МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω, хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB, если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2-5x+3}-\sqrt{2x^2+2x+1}=2-7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-12;24)$, $Q(3;24)$ и $R(15;0)$. Найдите количество пар точек $A\left(x_1;y_1\right)$ и $B\left(x_2;y_2\right)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2-2x_1+y_2-y_1=12$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система

$$\begin{cases} ax-y+10b=0, \\ \left((x+8)^2+y^2-1\right)\left(x^2+y^2-4\right) \leqslant 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B. Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC, если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответсвенно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$ab \vdots 2^{14}7^{10}$
$bc \vdots 2^{17}7^{17}$
$ac \vdots 2^{20}7^{37}$

~~т.к.~~ $\Rightarrow$ минимальное $abc = 2^k 7^n$
тогда $ab = 2^{17}7^{10}$, $bc = 2^{17}7^{17}$, $ac = 2^{20}7^{37}$
т.к. это минимальное возможное произведение

$\Rightarrow a^2b^2c^2 = 2^{20+17\cdot 2}\,7^{10+17+37} = 2^{10\cdot 2+17\cdot 2}\,7^{10+27\cdot 2} = 2^{27\cdot 2}\,7^{32\cdot 2} = (2^{27}7^{32})^2$
$abc = 2^{27}7^{32}$

Ответ: $2^{27}7^{32}$

1. т.к. m - наибольшее и $a+b \vdots m$, $a^2-6ab+b^2 \vdots m$

$\Rightarrow m = \text{НОД}(a+b;\ a^2-6ab+b^2)$

2. Найдем $\text{НОД}(a+b;\ a^2-6ab+b^2) = m$

$$\begin{array}{r|l} a^2-6ab+b^2 & a+b \\ \underline{a^2+ab} & a-7b \\ -7ab+b^2 & \\ \underline{-7ab-7b^2} & \\ 8b^2 & \end{array}$$

$\Rightarrow$ ~~$m = \text{НОД}(a$~~

$m = \text{НОД}(a+b;8b^2)$

$\text{НОД}(a,b)=1$ ~~$\Rightarrow \exists d,k \in \mathbb{Z}: ad+kb=1$~~

$\Rightarrow \text{НОД}(a, b^2) = 1$

$\text{НОД}(a+b, b^2) = 1 \Rightarrow$ максимальный ~~m - НОД~~

$m = \text{НОД}(a+b;\ a^2-6ab+b^2) = 8$

3. Подберем такие a, b: $a=5, b=3$

$a+b=8$

$a^2-6ab+b^2 =$ ~~$25-6\cdot15+9$~~ $= (a-b)^2-4ab = 4-4\cdot15 =$

$= 4(-14) = -8\cdot7$

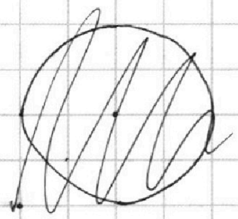
$\Rightarrow \text{НОД}(a+b;\ a^2-6ab+b^2) = 8$

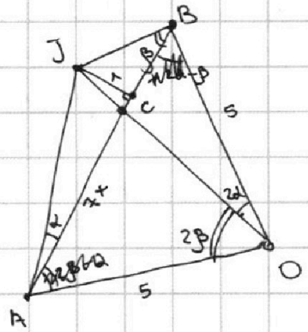
Ответ: $m=8$

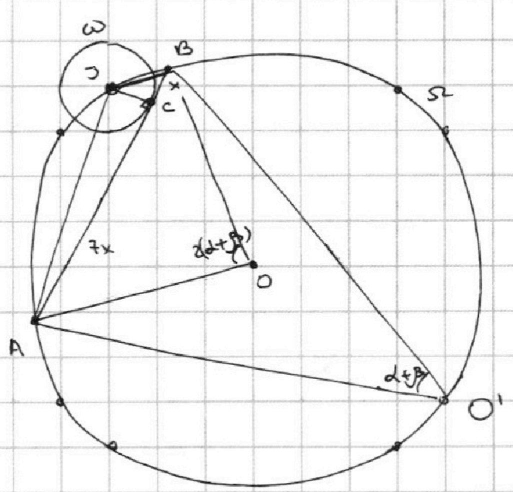
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!







