



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.
4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-13;26)$, $Q(3;26)$ и $R(16;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\nu_p(X) \rightarrow 0$ максимумное $t, \text{ и } \text{то } X: p^t$

$\nu_7(abc) = \nu_7(a) + \nu_7(b) + \nu_7(c)$. Но по условию $\nu_7(a) = \nu_7(a) + \nu_7(c) \geq 39$

Значит $\nu_7(abc) \geq \nu_7(ac) \geq 39$.

$\nu_2(ab) \geq 15$; $\nu_2(bc) \geq 17$; $\nu_2(ac) \geq 23$ по условию.

$\nu_2(abc) = \nu_2(a) + \nu_2(b) + \nu_2(c) = \frac{\nu_2(ab) + \nu_2(ac) + \nu_2(bc)}{2} \geq \frac{15 + 17 + 23}{2} \geq \frac{55}{2} = 27.5$

Т.к. $\nu_2(abc) \in \mathbb{Z}$, то $\nu_2(abc) \geq 28$.

$\left. \begin{array}{l} \nu_7(abc) \geq 39 \\ \nu_2(abc) \geq 28 \end{array} \right\} \Rightarrow abc \geq 2^{28} 7^{39}$, пример когда $abc = 2^{21} 7^{39}$.

$$\begin{cases} a = 2^{11} 7^{11} \\ b = 2^5 7^0 \\ c = 2^{12} 7^{28} \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Пусть p — простое число $\neq 3$ и $\begin{cases} a+b \equiv 0 \\ a^4 - 7ab + b^4 \equiv 0 \end{cases}$

$$a^4 - 7ab + b^4 = (a+b)^4 - 9ab,$$

$a+b \equiv 0$; $(a+b)^4 - 9ab \equiv 0 - 9ab \equiv 0 \Rightarrow$ Т.к. $p \neq 3$, то $\begin{cases} a \equiv 0 \\ b \equiv 0 \end{cases}$, т.к. $a+b \equiv 0$,
то $a:p$ и $b:p$, тогда $\frac{a}{b}$ сократима, чего не может быть,
значит m не кратна простому кроме 3, значит $m=3^k$

Пусть $k \geq 3$, тогда $a+b : 3^3$, $(a+b)^4 : 3^6$, что бы $(a+b)^4 - 9ab : 3^3$,
надо что бы $-9ab : 3^3 \Rightarrow \begin{cases} a : 3 \\ b : 3 \end{cases}$, т.к. $a+b : 3$, то $\begin{cases} a : 3 \\ b : 3 \end{cases}$, значит $\frac{a}{b}$ сократима,
значит $k \leq 2$, и $m \leq 3^2 = 9$.

Пример на $m=9$: $a=4$; $b=5$:

$$\frac{a+b}{a^4 - 7ab + b^4} = \frac{9}{16 - 140 + 25} = \frac{9}{-99} = -\frac{1}{11}$$

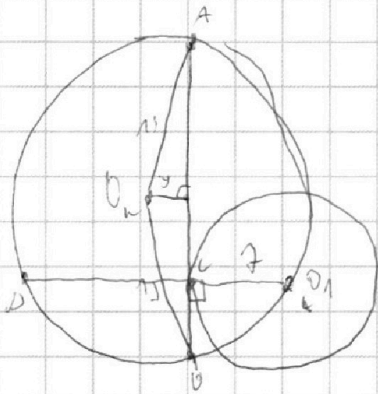
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



O_1 - центр ω ; O_2 - центр Ω

$$D = O_1 \cap \omega \cap \Omega \setminus O_1$$

Пусть $AB = 24 \cdot x$.

Пусть y - расстояние $O_1 \perp O_2$ до AB , то T - midpoint

$$y^2 = 13^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = 13^2 - (12x)^2$$

$$CD = 2 \cdot y + 7 \quad \text{т.к. } O_1 D \perp AB$$

$$\text{т.к. } AO_1 \perp CD \text{ диаметр, то } 17x \cdot 7x = 7 + (2y + 7) \Leftrightarrow 17x^2 = 2\sqrt{13^2 - 12x^2} + 7$$

$$\text{Если } x = 1, \text{ то } 17 = 2 \cdot \sqrt{13^2 - 12^2} + 7 = 2 \cdot \sqrt{5^2} + 7 = 10 + 7$$

$$\text{Если } x < 1, \text{ то } 17x^2 < 17 = 2 \cdot \sqrt{13^2 - 12^2} + 7 < 2\sqrt{13^2 - 12x^2} + 7$$

$$\Rightarrow x \geq 1$$

$$\text{Если } x > 1, \text{ то } 17x^2 > 17 = 2 \cdot \sqrt{13^2 - 12^2} + 7 > 2\sqrt{13^2 - 12x^2} + 7 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \leq 1$$

Значит: $x = 1$, и $AB = 24$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

