



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



- ✓ ① [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^9 3^{10} 5^{10}$, bc делится на $2^{14} 3^{13} 5^{13}$, ac делится на $2^{19} 3^{18} 5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
- ✓ ② [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .
- ✓ ③ [4 балла] Решите уравнение $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$.
- ✓ ④ [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

- ✓ ⑤ [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-14; 42)$, $Q(6; 42)$ и $R(20; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 90, $SA = BC = 12$.
- а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1 .
- б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1 $ab = k \cdot 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10}$ ~~где~~ где $k, m, n \in \mathbb{N}$
 $bc = m \cdot 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13}$ из-за делимости ab ac и bc
 $ac = n \cdot 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30}$ на соответствующие числа

$a, b, c \in \mathbb{N} \Rightarrow$ ~~все~~ степени включения любого
простого множителя в abc^2 больше чем в ac

(то же самое с abc^2 и ab ; a^2bc и bc)

тогда степень включения 5 в ~~abc^2~~ хотя бы

30 т.к. в ac она 30. тогда степень включения

5 в $a^2b^2c^2$ хотя бы $30+30=60$

также т.к. $a, b, c \in \mathbb{N}$ степень включения любого
простого числа в $a^2b^2c^2$ - чётна

отсюда

степень включения $_\$ в $a^2b^2c^2$ хотя бы $_\$

2

$$9+14+19 = 42$$

3

$$10+13+18 = 41 \Rightarrow 42$$

5

60

итого ~~abc^2~~ $a^2b^2c^2 = p^2 \cdot 2^{42} \cdot 3^{42} \cdot 5^{60}$ где $p \in \mathbb{N}$

т.е. $abc = p \cdot 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30} \geq 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$

$abc = 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$ и данные в задаче условия достигаются при

$$a = 2^7 \cdot 3^8 \cdot 5^{11}$$

$$b = 2^2 \cdot 3^3$$

$$c = 2^{12} \cdot 3^{10} \cdot 5^{13}$$

значит минимум abc это $2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$

Ответ: минимум abc это $2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№2. Индекс у прохода - треугольник у которого смотрим площадь
окружность касается BC в D и имеет

точки E и F $\Rightarrow \angle FEB = \angle FBC$

$AB \parallel EF \Rightarrow \angle FEB = \angle EBA$

значит $\angle EBA = \angle FBC$

в прямоугольном треугольнике ABC

$\angle EAB = \angle CAB = \angle DCB = \angle FCB$

$\left. \begin{array}{l} \angle EBA = \angle FBC \\ \angle EAB = \angle FCB \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle EAB \sim \triangle BCF$

отсюда $\frac{CF}{BC} = \frac{AE}{AB}$

CFD - прямая
CEA - прямая
FE || AD

$\triangle CEF \sim \triangle CAD$

$\frac{CF}{CE} = \frac{CD}{AC}$

$$\frac{CD \cdot CE}{AC \cdot BC} = \frac{AC - CE}{AB}$$

$$\frac{CD \cdot AB}{AC \cdot BC} = \frac{AC}{CE} - 1$$

в прямоугольном $\triangle ABC$ с высотой CD

$\angle CAD = \angle DCB$

$\angle CDA = \angle ACB = 90^\circ$

$\triangle CAD \sim \triangle ABC$

$$\frac{CD}{AC} = \frac{BC}{AB}$$

$$\frac{CD \cdot AB}{AC \cdot BC} = 1$$

$$\frac{AC}{CE} = 2$$

$$\frac{CE}{AC} = \frac{1}{2}$$

$$\triangle CEF \sim \triangle CAD \Rightarrow S_{ACEF} = \frac{S_{\triangle CAD}}{4}$$

$\angle CAD = \angle DCB$

$\angle CDA = \angle CDB = 90^\circ$

$\triangle ACD \sim \triangle BCD$

$$S_{ACD} = \frac{AD \cdot CD}{2}$$

$$S_{BCD} = \frac{BD \cdot CD}{2}$$

$$\frac{S_{ACD}}{S_{BCD}} = \frac{AD}{BD} = 3$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{ACEF}} = \frac{S_{ACD} + S_{BCD}}{\frac{S_{ACD}}{4}} = \frac{1 + \frac{1}{3}}{\frac{1}{4}} = \frac{16}{3}$$

Ответ: $\frac{S_{ABC}}{S_{ACEF}} = \frac{16}{3}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3. сделаем замену ~~$x = \frac{\pi}{2} - t$~~ $t = \frac{\pi}{2} - x$ $x = \frac{\pi}{2} - t$.

$$5 \arcsin\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\right) = \pi - t$$

$$5 \arcsin(\sin(t)) = \pi - t.$$

~~$\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$~~ $\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{3\pi}{2}$ т.е. $\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{3\pi}{2}$ $x \leq \pi$

$$t = \frac{\pi}{6}$$

$$x = \frac{\pi}{3}$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin p \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{5\pi}{2} \geq x + \frac{\pi}{2} \geq -\frac{5\pi}{2}$$

$$2\pi \geq x \geq -3\pi$$

~~$\frac{3\pi}{2} \geq x \geq \frac{\pi}{2}$~~

~~$\cos x \leq 0$~~ $\arcsin x < 0$ $\arcsin x < 0$
 ~~$x \leq \frac{\pi}{2}$~~ $x + \frac{\pi}{2} > 0$

или $\frac{3\pi}{2} \geq t \geq \frac{\pi}{2}$

$$\arcsin(\sin(t)) = \pi - t.$$

$$5\pi - 5t = \pi - t \quad t = \pi \quad x = -\frac{\pi}{2}$$

или $\frac{5\pi}{2} \geq t \geq \frac{3\pi}{2}$

$$\arcsin(\sin(t)) = t - 2\pi \quad 5t - 10\pi = \pi - t \quad t = \frac{11}{6}\pi \quad x = -\frac{4}{3}\pi$$