1. AB - кас $\Rightarrow$ $\angle BCJ = ACJ = \pi/2$

2. $2\angle BAJ = \angle BOJ = 2\alpha$ (впис. и центр. опир на ◡BJ)

   $2\angle ABJ = \angle JOA = 2\beta$ (впис. и центр. опир на ◡AJ)

3. $AO = OB = 5$ - радиусы Ω

   $JC = 1$ - радиус ω

   $JO = 5$ - радиус Ω

   $\Rightarrow$ $\triangle JOA$ и $\triangle BOJ$ - р/б $\Rightarrow$ $\angle OJB = \angle OBJ$, $\angle JAO = \angle OJA$

4. $\triangle ABO'$ - впис в Ω $\Rightarrow$ $\dfrac{AB}{\sin(\cancel{2}\alpha + \cancel{2}\beta)} = 10$

   $\triangle JCB$: $\operatorname{tg}\beta \cdot x = \operatorname{tg}\alpha \cdot 7x \Rightarrow \operatorname{tg}\beta = 7\operatorname{tg}\alpha$

   $\triangle JAC$ $\qquad \sin\beta\cos\alpha = 7\sin\alpha\cos\beta$

   $\Rightarrow AB = 10(\sin\beta\cos\alpha + \sin\alpha\cos\beta) = 80\sin\alpha\cos\beta$

5. $\triangle JAC$: $1 = JA\sin\alpha$, $\triangle JBA$ - впис. в Ω $\Rightarrow \dfrac{JA}{\sin\beta} = 10$

   $\Rightarrow JA = 10\sin\beta = 10\sqrt{1-\cos^2\beta}$

   $1 - \dfrac{JA^2}{100} = \cos^2\beta \Rightarrow \dfrac{100 - JA^2}{100} = \cos^2\beta$

   $\cos\beta = \dfrac{\sqrt{100 - JA^2}}{10} = \dfrac{\sqrt{100 - \sin^{-2}\alpha}}{10} = \dfrac{\sqrt{100\sin^2\alpha - 1}}{10\sin\alpha}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

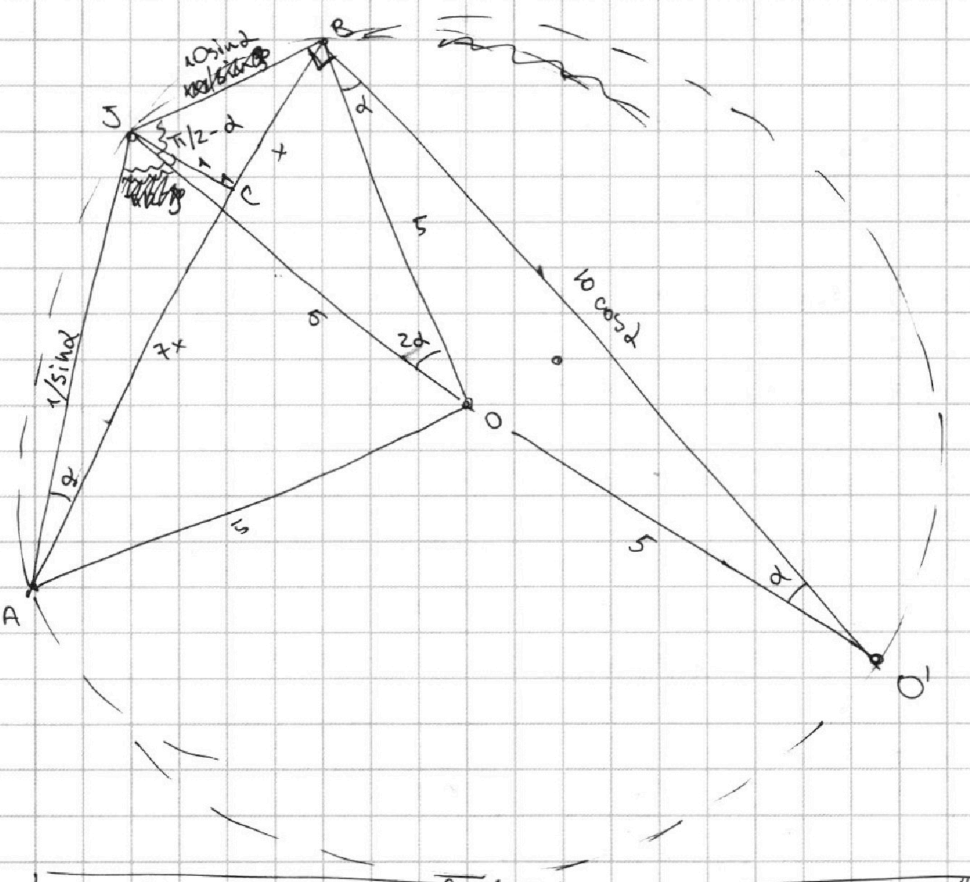
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

