 = 0$$

$$a^4 + 2a^2b^2 + b^4 - a^2b^2 - ab(a^2 + b^2) + 3 = 0$$

$$(a^2 + b^2)^2 - (ab)^2 - ab(a + b)^2 - 2ab + 3 = 0$$

$$((a + b)^2 - 2ab)^2 - (ab)^2 - ab((a + b)^2 - 2ab) + 3 = 0$$

$$(a + b)^2 = s \quad ab = p$$

$$(s - 2p)^2 - p^2 - p(s - 2p) + 3 = 0$$

$$s^2 - 4ps + 4p^2 - p^2 - ps + 2p^2 + 3 = 0$$

$$s^2 - 5ps + 5p^2 + 3 = 0$$

$$s^2 - 5ps + 5p^2 + 3 = 0$$

$$s^2 - 4ps + 4p^2 - ps + p^2 + 3 = 0$$

$$(s - 2p)^2 + p^2 - 2ps + 1 + 2 + ps = 0$$

$$(p - 1)$$

$$\frac{a^5 + b^5}{a + b}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$a^4 + a^2 b^2 + b^4 - ab(a^2 + b^2) + 3 = 0$$

~~$$a^4 - 2a^2 b^2 + b^4 + 3a^2 b^2 - ab(a^2 + b^2) + 3 = 0$$~~

~~$$(a^2 - b^2)^2 + 3a^2 b^2 - ab(a^2 + b^2) + 3 = 0$$~~

$$a^4 + 2a^2 b^2 + b^4 - a^2 b^2 - ab(a^2 + b^2) + 3 = 0$$

$$(a^2 + b^2)^2 + 2ab(a^2 + b^2) + a^2 b^2 - 2a^2 b^2 - 3ab(a^2 + b^2) + 3 = 0$$

$$(a^2 + b^2 + ab)^2 - 2a^2 b^2 + 3(-ab(a^2 + b^2) + 1) = 0$$

$$\underbrace{(a^2 + b^2)}_c - \underbrace{2ab}_{p} + ab)^2 - 2(ab)^2 + 3(-ab(a^2 + b^2 - 2ab) + 1) = 0$$

$$(c^2 - p)^2 -$$

$$a^4 + b^4 + ab(-a^2 + ab - b^2) + 3 = 0$$

$$a^4 + b^4 - ab(a^2 - ab + b^2) + 3 = 0$$

$$a^4 + b^4 - ab((a+b)^2 - ab) + 3 = 0$$

$$a^4 + b^4 - ab(a+b)^2 - a^2 b^2 + 3 = 0$$

$$a^4 + b^4 - a^2 b^2 + b^4 + (a^2 + b^2)(ab) + (a^2 + b^2)(ab) - 3ab - a^2 b^2 + 3 = 0$$

$$0 = (a^2 + b^2)^2 - a^2 b^2 + 3 = 0$$

$$0 = (a^2 + b^2)(ab) - a^2 b^2 + 3 = 0$$

$$0 = a^4 - a^3 b + a^2 b^2 - a b^3 + b^4 + 3 = 0$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$h \cdot 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12} = \frac{m}{n} \cdot 2^{-2} \cdot 3^{-1} \cdot 5^{-22} \cdot a^2 \quad \frac{39}{22}$$

$$a^2 = \frac{h^2}{m^2} \cdot 2^{10} \cdot 3^{15} \cdot 5^{34}$$

$$a = 3 \cdot 2^5 \cdot 5^{17} \sqrt{\frac{h^2}{m} \cdot 3}$$

~~$$b = \frac{h \cdot 2^{16} \cdot 3^{24} \cdot 5^{12} \cdot m}{n} = \frac{m}{n} \cdot 2^{-2} \cdot 3^{-1} \cdot 5^{-22}$$~~