или $\frac{7\pi}{2} \geq t \geq \frac{5\pi}{2}$ $\arcsin(\sin(t)) = 3\pi - t$

$$15\pi - 5t = \pi - t \quad t = \frac{7}{2}\pi \quad x = -3\pi$$

или $t > \frac{7\pi}{2}$ $x < -3\pi$

или $-\frac{\pi}{2} \geq t \geq -\frac{3\pi}{2}$ $\arcsin(\sin(t)) = -\pi - t$ $-5\pi - 5t = \pi - t$

$$t = -\frac{6\pi}{4} = -1,5\pi$$

$$x = 2\pi$$

или $t < -\frac{3\pi}{2}$ $x < -2\pi$

Ответ: $x = \frac{\pi}{3}$ $x = -\frac{\pi}{2}$ ~~$x = -\frac{5\pi}{6}$~~ $x = -\frac{4\pi}{3}$ $x = -3\pi$ $x = 2\pi$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



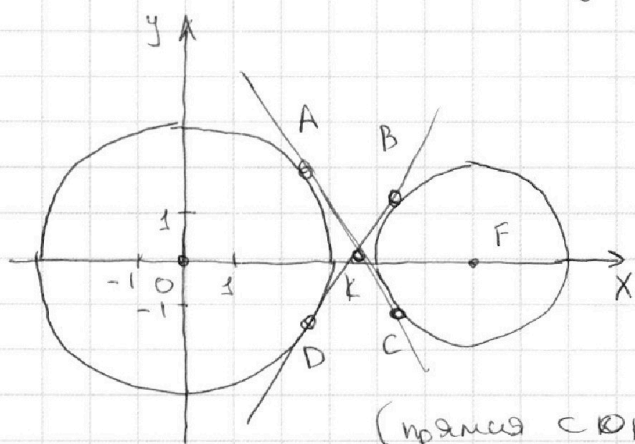
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



уч.

$$\begin{cases} ax+2y-3b=0 \\ \begin{cases} x^2+y^2-9=0 \\ x^2+y^2-12x+32=0 \end{cases} \end{cases} \begin{cases} y = -\frac{a}{2}x + 1,5b \text{ - ур-ние прямой} \\ \begin{cases} x^2+y^2=9 \\ (x-6)^2+y^2=4 \end{cases} \text{ - ур-ния окружностей.} \end{cases}$$

на координатной плоскости:



для прямой с тангенсом угла наклона в пределах между двумя внутренними касательными к окружностям можно подобрать такое b , что имеет 4 решения

(прямая с окружностью имеет максимум 2 пересечения, а надо 4 т.е по 2 с каждой окруж.)

AC: $y=kx+c$ $x^2+(kx+c)^2=9$ -одно решение

$$(k^2+1)x^2+2kcx+c^2-9=0 \quad D = \sqrt{(2kc)^2 - 4(k^2+1)(c^2-9)} =$$

$$= \sqrt{-4 \cdot (c^2-9 - k^2 \cdot 9)} = 0 \quad (k^2+1)9 = c^2 \quad \cancel{c=3k}$$

аналогично для BD: $k = \frac{5}{\sqrt{11}}$

$$(x-6)^2 + (kx+c)^2 - 4 = 0 \quad D=0 = \sqrt{(2kc-12)^2 - 4(c^2+32)(k^2+1)}$$

$$x^2 - 12x + 36 - 4 + k^2x^2 + 2kxc + c^2 = 0$$

$$\sqrt{-\frac{2k}{48}c + 144 - 128k^2 - 128 - 4c^2} = 0 \quad F \text{ и } O \text{ - центры окружн.}$$

~~справа~~ $\triangle OAK \sim \triangle KCF$ т.к. $FC \perp OA$ $\frac{OA}{FC} = \frac{3}{2} = \frac{OK}{KF}$

картинка симметрична относительно OX. $\Rightarrow K$ на OX

$OK+KF=6$ т.к. $F(6;0) \Rightarrow K(3,6;0)$ $k \cdot 3,6 + c = 0$

AC: $k = \frac{5}{\sqrt{11}}$ $c = -\frac{18}{\sqrt{11}}$ BD: $k = \frac{5}{\sqrt{11}}$ $c = \frac{18}{\sqrt{11}}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

т.е. при

$$-\frac{5\sqrt{11}}{2} < -\frac{a}{2} < \frac{5\sqrt{11}}{2}$$

можно найти в теореме, что будет 4 решения

$$\frac{10}{\sqrt{11}} > a > -\frac{10}{\sqrt{11}}$$

Ответ: $\frac{10}{\sqrt{11}} > a > -\frac{10}{\sqrt{11}}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№5.