5. (продолжение)

$\Rightarrow \cos\beta \sin\alpha = \dfrac{\sqrt{100\sin^2\alpha - 1}}{10}$

$\Rightarrow AB = 8\sqrt{100\sin^2\alpha - 1}$



~~6. $\triangle JBO$: т. косинусов: $25 = 25 + 100\sin^2\alpha - 2\cos(\pi/2-\alpha)\cdot 5\cdot 10\sin\alpha$~~
~~$100\sin^2\alpha = 100\sin^2\alpha$~~

6. $\triangle JAC \sim \triangle JBO'$ ($\angle O' = \angle A$, $\angle B = \angle C$)

$\dfrac{10\cos\alpha}{7x} = \dfrac{10\sin\alpha}{1} \Rightarrow 7x = \operatorname{tg}\alpha \Rightarrow AB = \dfrac{8}{7}\operatorname{tg}^{-1}\alpha$

$\Rightarrow AB = \dfrac{8}{7}\operatorname{tg}^{-1}\alpha = 8\sqrt{100\sin^2\alpha - 1}$

$\operatorname{tg}^{-1}\alpha = 7\sqrt{100\sin^2\alpha - 1} \Rightarrow \cancel{\sin\alpha = 7\sqrt{100\sin^2\alpha - 1}\cos\alpha}$

~~$\sin^2\alpha = 49(100\sin^2\alpha\cos^2\alpha - \cos^2\alpha)$~~
~~$1 + 48\cos^2\alpha = 4900\sin^2\alpha\cos^2\alpha = 4900(1-\cos^2\alpha)\cos^2\alpha$~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

6. (продолжение)

$$\cancel{1+48\cos^2\alpha = 4900\cos^2\alpha - 4900\cos^4\alpha}$$
$$\cancel{4900\cos^4\alpha - 4852\cos^2\alpha + 1 = 0}$$

$$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}} \Rightarrow \frac{\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha} = tg^2\alpha$$

$$\sin^2\alpha = tg^2\alpha - tg^2\alpha\sin^2\alpha$$
$$\sin^2\alpha = \frac{tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}$$

$$AB = \frac{8}{7tg\alpha} = 8\sqrt{100\sin^2\alpha - 1}$$

$$7tg\alpha\sqrt{100\sin^2\alpha-1} = 1$$

$$\frac{7^2\sin^2\alpha(100\sin^2\alpha - 1)}{1-\sin^2\alpha} = 1$$

$$(7\cdot10)^2\sin^4\alpha - 7^2\sin^2\alpha = 1-\sin^2\alpha$$

$$70^2\sin^4\alpha - 48\sin^2\alpha - 1 = 0$$

$$D = 6^2\cdot8^2 + 4\cdot70^2 = 2^8\cdot3^2 + 2^4\cdot5^2\cdot7^2 =$$
$$= 2^4(2^4\cdot3^2+5^2\cdot7^2)$$

$$\sin^2\alpha = \frac{48\pm4\sqrt{2^43^2+5^27^2}}{2\cdot70^2}, \in[0;1]$$

$$\sin^2\alpha = \frac{2^4\cdot3}{2^3\cdot7^2\cdot5^2} \pm \frac{\sqrt{2^4\cdot3^2+5^27^2}}{2\cdot7^2\cdot5^2}$$

$$\sin^2\alpha = \frac{12+\sqrt{2^43^2+5^27^2}}{2\cdot7^2\cdot5^2}$$

$$AB = 8\sqrt{\frac{100(12+\sqrt{2^43^2+5^2\cdot7^2})}{2\cdot7^2\cdot5^2} - 1}$$

$$AB = \frac{8}{7}\sqrt{24+\sqrt{2^43^2+5^27^2}\cdot2 - 49} = \frac{8}{7}\sqrt{\sqrt{2^43^2+5^27^2}-25}$$

$$2^4\cdot3^2 = 16\cdot9 = 160-16 = 144$$
$$5^2\cdot7^2 = 25\cdot49 = 1250-25 = 1225$$
$$\Rightarrow 2^43^2+5^27^2 = 1369$$