~~$$c = h \cdot 2^{10} \cdot 3^{21} \cdot 5^{33}$$~~

$$abc = a \cdot \frac{m}{n} \cdot 2^{-2} \cdot 3^{-1} \cdot 5^{-22} \cdot \frac{h \cdot 2^{16} \cdot 3^{24} \cdot 5^{12} \cdot m}{n} \cdot \frac{h \cdot 2^{10} \cdot 3^{21} \cdot 5^{33}}{n}$$

$$= a \cdot m \cdot 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{13}$$

$$= a \cdot m \cdot 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{13} = 3 \cdot 2^5 \cdot 5^{17} \sqrt{\frac{h^2}{m} \cdot 3}$$

$$m \sqrt{\frac{h^2}{m} \cdot 3} \rightarrow \min$$

$$\sqrt{h^2 m \cdot 3} \rightarrow \min$$

используем $\cos x = a$

$$\sin x = \pm \sqrt{1 - a^2} \Rightarrow$$

а не $\sin(\cos x)$

$$\Rightarrow \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\sin^2 x + a^2 = 1$$

$$a = \pm \sqrt{1 - \sin^2 x}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

23

$$10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$$

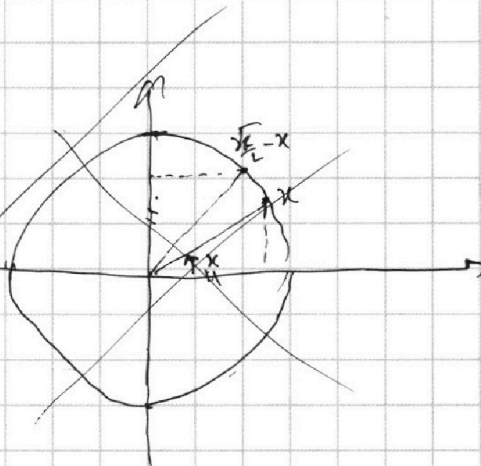
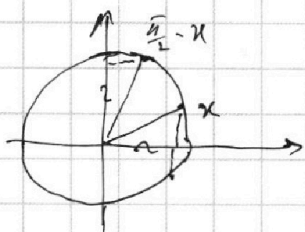
~~1) $x \in I$ и т~~

Рассмотрим 4 случая

1) $x \in I$ и т

$$\arcsin(\cos x) = \frac{\pi}{2} - x$$

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$



2) $x \in IV$ и т

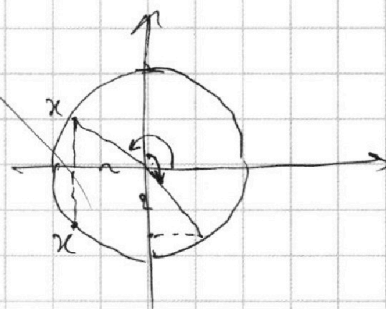
$$\arcsin(\cos x) = \left(x + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \frac{\pi}{2}$$

3) $x \in II$ и т

$$\arcsin(\cos x) = \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \frac{\pi}{2}$$

4) $x \in III$ и т

$$\arcsin(\cos x) = \left(x + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \frac{\pi}{2}$$



10 Т.к.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$a^4 + a^2 b^2 + b^4 - a^3 b - a b^3 + 3 = 0$$

$$(a^2 + b^2)^2 + a^2 b^2 - ab(a^2 + b^2) + 3 = 0$$

$$(a^2 + b^2)(a^2 + b^2 - ab) + 3a^2 b^2 = 0$$

$$(a^2 + b^2)((a+b)^2 - 3ab) + 3a^2 b^2 = 0$$

$$(a^2 + b^2)^2 - 3ab = k(3 + a^2 b^2)$$

$$(a^2 + b^2)^2 - ab(a^2 + b^2) + a^2 b^2 + 3 = 0$$

$$(a^2 + b^2 + ab)^2 - 3ab(a^2 + b^2) + 3 = 0$$

$$((a+b)^2 - ab)^2 + 3(1 - ab(a^2 + b^2)) = 0$$

$$(a^2 + b^2 - a^2 b^2)^2 + ab(a^2 + b^2) + 3 = 0$$

$$\frac{a^3 + b^3}{a+b} + 3 = 0 \quad | \cdot a+b \neq 0$$

$$a^3 + b^3 + 3(a+b) = 0$$

$$(a+b) \frac{(a^2 + b^2)^3 + a^3 b^3}{a^2 + b^2 + ab} + 3 = 0$$

$$a^2 + b^2 = m$$

$$a^2 b^2 = n$$

$$m^2 - mn + n^2 + 3 = 0$$

$$\frac{m^3 + n^3}{m+n} + 3 = 0$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$= a^3 - a^2 b + a b^2 + b^3 - a^2 b + b^3$$