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8$$

$$\log_3^4 x +$$

$$\log_x^4 3 + 6 \log_x 3 = 2,5 \log_x 3 - 8$$

$$\log_x^4 3 + 6 \log_x 3 = 2,5 \log_x 3 - 8$$

замени $\log_x 3 = a$

$$a^{-4} + 3,5a + 8 = 0 \rightarrow \text{график!}$$

$$y = a^{-4}$$

$$y = -8 - 3,5a$$

корень один

$$\log_3^4 5y + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} 3^4 - 8$$

$$\log_{5y}^4 3 + 2 \log_{5y} 3 = 5,5 \log_{5y} 3 - 8$$

замена $\log_{5y} 3 = b$

$$b^{-4} - 3,5b + 8 = 0 \text{ график!}$$

$$y = b^{-4}$$

$$y = 3,5b - 8$$

единств. корень

при этом если p - корень $b^{-4} - 3,5b + 8 = 0$

то $-p$ - корень $a^4 + 3,5a + 8 = 0$

тогда

$$\log_{5y} 3 = -\log_x 3$$

$$\frac{\log x^3}{\log_{5y} 3} = \log_{5y} x = -1$$

$$(5y)^{-1} = x$$

$$x \cdot y = \frac{1}{5y} \cdot y = \frac{1}{5} = 0,2$$

Ответ: $xy = 0,2$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

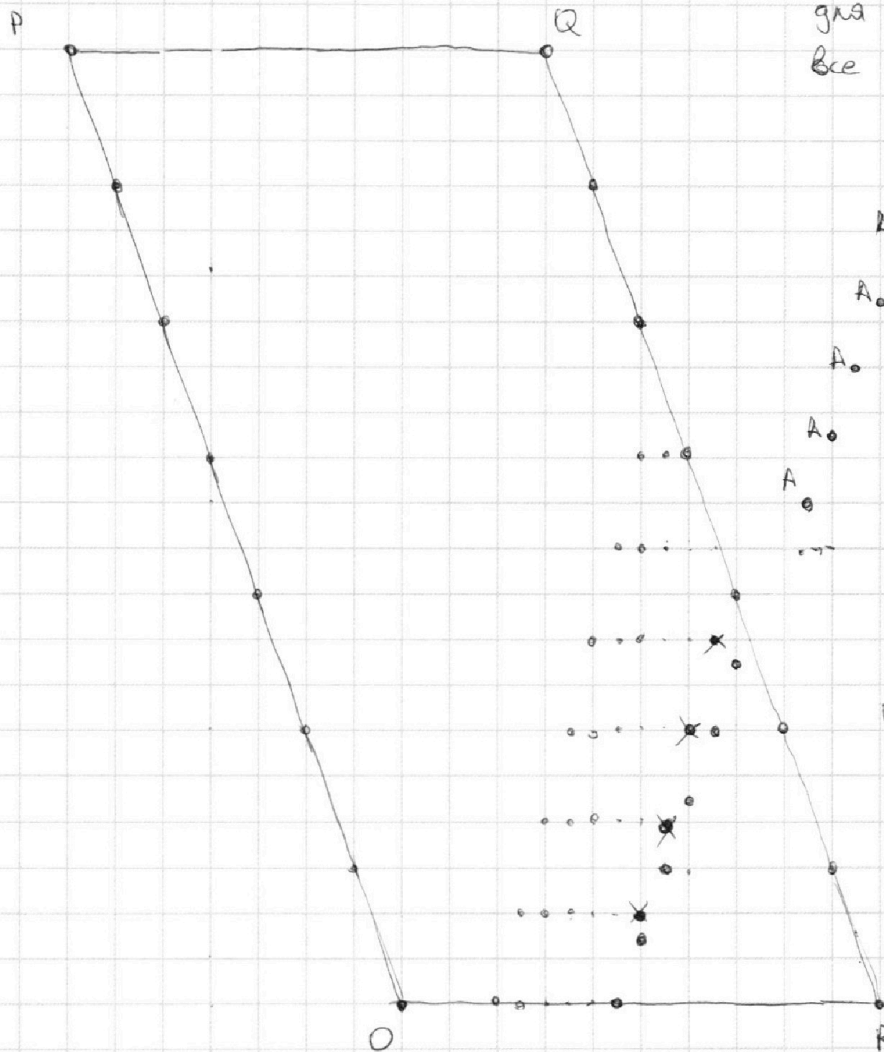
1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



для каждой ^{то} ~~точки~~ возможного положения В будем
находить ^{количество} ~~все~~ возможных положений А и суммировать
их
число: (масштаб одна клетка это 2x2)



для точки В
все возможные
A: из-за
натуральности
координат
и натуральности
их разности

$$3(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 33$$

$$3\Delta x + \Delta y = 33$$

$$\Delta x \in \mathbb{N}, \Delta y \in \mathbb{N}$$

наклон
сторон параллело-
грамма -3:1

наклон
положений
А 3:1

из-за GMT А отн. В получим то для таких В
А GMT А такое

для В в R с положением А.

будем сдвигать диагональ В
влево и записывать кол-во
А и В в полученных диагоналях.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

сдвиг по x_i	в параллелограмме			$\sum =$
	A	B	AxB	
0	6	1	6	6
1	7 8	1	8 7	13
2	7 6	2	14	27
3	8	2	16	43
4	8	3	24	67
5	9	3	27	94
6	9	4	36	130
7	10	4	40	170
8	10	5	50	220
9	11	5	55	275
10	10	6	60	335
11	11	6	66	401
12	10	7	70	471
13	11	7	77	548
14	10	8	80	628
15	11	8	88	716
16	10	9	90	806
17	11	9	99	905
18	10	10	100	1005
19	10	10	100	1105
20	9	11	99	1204
21	9	10	88 90	1294
22	8	11	88	1382
23	8	10	77 80	1462
24	7	11	77	1539
.	7	10	70	1609
1	6	11	66	1675
1	6	10	60	1675
	5	11	55	1750
	5	10	50	1840
	4	10	40	1880
	4	9	36	1916
	3	9	27	1943
	3	8	24	
	2	8	16	1983
	2	7	14	
	1	7	7	
	1	6	6	2010



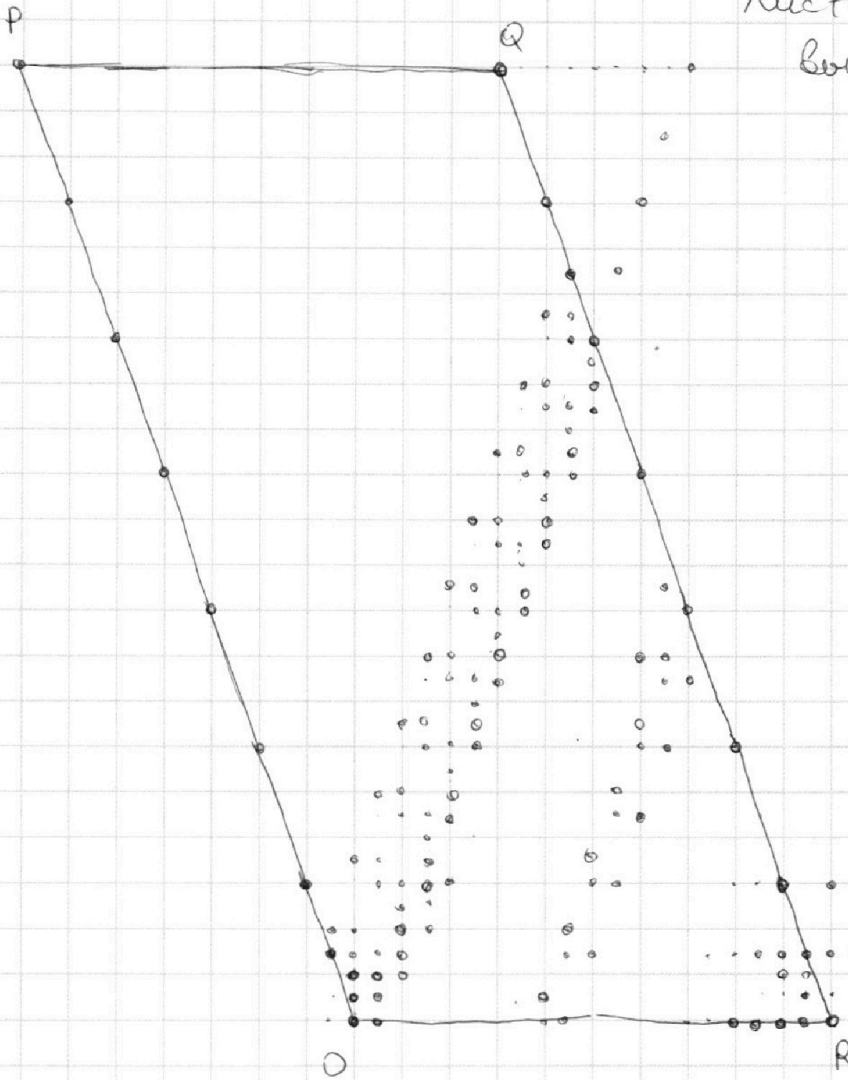
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Лист для
вычисления
A и B