$$AB = \frac{8}{7}\sqrt{\sqrt{1369}-25}$$

Ответ: $AB = \frac{8}{7}\sqrt{\sqrt{1369}-25}$

5/12

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

1. $\sqrt{2x^2-5x+3}-\sqrt{2x^2+2x+1}=2-7x$

$\sqrt{(x-1)(2x-3)}-\sqrt{2x^2+2x+1}=2-7x$

ОДЗ: $(x-1)(2x-3)\geq 0$

$+ \quad 1 \quad - \quad 1{,}5 \quad +$

$x\in(-\infty;1]\cup[1{,}5;+\infty)$

$2x^2+2x+1>0$, т.к. $D<0,\ 2>0$

2. $a=2x^2+2x+1$, $b=2-7x$ $\Rightarrow a+b=2x^2-5x+3$

$\sqrt{a+b}-\sqrt{a}=b \quad |\uparrow^2$ т.к. по ОДЗ $a+b\geq 0,\ a\geq 0$

$a+b+a-2\sqrt{a^2+ab}=b$

$a=\sqrt{a^2+ab} \quad |\uparrow^2$, т.к. по ОДЗ $a+b\geq 0,\ a\geq 0 \Rightarrow a^2+ab\geq 0$

$a^2=a^2+ab$

$ab=0$

3. $ab=0 \Rightarrow (2x^2+2x+1)(2-7x)=0$

$2x^2+2x+1>0$, т.к. $D<0$ и $2>0$

$\Rightarrow 2-7x=0 \Rightarrow x=\frac{2}{7}<1 \Rightarrow$ подходит под ОДЗ

Ответ: $x=2/7$

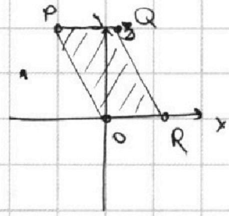
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1. $O(0,0)$
$P(-12;24)$
$Q(3;24)$
$R(15;0)$



Зададим прямые, которые ограничивают пар-м
$PQ: y=24$
$OR: y=0$
$PO: y=-2x$
$RQ: y=-2x+30$

2. Зададим условие того, что точка $M(x,y)\in PQRO$

$$\left.\begin{array}{l} 0\le y\le 24 \\ -2x\le y\le -2x+30 \end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{l} y\in[0;24] \\ 2x+y\in[0;30] \end{array}$$

$\Rightarrow$ $y\in[0;24]$
~~$x\in[0$~~;
$2x+y\in[0;30]$

3. $2x_2-2x_1+y_2-y_1=12$, $x_i, y_i\in\mathbb{Z}$
$y_1, y_2\in[0;24]$
$2x_1+y_1,\ 2x_2+y_2\in[0;30]$

$\Rightarrow$ $2x_1+y_1+12=2x_2+y_2$ $\Rightarrow$ $2x_1+y_1\in[0;18]$
$2x_2+y_2\in[12;30]$

т.к. $y_i\in[0;24]$ $\Rightarrow$ $2x_1\in[0;18]$ $\Rightarrow$ $x_1\in[0;9]$
$2x_2\in[0;30]$ $x_2\in[0;15]$

4. т.к. $x_1\in[0;9]$ Рассмотрим все значения x_1
1) $x_1=0$

3. $y+2x=k$ – задает прямую $\parallel PO\parallel QR$, которая пересекает OX в $(k/2;0)$
$\Rightarrow$ $2x_2-2x_1+y_2-y_1=(2x_2+y_2)-(2x_1-y_1)=k_2-k_1=12$

Заметим, что $k\in[0;30]$, т.к. крайние прямые PO и QR и $k_2-k_1=12$
$\Rightarrow$ пар $(k_2;k_1)$ всего 18 штук

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

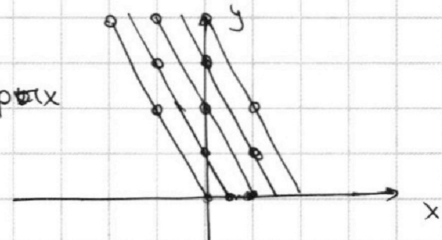
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

4. Для каждой $k = y + 2x$

~~Существует всего 12 точек удовлетворяющих условию, т.к. $y \in [0, 24]$~~



существует всего 12
точек координаты, которых
целые числа
т.к. $\frac{k-y}{2} = x$

$\Rightarrow$ если при y_1 $x \in \mathbb{Z}$
то при $y_1 + 2k, n \in \mathbb{Z}$ $x \in \mathbb{Z}$
а при $y_1 + 2n - 1, n \in \mathbb{Z}, x \notin \mathbb{Z}$

