



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ? *97 1?*

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x. \quad \text{наибольшее } 6105 \dots$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-13; 26)$, $Q(3; 26)$ и $R(16; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$. *сложно, но можно <целое>*

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases} \quad \text{2 опре-ти}$$

имеет ровно 2 решения. \Leftrightarrow все > 0 кроме каждой из 2 скобок? *99*

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ab = 2^{15} \cdot 7^{11}$$

⇓

$$ab = k \cdot 2^{15} \cdot 7^{11}$$

аналогично

$$bc = m \cdot 2^{17} \cdot 7^{18}$$

$$ac = n \cdot 2^{23} \cdot 7^{39}$$

⇓

$$ac \cdot ab \cdot bc = kmn \cdot 2^{55} \cdot 7^{68}$$

$$abc^2 = kmn \cdot 2^{55} \cdot 7^{68}$$

$$abc^2 = 2^{55} \cdot 7^{68}$$

$$abc = 2^{28} \cdot 7^{34}$$

$$ac = 7^{39}$$

$$abc = 7^{39}$$

$$abc = (2^{28} \cdot 7^{39})$$

$$abc \min = 2^{28} \cdot 7^{39}$$

- каждое из чисел делится
на 7
на 2
на 7
на 2

на 7
на 2
на 7
на 2

$$\text{Ответ: } abc \min = 2^{28} \cdot 7^{39}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{a}{b} - \text{число Кратчайших}$$

$$\Downarrow$$
$$\text{НОД}(a; b) = 1$$

$$\frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2 - 9ab} \quad \text{т.к. } \text{НОД}(a; b) = 1$$

~~$$(a+b)^2 - 9ab$$~~

~~$$(a+b) \text{ НОД}(a+b; (a+b)^2 - 9ab) = m$$~~

$$m = \text{НОД}(a+b; 9ab) \quad \left(\begin{array}{l} \text{по алгоритму} \\ \text{Эвклида} \end{array} \right)$$

$$9ab : a$$

$$a+b \not\% a \quad \text{т.к. } \text{НОД}(b; a) = 1$$

$$\Downarrow$$
$$a+b \not\% \text{ на любой из делителей } a$$

аналогично

$$a+b \not\% \text{ на любой из делителей } b$$

$$\Downarrow$$
$$\text{Итак } \max \text{НОД}(9ab; a+b) = 9$$

можно привести пример

$$a = 4, b = 5$$

$$\frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2} = \frac{9}{16 + 25 - 140} = \frac{9}{-99} = -\frac{1}{11}$$

$$\text{Ответ: } m_{\max} = 9$$

пояснение
 $9ab \not\% a, b$
помимо a, b и
их кратчайших
на $9ab$ и 9
только $1, 3$ и 9
 $9 - \text{НОД}(9ab; a+b)$
- т.к.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

$$\sqrt{3x^2 + 3x + 1 + 1 - 9x} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