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

для B на 1 выше и соответ. A.

B	A
1	6
1	7
2	---
2	---
...	...
	10
	10
	10
	...
	...
	...
	...

- 6
- 7
- 14
- 16
- 24
- 27
- 36
- 40

170

- 5
- 5
- 6
- 6
- 7
- 7
- 8
- 8
- 8
- 9
- 9
- 10
- 10

для B	на 2 выше
B	A
1	7
1	---
2	---
2	---
...	...
	9
	10
	10
	...
	10
...	---
...	---
9	---
---	---

$$340 + 100 + 170 + \dots + 200$$

$$2(400 + 260 + 340 + 200) + 2010$$

$$2(700 + 540) + 2010$$

$$1240 \cdot 2 + 2010$$

$$4490$$

Ответ: 4490

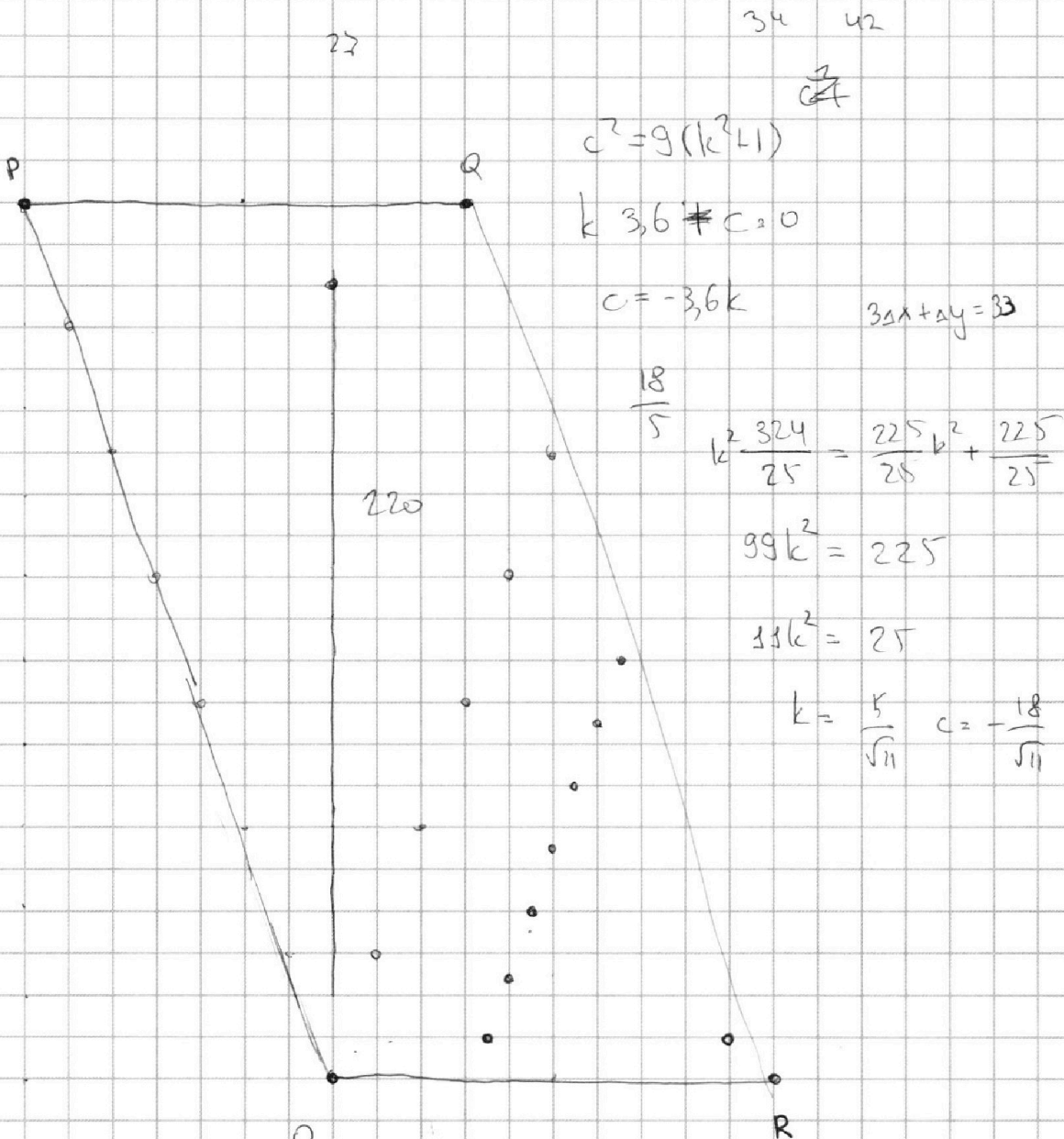
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$c^2 = 9(k^2 L_1)$$