~~т.к.~~

$\Rightarrow$ нам подходит половина все $y \in \mathbb{Z}$

5. Подходящих нам пар (k_2, k_1) всего 18 (п.3)
Для каждой k можно найти 12 (y, x) пар (п.4)
$\Rightarrow$ пару (k_2, k_1) можно задать 12^2 парами
(x, y) (различными)
Всего таких пар 18 $\Rightarrow$ всего пар (x, y) $= 12^2 \cdot 18$

$n = 12^2 \cdot 18 = 3^2 \cdot 2^4 \cdot 3^2 \cdot 2 = 3^4 \cdot 2^5 = 6^4 \cdot 2 = 36^2 \cdot 2 =$
$= 2376 \cdot 2 = 4752$

$$\begin{array}{r} \times\ 36 \\ 36 \\ \hline 216 \\ +\ 216\ \ \\ \hline 2376 \end{array}$$

Ответ: $3^4 \cdot 2^5 = 4752$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

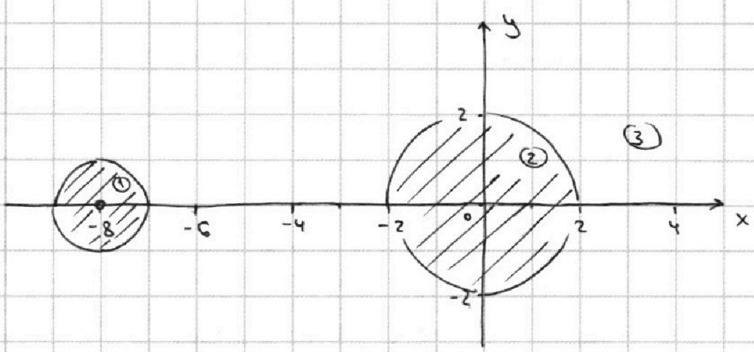
$ax - y + 10b = 0$

$((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2+y^2-4) \leq 0$

1. Построим

$((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0$

1. $(x+8)^2 + y^2 = 1$ – окр-ть $\omega_1((-8,0),1)$
2. $x^2 + y^2 - 4 = 0$ – окр-ть $\omega_2((0,0),2)$



2. Расставим знаки методом областей

1) $(-8;0)$: $((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2+y^2-4) = -1\cdot(8^2-4) \leq 0$ – подходит
2) $(0;0)$: $(8^2-1)\cdot(-4) \leq 0$ – подходит
3) $(3,0)$: $(25^2-1)(9-4) > 0$ – не подходит

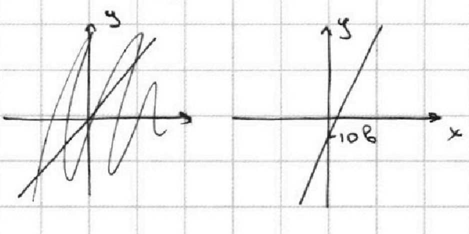
Подходящие области заштрихуем

3. $ax - y + 10b = 0$

$y = ax + 10b$ – прямая

проходящая ч/з

$(0;10b)$; $(-\frac{10b}{a};0)$



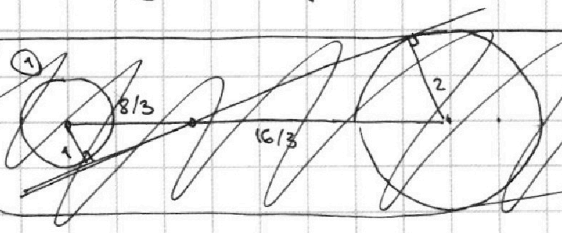
~~Заметим, что кр~~

Кол-во решений системы = кол-ву пересечений прямой $y = ax + 10b$ с графиком из п.2

2) ~~крайний случай, когда прямая каса.~~

т.к. там 2 круга ровно 2 решение существует, когда прямая касается обоих кругов

4. ① ~~Рассмотрим такие случаи~~



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

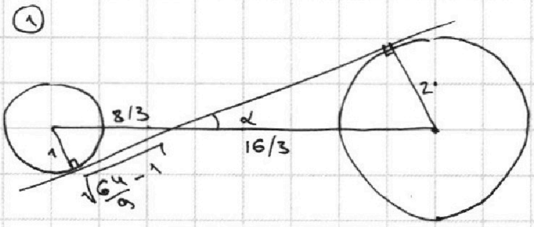
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