$$(a^2 + b^2)^3 + a^3 b^3 + 3(a^2 + b^2 + ab) = 0$$

$$(m+n)(m^2 - mn + n^2)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$$

$$10 \cdot \frac{\pi}{6} = 5 \frac{\pi}{3}$$

$$n - 2 \cdot \left(\frac{\pi}{3}\right) = \pi + \frac{2\pi}{3}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos \pi = -1$$

$$3\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{8\pi}{3}$$

$$\cos\left(\frac{8\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Замена: $\log_y 5 \rightarrow \log_5 y = b$ $4\pi + 4\pi k = 8\pi$
 $u \in \mathbb{D} \cap \mathbb{Z}$ т.к. $y \neq 1 \Rightarrow b \neq 0$ $m = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi k}{2}$
 $0 \leq \frac{\pi}{2} + \frac{\pi k}{2} < \pi / i \cdot \pi$

$$b^4 + \frac{4}{b} = -\frac{1}{3b} - 3 \quad | \cdot b \neq 0 \quad 0 \leq \frac{\pi}{2} + \frac{\pi k}{2} < \pi$$

$$b^5 + 4 = -\frac{1}{3} - 3b \quad 0 \leq 1 + \pi k < 2$$

$$(2) \quad b^5 + 3b + 4\frac{1}{3} = 0$$

$$(1) \quad a^5 + 3a - 4\frac{1}{3} = 0 \quad (2)$$

$$a^5 + b^5 + 3a + 3b = 0$$

$$x = \frac{a^5}{2}$$

$$y = \frac{b^5}{2}$$

$$x \cdot y = \frac{a^5 \cdot b^5}{2}$$

$$(a+b)(a^4 - ab^3)$$

$$-a + b^4$$

$$a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

$$(1): \quad b^5 + 3a + 4\frac{1}{3} = 0 \quad | \cdot 3$$

$$3b^5 + 9a + 4 = 0$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) = (a+b)((a+b)^2 - 3ab - ab)$$

$$a^4 + b^4 = (a+b)(a^3 - a^2b + ab^2 - b^3) =$$

$$= a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + a^3b - a^2b^2 + ab^3 - b^4 = a^4 - b^4$$

$$a^4 + b^4 = (a+b)(a^3 - a^2b + ab^2 - b^3)$$

$$a^5 + b^5 = (a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$$

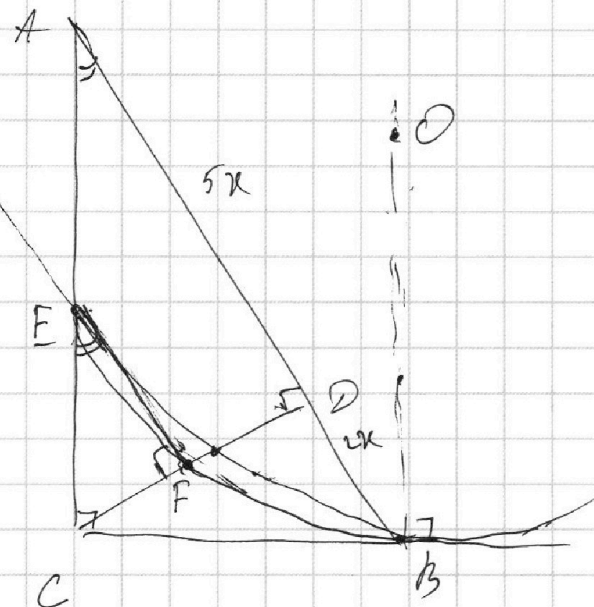
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$AD : DB = \frac{x}{4x} = \frac{1}{4}$$