$$k \cdot 3,6 \neq c = 0$$

$$c = -3,6k$$

$$3\Delta x + \Delta y = 33$$

$$\frac{18}{5}$$

$$k^2 \frac{324}{25} = \frac{225}{25} k^2 + \frac{225}{25}$$

$$99k^2 = 225$$

$$11k^2 = 25$$

$$k = \frac{5}{\sqrt{11}} \quad c = -\frac{18}{\sqrt{11}}$$

$$x^2 - 12x + 36 - 4 +$$

$$\frac{25x^2 - 180x + 324}{11} = 0$$

$$x \cdot \sin \alpha = y \cdot \sin \beta$$

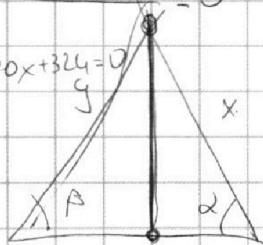
$$11x^2 - 132x + 396 - 44 + 25x^2 - 180x + 324 = 0$$

$$36x^2 - 312x + 676 = 0$$

$$9x^2 - 78x + 169 = 0$$

$$78$$

$$78^2 - 4 \cdot 9 \cdot 169$$



$$-700$$

$$19+$$



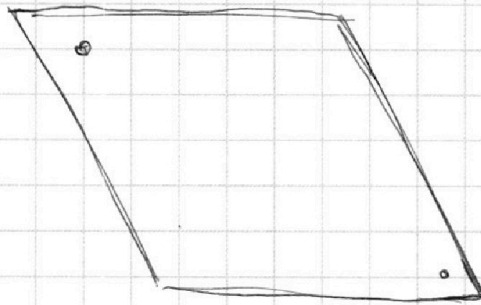
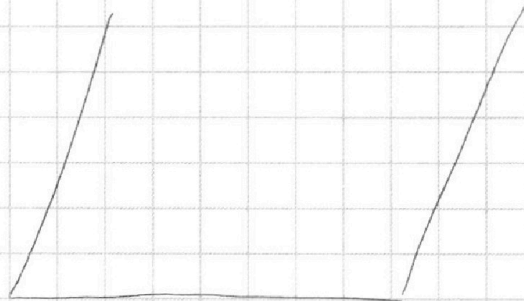
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

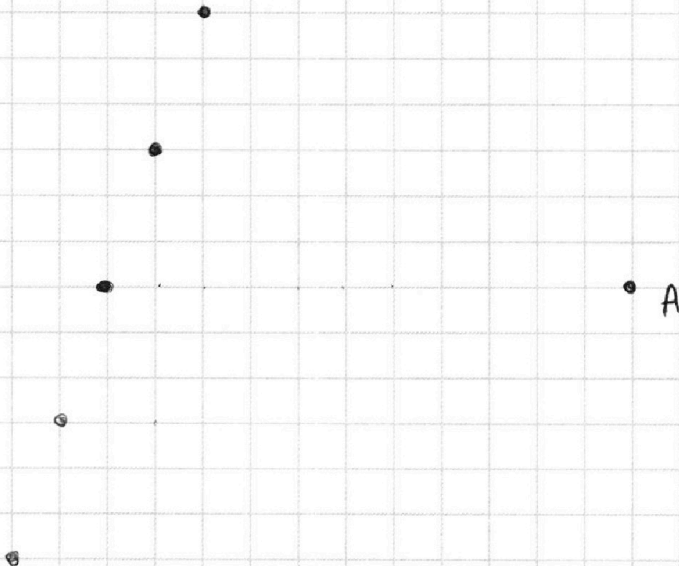
- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$3\Delta x + \Delta y = 33$$



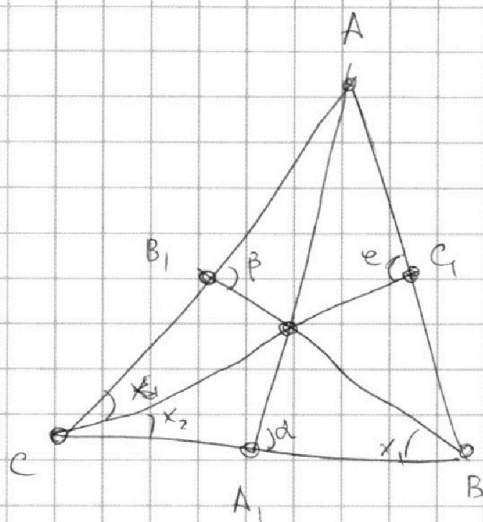
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$S_{ABC} = CC_1 \cdot \sin \epsilon \cdot \frac{1}{2} \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CC_1 \cdot \sin \epsilon$$

$$= AA_1 \cdot \sin \alpha \cdot \frac{1}{2} \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AA_1 \cdot \sin \alpha$$

$$= BB_1 \cdot \sin \beta \cdot \frac{1}{2} \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BB_1 \cdot \sin \beta$$

$$\frac{AC}{\sin \beta} = \frac{AB}{2 \sin \alpha}$$

sin

$$90 = CC_1 \cdot AC \cdot \sin \alpha =$$

$$= CC_1 \cdot BC \cdot \sin x_2 =$$

$$\sin \alpha \sin \beta \sin \epsilon \cdot AB \cdot BC \cdot AC$$

$$\frac{BC}{\sin \epsilon} = \frac{AB}{2 \sin x_2} \quad \frac{BC}{\sin \beta} = \frac{AC}{2 \sin \alpha}$$

$$S^2 = \frac{CC_1 \cdot BB_1}{4} \cdot BC \cdot \sin x_2 \cdot BC \cdot \sin x_1$$

$$\frac{1}{3} \frac{AA_1}{\sin x_1} = \frac{2}{3} \frac{BB_1}{\sin \alpha} \quad \sin \alpha = \frac{2 BB_1 \cdot \sin x_1}{AA_1} = \frac{2 CC_1 \cdot \sin x_2}{AA_1}$$