4. Рассмотрим все такие ситуации

①

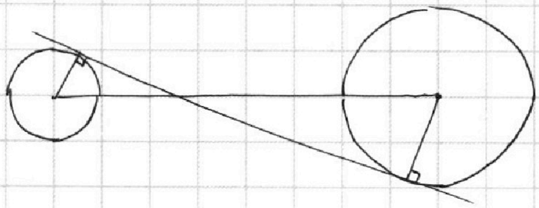


$tg\alpha = a$

$tg\alpha = \frac{3}{\sqrt{64-9}} = \frac{3}{\sqrt{56}}$

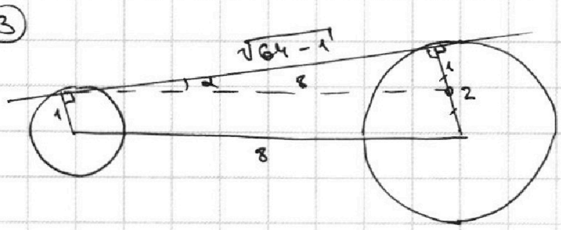
$a = \frac{3\sqrt{14}}{28}$

②



$a = -\frac{3\sqrt{14}}{28}$, т.к. ситуация симметрична п. 4.1

③

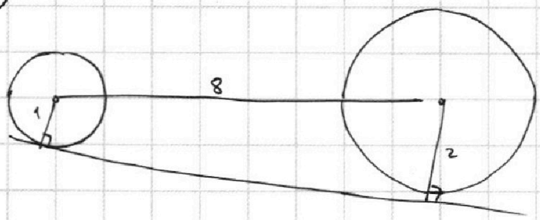


$tg\alpha = a$

$tg\alpha = \frac{1}{\sqrt{63}} = \frac{1}{3\sqrt{7}}$

$a = \frac{\sqrt{7}}{21}$

④



$a = -\frac{\sqrt{7}}{21}$, т.к. ситуация симметрична п. 4.3

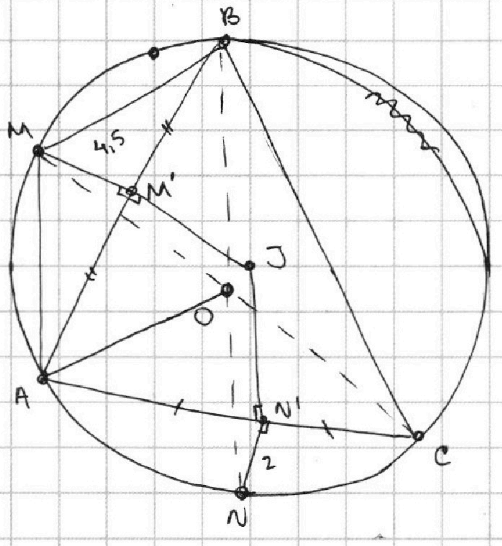
Ответ: $a \in \left\{-\frac{3\sqrt{14}}{28};\ -\frac{\sqrt{7}}{21};\ \frac{\sqrt{7}}{21};\ \frac{3\sqrt{14}}{28}\right\}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7 [X]

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

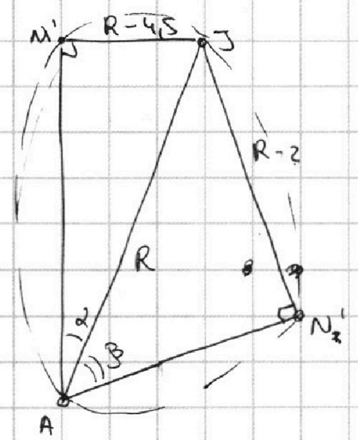


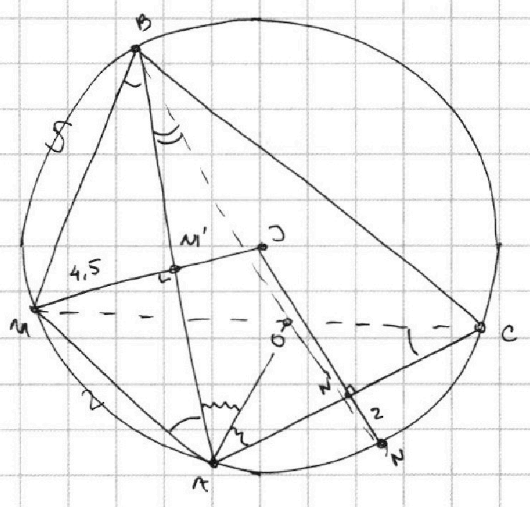
1. BN - бис-са $\angle ABC$ т.к. $\smile AN = \smile CN$
и $\angle ABN$ и $\angle NBC$ - впис. окр. на $\smile AN$ и $\smile CN$
аналог. MC - бис-са $\angle BCA$
$MC \cap BN = O$ - центр впис. окр.
$\Rightarrow$ AO - иск.