МФТИ



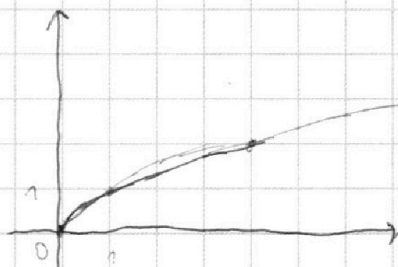
1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$Q = 3x^2 + 3x + 1; P = 1 - 9x$$

$$P = \sqrt{Q+P} - \sqrt{Q}$$

$$f(x) = \sqrt{x}, (Q+P) - (Q) = F(Q+P) - f(Q) =$$



$\Rightarrow Q, P$ - координаты по O_x точек касания $y = \sqrt{x}$ и

прямой с угловым коэффициентом 1. Тогда $Q \in [0; 1]$

1) $P \in [0; 1] \Rightarrow 1 - 9x \in [0; 1] \Rightarrow x \in [0; \frac{1}{9}]$ $\left\{ \begin{array}{l} Q \in [0; 1] \\ P \in [0; 1] \end{array} \right.$

2) $Q \in [0; 1], \forall Q > 0$ т.к. $Q = 3x^2 + 3x + 1, 3x^2 + 3x + 1 \leq 1 \Rightarrow 3x(x+1) \leq 0 =$
 $\Rightarrow x \in [-1; 0]$

3) $\Rightarrow x \in [0; \frac{1}{9}] \cap [-1; 0] = \{0\}$, проверка при $x=0$:

$$\sqrt{3 \cdot 0^2 + 3 \cdot 0 + 1} - \sqrt{1 - 9 \cdot 0^2} = 1 - 1 = 0$$

2) $P+Q \in [0; 1]: P+Q = 3x^2 - 6x + 2 = (\sqrt{3}x - \sqrt{3})^2 - 1 = (\sqrt{3}x - \sqrt{3} - 1) \cdot$

$(\sqrt{3}x - \sqrt{3} + 1), P+Q+1 = 3x^2 - 2x + 3 = (\sqrt{3}x - \sqrt{3} - \sqrt{2}) \cdot (\sqrt{3}x - \sqrt{3} + \sqrt{2})$

$$\Rightarrow x \in \left[\frac{-\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \frac{-\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}} \right] \cup \left[\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}+1}{\sqrt{3}}, \frac{-\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \right]$$

$\leftarrow -1$

$$\Rightarrow x \in \left[\frac{-\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}, \frac{-\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \right]$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



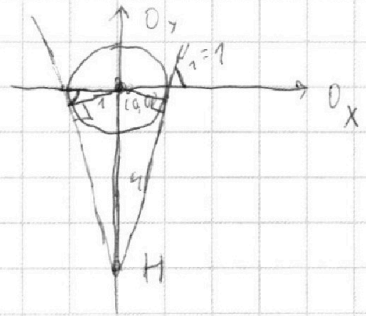
продолжение пункта 3.а):

Т.к. окружности одного радиуса, то такая точка ~~существует~~
существует. ~~$O_1 = (0, 0); O_2 = (0, 4); R_1 = 1; R_2 = 4.$~~

Пометим при которой $\omega(O_1, O_2) \rightarrow \omega(O_1, O_2)$ имеет
положительный коэффициент $\frac{R_2}{R_1}$ и центр в точке

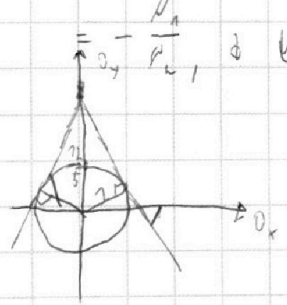
H на прямой $O_1 O_2$, что $\frac{O_1 H}{O_2 H} = \frac{R_1}{R_2} \Rightarrow H = (0, -4)$, ~~т.е. лежит~~

на прямой $O_1 O_2$ и $O_1 O_2 = \frac{1}{\cos \alpha}$ тогда угол между касательной



и ось $O_1 O_2 = \frac{1}{\cos \alpha}$
и угловой коэффициент прямой $= \pm \frac{1}{\cos \alpha}$
или $= \pm \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{15}}} = \pm \sqrt{15}$

б) внутренняя касательная, тогда коэф. касательной = $\frac{R_2}{R_1}$



и центр в точке $H, H \in O_1 O_2$, что $\frac{O_1 H}{O_2 H} = \frac{R_1}{R_2} \Rightarrow H = (0, \frac{2}{5})$
Тогда угл. коэф. прямой $= \pm \frac{1}{\frac{2}{5}}$
 $= \pm \frac{5}{2} = \pm \frac{\sqrt{15^2 - 5^2}}{5} = \pm \frac{\sqrt{115}}{5}$

т.е. угловой коэф. прямой $\alpha \in \left\{ \pm \sqrt{15}, \pm \frac{\sqrt{115}}{5} \right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha \in \left\{ \pm \sqrt{15}, \pm \frac{\sqrt{115}}{5} \right\}$.