$$\frac{CC_1}{\sin x_1} = \frac{BB_1}{\sin x_2}$$

$$BB_1 \cdot \sin x_1 =$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

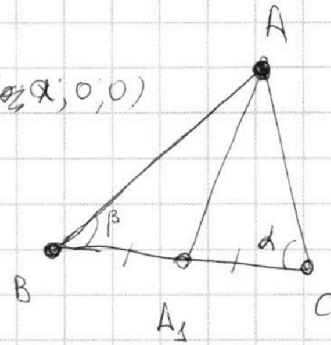
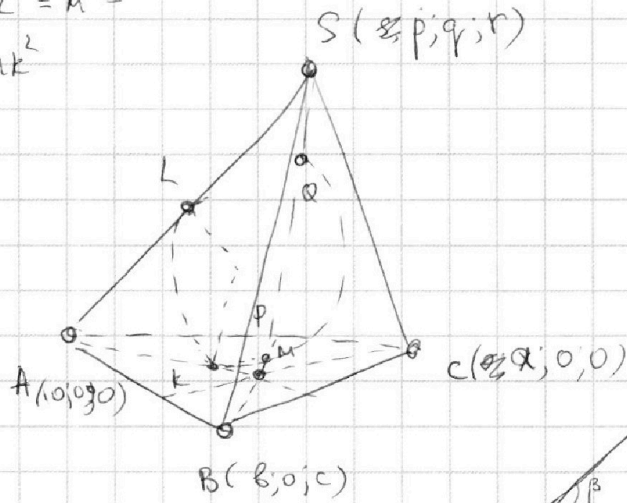
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



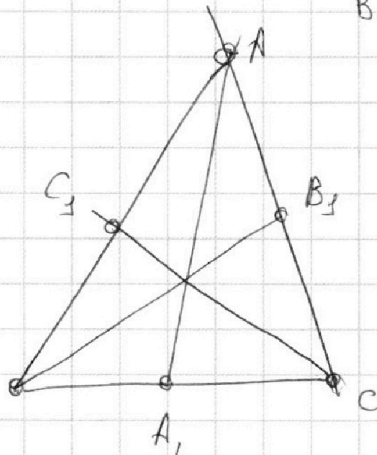
$$SO^2 - SL^2 = R^2 =$$

$$= OM^2 - MK^2$$

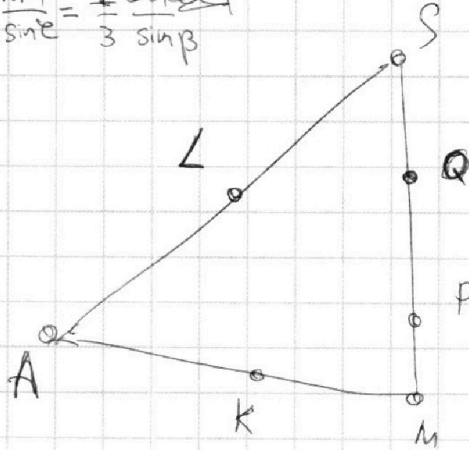
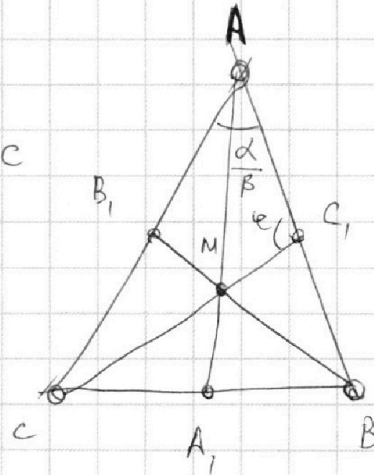
$$MK = SL$$



$$\frac{AA_1}{\sin \alpha} = \frac{AC}{\sin \beta}$$



$$\frac{2 \cdot AA_1}{3 \sin \alpha} = \frac{AC}{3 \sin \beta}$$



$$\frac{1}{2} \frac{AB \cdot CC_1}{2} \cdot \sin \alpha$$

$$\frac{AB \cdot CC_1}{4 \cdot 2} \cdot \sin \alpha$$

$$\frac{AC}{\sin \alpha} = \frac{CC_1}{\sin \alpha}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

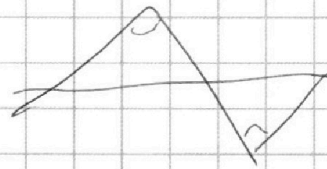


$\cos x = \sin\left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}\right)$
 $\frac{5\pi}{2} \geq \frac{\pi}{2} + x \geq -\frac{5\pi}{2}$
 $2\pi \geq x \geq -3\pi$
 $k = \frac{5}{\sqrt{11}} \quad c = -\frac{18}{\sqrt{11}}$
 $\left(\frac{25}{11} + 1\right)g = \frac{(18)^2}{11}$
 $36 \cdot g = 18 \cdot 18$
 $x = \frac{\pi}{2} - t$
 $5 \arcsin(\cos \frac{\pi}{2} - t) = \frac{\pi}{2} - t + \frac{\pi}{2}$
 $5t = \pi - t$
 $6t = \pi$
 $\arcsin(\sin t)$

$\frac{5\pi}{3}$
 $-\frac{4\pi}{3}$
 $-\frac{5\pi}{6} = -\frac{4\pi}{3} + \frac{\pi}{2}$
 $\frac{5\pi}{3}$
 $16 - 36k^2$

$cx + 2y - 3b = 0$
 $x^2 + y^2 - 9 = 0$
 $x^2 + y^2 - 12x + 32 = 0$

$y = \frac{a}{2}x - 1,5b$
 $x^2 + y^2 = 9$
 $(x-6)^2 + y^2 = 4$



$\frac{324}{25} - g = \frac{324 - 225}{25}$

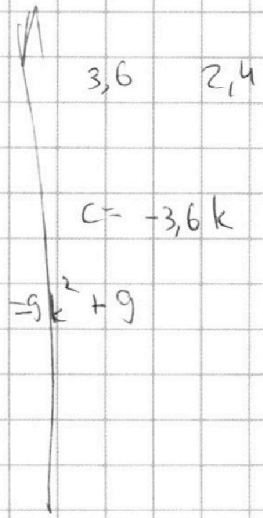
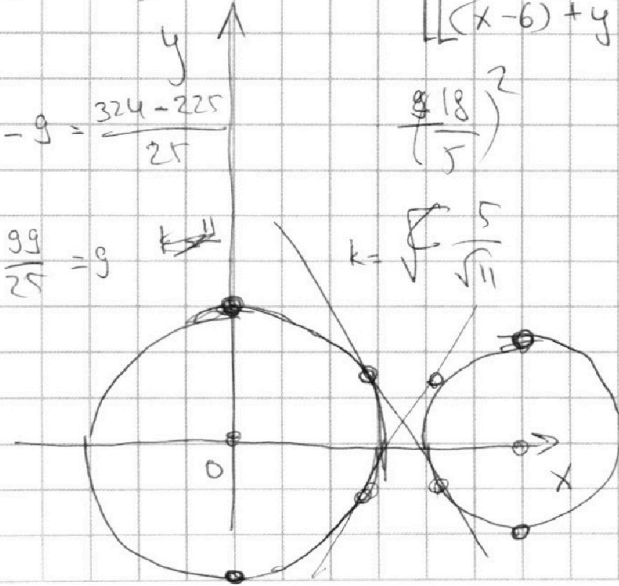
$\left(\frac{18}{5}\right)^2$