2. $\smile AM = \smile BM$ ~~$\Rightarrow MA = MB$~~
~~$\Rightarrow \triangle MAB$ - р/б $\Rightarrow MM'$~~
$\Rightarrow \angle BAM = \angle MBA$ - впис. опир на $\smile AM$ и $\smile BM$
$\Rightarrow MM'$ - высота, медиана и бис-са $\angle M$

3. т.к. J - центр опис. ок-ти аналогична NN' - высота,
$\Rightarrow$ по п.2 $JN' \perp AC$, $JM' \perp BA$ медиана, бис-са $\angle N$
$\Rightarrow$ ~~...~~ $M' \in (JM)$
$N' \in (JN)$ (т.к $\angle JN'A + AN'N = \pi$ и с M' аналог.)

4. $M'JN'A$





т.к. $\angle M' + \angle N' = \pi \Rightarrow$ вокруг $M'JN'A$ можно описать окружность с радиусом $R/2$ и диаметром AJ

$$\frac{\sin\alpha}{R-4,5} = \frac{1}{R} \Rightarrow \sin\alpha = 1 - \frac{4,5}{R} \qquad \sin\beta = 1 - \frac{2}{R}$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha = \frac{(R-4,5)(4-2R)}{R^2} + \frac{(R-2)(4,5^2-9R)}{R^2}$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \frac{(R-4,5)\cdot 4(1-R)}{R^2} + \frac{(R-2)\cdot 4,5(4,5-2R)}{R^2}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

5. $\triangle ABM$: $MB = 2R\sin\angle A$ $\Rightarrow$ $4{,}5 = 2R\sin^2\angle A$

$\triangle AMM'$: $\sin\angle A = \dfrac{4{,}5}{MA} = \dfrac{4{,}5}{MB}$

$\Rightarrow \angle A = \angle B = \angle MCA$ (т. опир. на равные дуги и вписс)

$\Rightarrow \sin^2 \angle C/2 = \dfrac{4{,}5}{2R} = \dfrac{9}{4R} = \sin^2\angle MCA$

аналогично $\sin^2\angle B/2 = \dfrac{1}{R} = \sin^2\angle NBA$

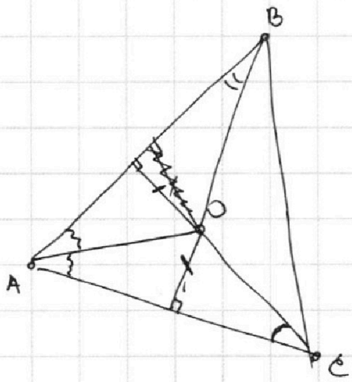
6. т.к. O – ц. впис. окр. $\Rightarrow$ AO – бис-са угла A