$$\text{пусть } m = 2x/25$$

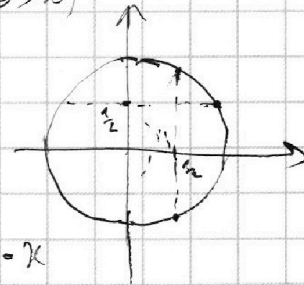
$$\frac{S_{\triangle AEC}}{S_{\triangle BFC}} = \frac{\arcsin(\cos x)}{\arcsin(\cos m)} = \arcsin(\cos m)$$

$$\arcsin(\cos x)$$

при $x \in I, IV$

$$\arcsin(\cos x) = \frac{\pi}{2} - x$$

$$x \in IV \quad \arcsin(\cos x) = \frac{\pi}{2} + x$$



$$\text{то } \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$$

$$\arcsin(\cos x)$$

(1) пусть $\cos x$

$x \in I, IV$ $x \in I$

$$\arcsin(\cos x)$$

$$\arcsin(\cos x) = \frac{\pi}{2} - x$$

$x \in II$

$$\arcsin(\cos x) = x + \pi$$

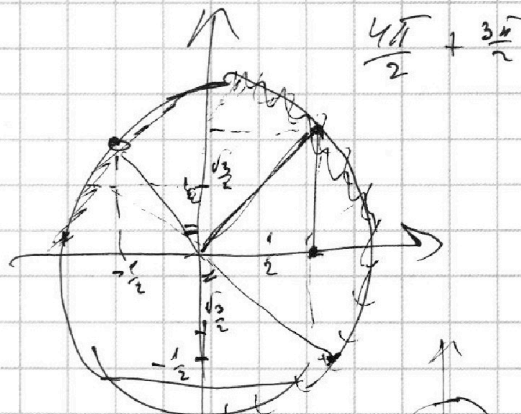
$x \in III$

$$x = \frac{3\pi}{2} \quad \cos \frac{3\pi}{2} = 0$$

$$\arcsin(0) = 0$$

$$\text{то } 0 = 0$$

$$\pi -$$



$x \in II$

$$\arcsin(\cos x)$$

$$\arcsin(\cos x) = -x - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - x$$

$x \in III$

$$\arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\cos(5\pi) = \cos \pi = -1$$

$$\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$$

$$-5\pi = \pi - 2 \cdot 5\pi$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

a, b, c

$$ab = 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12}$$

$$bc = 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{17}$$

$$ac = 2^{24} \cdot 3^{21} \cdot 5^{33}$$

a, b, c наим.? →

$$\text{Пусть } ab = k \cdot 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12} \quad (1)$$

$$bc = m \cdot 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{17} \quad (2)$$

$$ac = n \cdot 2^{24} \cdot 3^{21} \cdot 5^{33} \quad (3)$$

$$(1) + (2): b(a+c)$$

$$c(a+b)$$

$$a(b+c)$$

$$(1) \quad b = \frac{2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12}}{a}$$

$$(2): \quad b = \frac{2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{17}}{c}$$

$$c = \frac{2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{17}}{b} = \frac{2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{17} \cdot a}{2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12}}$$

или

$$(3): \quad c = \frac{2^{24} \cdot 3^{21} \cdot 5^{33}}{a} = 2^4 \cdot 3^6 \cdot 5^5 \cdot a$$

$$2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{33} = 2^4 \cdot 3^6 \cdot 5^5 \cdot a^2$$

$$a^2 = 2^{10} \cdot 3^{15} \cdot 5^{28}$$

$$(1): \quad b = \frac{k \cdot 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12}}{a}$$

$$\frac{28}{-14} = \frac{14}{14}$$

$$(3): \quad c = \frac{n \cdot 2^{24} \cdot 3^{21} \cdot 5^{33}}{a}$$

$$(2): \quad b = \frac{m \cdot 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{17}}{c} = \frac{m \cdot 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{17} \cdot a}{n \cdot 2^{24} \cdot 3^{21} \cdot 5^{33}}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

| | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$= a^5 - a^4b + a^3b^2 - a^2b^3 + ab^4 - a^3b^2 + a^4b^3 - a^4b^4 + b^5 = a^5 + b^5$$

$$(a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4) + 3(a+b) = 0$$

$$(a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4 + 3) = 0$$

$$a+b=0 \quad a^3(a-b) + a^2b^2 + b^3(b-a) + 3 = 0$$

$$a^2b^2 + 3 = 0$$
$$a^4 + b^4 + ab(-a^2 + ab - b^2) + 3 = 0$$

$$a^4 + b^4 - ab(a^2 - 2ab + b^2 + ab) + 3 = 0$$

$$a^4 + b^4 - ab(a-b)^2 + 3 = 0$$

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$a^4 + b^4 = (a-b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3) =$$

$$= a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 - a^3b - a^2b^2 - ab^3 - b^4$$

$$a^4 + 2a^2b^2 + b^4 - a^2b^2 - ab(a^2 + b^2) + 3 = 0$$

$$(a^2 + b^2) - a^2b^2 - ab(a^2 + b^2) + 3 = 0$$

$$(a^2 + b^2)(1 - ab) - a^2b^2 + 3 = 0$$

$$a^2 + b^2$$

$$a^4 + a^2b^2 + b^4 - ab(a^2 + b^2) + 3 = 0$$

$$a^6 + b^6 = (a^2 - b^2)(a^4 + a^2b^2 + b^4) =$$

$$\frac{a^6 - b^6}{a^2 - b^2} = \frac{a^6 - b^6}{a^2 - b^2}$$

$$3 = 4 - 1$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

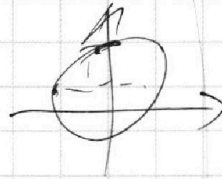
1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



то $\arcsin(\cos x) = \pi - 2x$



$\frac{4}{3}x$ $\frac{4}{3}y$

$$\frac{100}{3^6}$$

$$\log_5^4(2x) - 3\log_{2x} 5 = \log_{2x^3} 625 - 3 \quad (1)$$

$$\log_5^4 y + 4\log_y 5 = \log_5^3 0,2 - 3 \quad (2)$$

$$x^2 + y^2 - 2 \cdot 10 \cdot y + 10^2 - 10^2 + 64 = 0$$

$$x^2 + (y - 10)^2 = 36$$

$$(0) \text{ } 10 = 12$$

ОДЗ: $\left\{ \begin{array}{l} 2x > 0 \\ 2x \neq 1 \\ y > 0 \\ y \neq 1 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x > 0 \\ x \neq \frac{1}{2} \\ y > 0 \\ y \neq 1 \end{array} \right.$

$$625 = 25^2 = 5^4$$

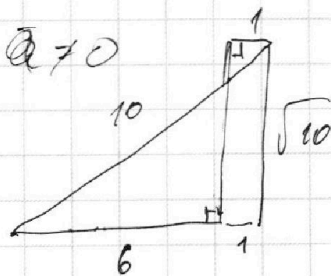
$$(1): \log_{2x} \log_{2x} 5 = \frac{1}{\log_5 2x}$$

$$\log_{2x^3} 625 - 3 = \frac{1}{3} \log_{2x} 625 = \frac{4}{3} \log_{2x} 5 = \frac{4}{3 \log_5 2x}$$

Замена: $\log_5 2x = a$ и ОДЗ т.к. $x \neq \frac{1}{2} \Rightarrow a \neq 0$

$$a^4 - \frac{3}{a} = \frac{4}{3a} - 3 \quad / \cdot a \neq 0$$

$$a^5 - 3 = \frac{4}{3} - 3a$$



$$(2): \log_y 5 = \frac{1}{\log_5 y}$$

$$\log_5^3 0,2 = \frac{1}{3} \log_y \frac{1}{5} = -\frac{1}{3} \log_y 5 = -\frac{1}{3 \log_5 y}$$