$\frac{99}{25} = g$

$k = \sqrt{\frac{5}{11}}$

$+3,6k^2 = 9k^2 + 9$

$c = -3,6k$



g².

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



1) $ab = k \cdot 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10}$

$b = m \cdot 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13}$

$ac = n \cdot 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30}$

$abc^2 \geq ac$

684

$$\begin{array}{r} 396 \\ + 324 \\ \hline 720 \end{array}$$

$abc^2 = k_{min} \cdot 2^{42} \cdot 3^{60} \cdot 5^{60}$

$3x \cdot x$

$abc = 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$

$y = \frac{5}{\sqrt{11}}x - \frac{18}{\sqrt{11}}$

$a = 2^7 \cdot 3^8 \cdot 5^{17}$

$b = 2^2 \cdot 3^3$

$c = 2^{12} \cdot 3^{10} \cdot 5^{13}$

$\frac{(5x-18)^2}{11} + (x-6)^2 = 44$

2)

A

$25x^2 - 180x + 324 + 4x - 132 = 44$

$36x^2 - 312x + 364 = 0$

$312^2 - 4 \cdot 36 \cdot 364 = 724$

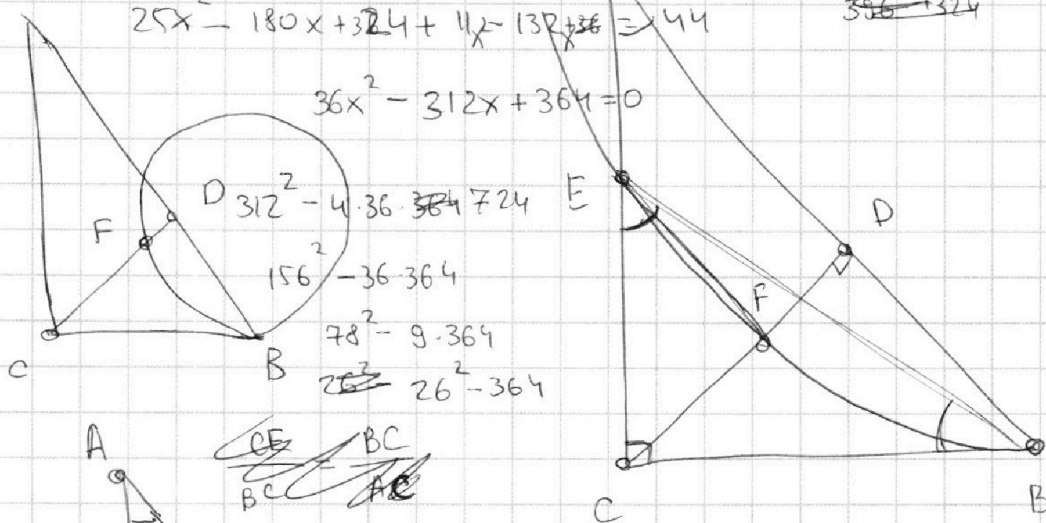
$156^2 - 36 \cdot 364$

$78^2 - 9 \cdot 364$

$26^2 - 364$

396

26
 $396 - 324$



$$\begin{array}{r} 3 \\ 26 \\ \times 26 \\ \hline 86 \\ 26 \\ \hline \end{array}$$

8

$$\begin{array}{r} 156 \\ 52 \\ \hline 776 \end{array}$$

$\triangle CBF \sim \triangle AEB$

$\frac{CF}{BC} = \frac{AE}{AB}$

$\frac{CF}{CE} = \frac{CD}{AC}$

$\frac{CF \cdot CD}{AC \cdot BC} = \frac{AE}{AB}$

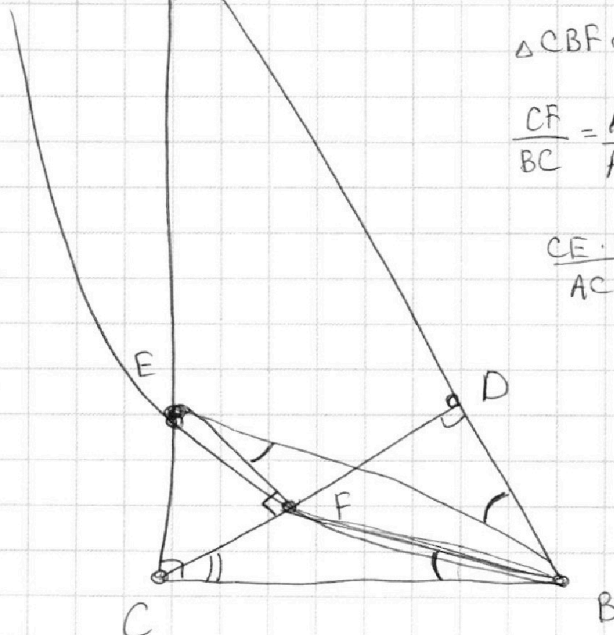
$\left(\frac{AC}{CE} - 1\right) = \frac{AB \cdot CD}{AC \cdot BC}$