пусть $\angle MCA = \angle C$, $\angle NBA = \angle B$

$\angle OAC = \angle OAB = \angle A$

$\angle A + \angle B + \angle C = \pi/2$, $\sin^2 \angle B = 1/R$

$\sin^2 C = 9/4R$

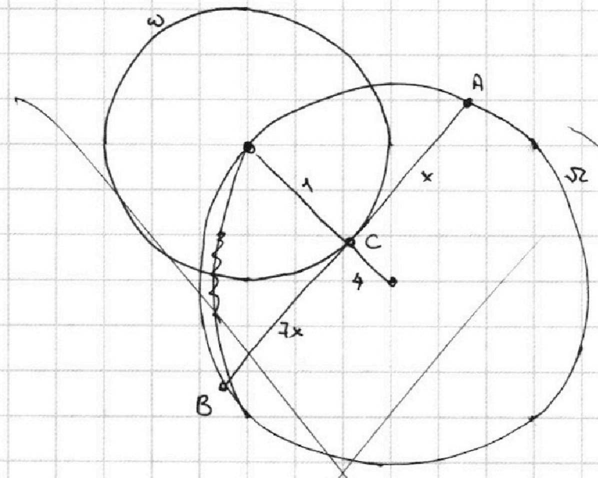


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

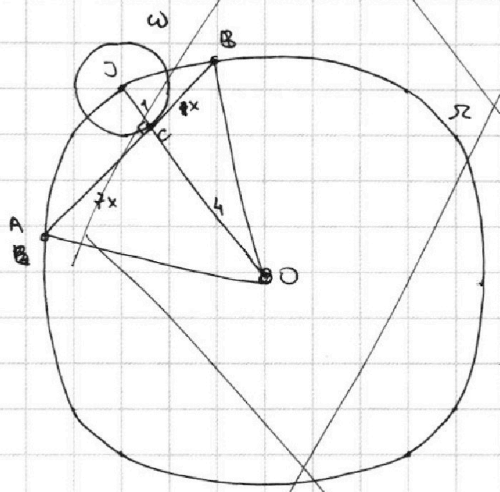
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

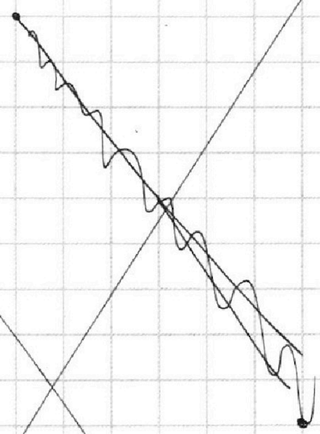
МФТИ

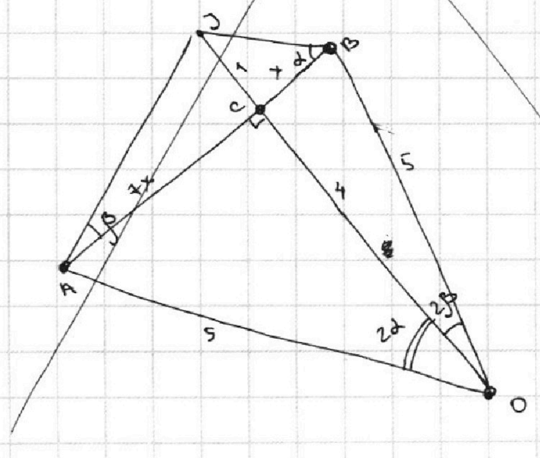


~~∠JCA = ∠π/2, т.к. AB – кас~~

1. $\angle C = \pi/2$, т.к. AB – кас.
2. $\angle JBA$ – впис. опирает. на $\smile AJ$
$\angle JOA$ – цент. опир. на $\smile AJ$
$\Rightarrow 2\angle JBA = \angle JOA = 2\alpha$
аналогично $\angle BOJ = 2\angle BAJ = 2\beta$
3. $OB = OA = 5$, т.к. радиусы Ω
$JC = 1$, т.к. радиус ω
$OC = JO - JC = 4$, т.к. JO – радиус Ω
4. $\triangle BCO$: п/у $BO^2 = OC^2 + BC^2$
$25 = 16 + x^2 \Rightarrow x = 3$







На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

32

$5+3=8$

$a^2+b^2-6ab=(a-b)^2-4ab=4-4\cdot3\cdot5=4(1-15)=4\cdot14=8\cdot7$

① Решена → 4

② Доказать, что если $(a,b)=1$, $(a+b;b^2)=1$

④ Решена → 5

⑥ Решена → 5

③ Решена, но ответ не красивый

⑤ Решена → 5

$1369 \,|\, 23$, 115, 219, 65

$230-23=207$

$(a,b)=1 \Rightarrow ak+bn=1$

$(a,b^2)=1$

$(p_1p_2\dots p_n)\ q_1q_2\dots q_k)$

$(p_1p_2\dots p_n+q_1\dots q_k;(q_1q_2\dots q_k)^2)$

$1369 \,|\, 7$, 63, 39, 19

$(a+b;b^2)=(a,(b-1)b)$

$(a+b;8b^2)=(a,(8b-1)b)=8b-1$

$1369 \,|\, 17$, 11, 26, 49, 12

$(5,(8\cdot3-1)\cdot3)=5;23\cdot3$

$a+b;$

$a,b \,\vdots\, c$ $\quad(a+b;(8b-1)b-a)$

$8;8\cdot9$ $\quad nc,kc$

$1369 \,|\, 7$, 7, 66, 39, 19

$17\cdot8=136$

$1+48\cos^2\alpha=4900(1-\cos^2\alpha)\cos^2\alpha$

$1369 \,|\, 17$, 8

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$AB = \frac{8}{7\operatorname{tg}\alpha} = 10\sin\alpha$$