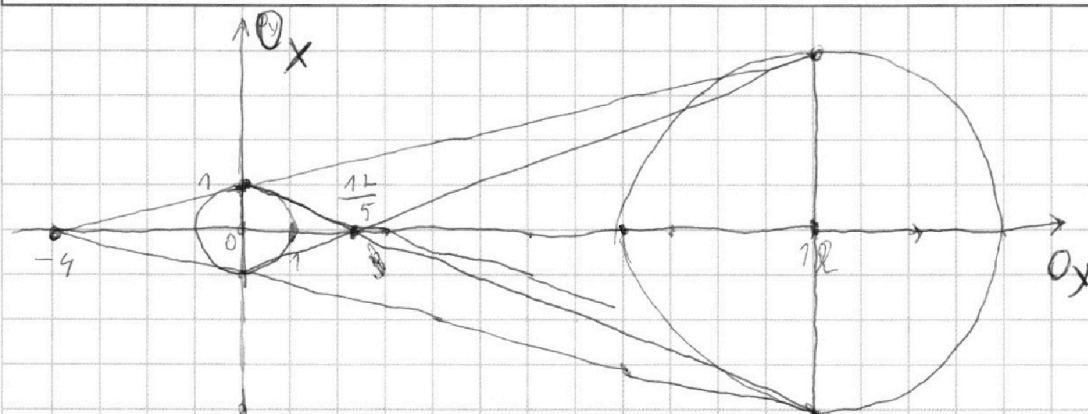
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



1) Рассмотрим ГМТ ~~на~~ (x, y) , что пер-во $(x^2 + y^2 - 1) / (x^2 + (y - 4)^2 - 16) \leq 0$ выполняется:

а) $(x^2 + y^2 - 1) \leq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 1$ - это у Аронни ^{круга} $\omega(0, 0, 1)$.

б) $(x^2 + (y - 4)^2 - 16) \leq 0$ ~~или~~ - это уравнение круга $\omega(0, 4, 4)$.

Отметим их на рисунке выше (верт. ось - O_y ,

горизонтальная - O_x). Заметим, что пер-во выполняется для каждой точки внутри или на границе обоих кругов.

2) $ax + y - 6b = 0 \Leftrightarrow y = -ax + 6b$ - это уравнение прямой.

3) Для выполнения условия необходимо, чтобы пересечение прямой и кругов было в 2 точках. Значит прямая должна касаться обоих кругов. Теперь найдем все касательные:

а) Внешние касательные: они проходят через центр гомотети, которая переводит одну окружность в другую то с положительными и коэффициентом,

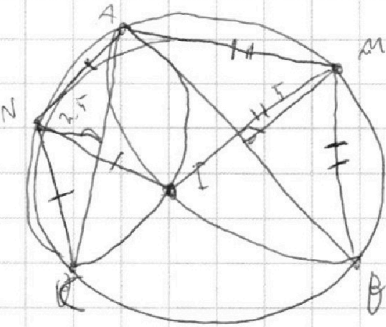
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



по T_0 0 Трехугольнике $\begin{cases} AN=NI=CN \\ AN=MT=BM \end{cases}$

Сведем симметрично отн. AI . $M \rightarrow M'$

Т.к. $\omega(N, NA) \cap \omega(M, MA) = \{A, I\}$, то $\{M, N\} \subset \text{сфера } AI$.

D - сфера AI . $S = AC \cap DN$, H_N - осн.

перп. из N на AC , H_M - осн. перп. из M на

AB . $H_M \rightarrow H_M'$ после сим. Т.к. AI - биссектриса $\angle A$, то $AB \rightarrow AC$.

Пусть изначально $DS = x \cdot AS$, тогда найдем

такие y , что $SN = y \cdot AS$ и не противоречит условию.

$$\left(\begin{array}{l} \triangle SNH_N \sim \triangle SM'H_M' \\ \frac{M'H_M'}{N'H_N} = \frac{y}{x} = k \end{array} \right) \Rightarrow SM' = 2 \cdot y \cdot AS. \quad \begin{cases} \angle ADS = 90^\circ = \angle SH_NN \\ \angle DSA = \angle NSH_N \end{cases} \Rightarrow \triangle ADS \sim \triangle NH_N S$$

значит $SH_N = H_N H_M' = x \cdot y \cdot AS$. ~~$AN \cdot AI = H_N C$~~ $\Rightarrow H_M' C = AS$.

Т.к. AN - биссектриса $\angle A$, то $AC \cap NM = S$, то $AS \cdot SC = MS \cdot NS = AS \cdot AN$.

$$= AS \cdot (2 \cdot x \cdot y \cdot AS + AS) = (y \cdot AS) \cdot (2 \cdot (x+y) \cdot AS) \quad | : AS^2$$

$$2xy + 1 = y \cdot 2(x+y) = 2xy + 2y^2 \quad | - 2xy \quad 1 = 2y^2 \Rightarrow y = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$\triangle ADS \sim \triangle NH_N S \Rightarrow AP = NH_N \cdot \frac{1}{y} = 2.5 \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}} = 2.5 \cdot \sqrt{2} = \frac{AI}{k} \Rightarrow AI = 5\sqrt{2}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