$\frac{AC}{CD} = \frac{AB}{BC}$

$\frac{AC}{CE} = 2$

$\frac{AD}{DB}$

$\frac{AD}{AE} = \frac{CD}{BC}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\log_3^4 x + 6 \log_3 x^3 = \log_3^4 (5y) + 2 \log_3 5y^3 =$$

$$= \log_3^4 (5^2 \cdot 3^6) - 8$$

$$\log_3 x = \frac{1}{\log_x 3}$$

$$\log_x 3 = t$$

$$t^{-4} + 6t = 2,5t - 8$$

$$t^{-4} + 3,5t + 8 = 0$$

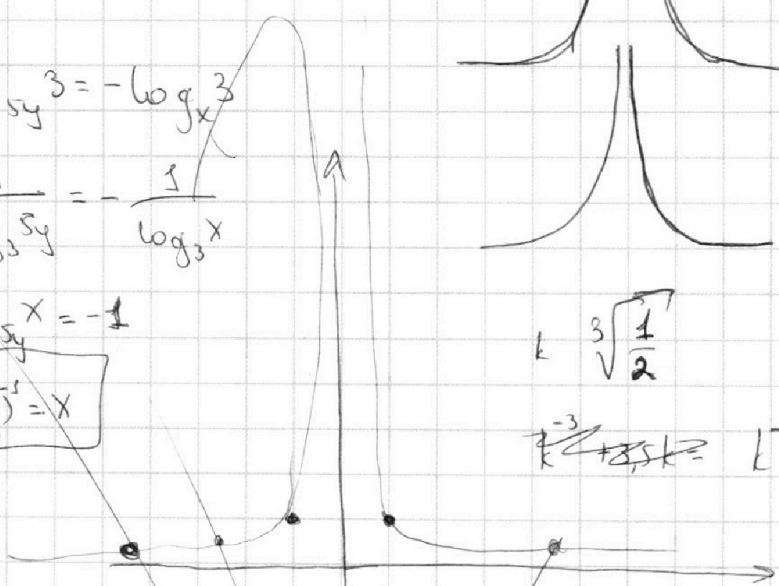
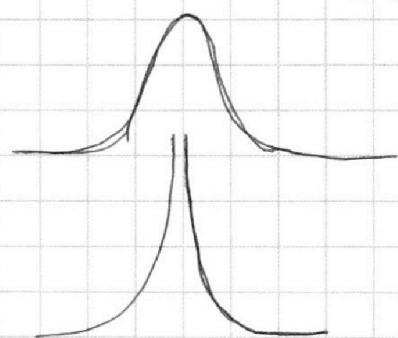
$$t^{-4} - 3,5t + 8 = 0$$

$$\log_{5y} 3 = -\log_x 3$$

$$\frac{1}{\log_3 5y} = -\frac{1}{\log_3 x}$$

$$\log_{5y} x = -1$$

$$(5y)^{-1} = x$$



$$k \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$$

$$-\frac{1}{\sqrt[3]{2}} k$$

$$k^{-3} + 7k = -8$$

$$k^{-4} - 7k + 8 \cdot 2 \cdot \sqrt[3]{2}$$

$$+\frac{1}{\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{1}{2} \cdot k^{-4} - \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \cdot k + 8 = 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$36x^2 - 312x + 684 = 0$$

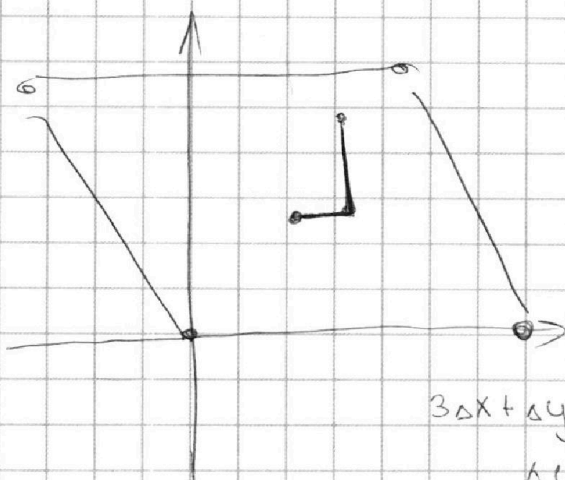
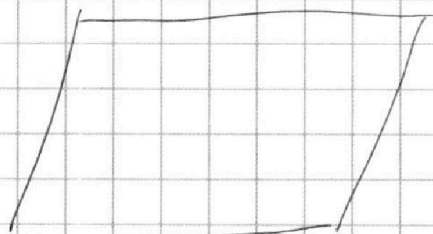
$$512^2 = 36 \cdot 4 \cdot 684$$

$$156^2 = 36 \cdot 684$$

$$\begin{array}{r} 156 \overline{) 6} \\ \underline{6} \\ 0 \end{array}$$

$$6 \cdot 20 +$$

$$\begin{array}{r} x \ 26 \\ \underline{x \ 26} \\ 0 \end{array}$$

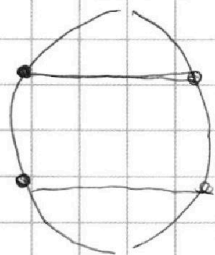


$$3\Delta x + \Delta y = 33$$

$$\Delta y = 3$$

$$\Delta y = 3k$$

$$k + \Delta x = 11$$

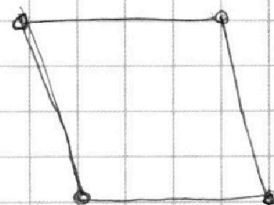


AB

$$y_2 = kx + b$$

$$(k+3)\Delta x = 33$$

$$\pi - (t - 2\pi)$$



$$\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{3\pi}{2}$$

$$\pi - t$$

$$5\pi - 5t = \pi - t$$

$$\boxed{\pi = t}$$

$$\frac{3\pi}{2} \leq t \leq \frac{5\pi}{2}$$

$$t - 2\pi$$

$$5(\cancel{2\pi - t}) = \pi - t$$

$$6t = 8\pi$$

$$t = \frac{4\pi}{3}$$

$$\boxed{t = \frac{4\pi}{3}}$$

$$\frac{5\pi}{2} \leq t \leq \frac{7\pi}{2}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{6}$$

$$\frac{t}{\pi - t}$$

$$t - 2\pi$$

$$3\pi - b$$

$$\frac{12\pi}{2}$$

$$-\pi - t$$