$$3x^2 + 3x - 1 = 0$$

$$1 - 9x = b$$

одн

$$\sqrt{a+b} - \sqrt{a} = b \Rightarrow a+b > 0$$

$$a+b - 2\sqrt{a(a+b)} + a - b^2 \geq b$$

$$2a + b - b^2 = 2\sqrt{a(a+b)} \quad 2a + b - b^2 \geq 0$$

$$4a^2 + 4ab = (2a + b - b^2)^2$$

$$4a^2 + 4ab = 4a^2 + 2ab - 2ab^2 + 2ab + b^2 - b^3 + 2ab^2 + b^3 - b^4$$

$$4ab^2 = b^2 - 2b^3 + b^4$$

$$4a = 1 - 2b + b^2$$

$$4a = (b-1)^2$$

$$b-1 = 2\sqrt{a}$$

$$12x^2 + 6x + 4 = 81x^2$$

$$69x^2 - 12x - 4 = 0$$

$$D = 144 + 16 \cdot 69 = 16 \cdot 78$$

$$x_{1,2} = \frac{12 \pm 4\sqrt{78}}{2 \cdot 69} = \frac{6 \pm 2\sqrt{78}}{69}$$

ответ 7 и 0,366

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

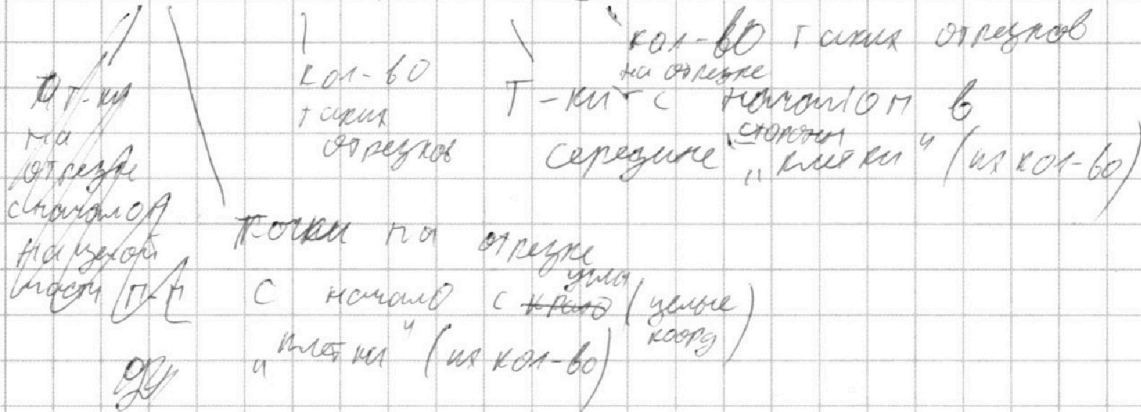


Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

5 - Пр 090 1 * (числа)

внутри такого парама точки с целыми координатами:

14 * 10 и 13 * 9 таких точек



для каждого из Т-к с началом в углу клетки можно поставить вторую

те же 14 Т-к на // отрезке с началом в середине стороны

— | — с началом в середине стороны

клетки можно поставить вторую те же 13 Т-к на // отрезке с началом в углу



$$\text{всего таких пар } 10 \cdot 14^2 + 9 \cdot 13^2 = 9 \cdot 169 + 1960$$

Ответ: 3481 пар.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

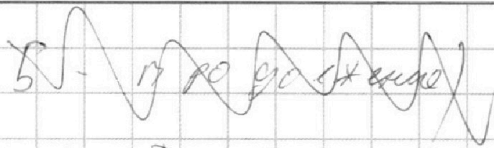
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$2x_1^2 - 2x_1 + y_1 - y_2 = 14$$

$$14 + 2x_1 + y_1 = 2x_2 + y_2:$$

- для каждой
т-ки (x_i, y_i) это -
прямая,

примем в уравнении
этой прямой $a = -2$

в вершине n -мн $O P Q R$

стороны PO и QR заданыся прямой

$$PO: y = -2x$$

$$QR: y = 32 - 2x$$

\Downarrow

они \parallel той прямой, получая для каждой т-ки

запомним также, что каждая точка на прямой, полученной от одной из точек этой прямой прямой также по заданному уравнению имеет ту же самую прямую в качестве полученной

расстояние м/у этими прямыми по оси $x = 16$

\Downarrow

для каждой т-ки

$$\begin{aligned} (y_1 = y_2) \\ \Downarrow \\ 2x_2 - y_2 = 14 \end{aligned}$$

в n -ме $P x y O$ есть участок такой прямой, лежащий внутри/на стороне n -мн

$$x = (-4; 26) \quad y = (9; 0) \quad \text{т.к. } xQ = yR = 7$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



6) прого л жине

$$a = \operatorname{tg}(\alpha)$$

α - угол наклона прямой к оси Ox

Решим с помощью формулы:

Заметим, что
из катетов можно
сформировать
оси Ox

и a совпадет по Ox можно
по разности координат

$$\Delta O_2 O_1 A \sim \Delta B O_1$$

$$\angle O_2 A O_1 = \angle B O_1 O_2 = 90^\circ$$

$$O_2 O_1 = 12$$

$$O_2 A = 4$$

$$O_1 B = 1$$

$$\frac{O_2 A}{O_2 O_1} = \frac{O_1 B}{O_1 O_2} \Rightarrow O_1 O_2 = \frac{12}{5} \cdot 1 = 2,4$$

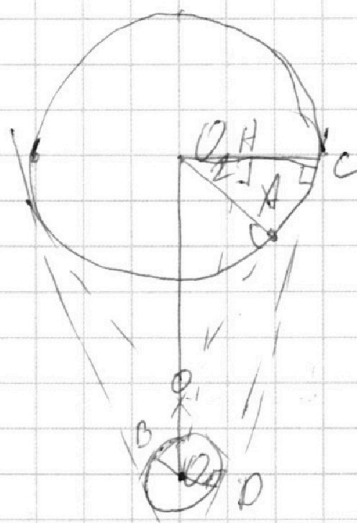
$$O_2 O = \frac{4 \cdot 12}{5} = 9,6$$

$$OC = \sqrt{9,6^2 + 4^2} = \sqrt{108,16} = 10,4$$

$$a_{1,2} = \pm$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{O_2 O}{O_2 C} = \frac{12}{5} = 2,4$$

$$a_{1,2} = \pm 2,4$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

 МФТИ

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



G - проекция α на Π

$O_1 O_2$, CD - AB в прямоугольнике $ABCD$

$O_1 H$ - высота α

тогда $H C D O_1$ - прямоугольник

\Downarrow

$$O_1 H = O_1 C = O_1 D = 3$$

$$\Downarrow$$
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{O_2 O_1}{O_2 H} = 4$$

$$\Downarrow$$
$$a_{3,4} = \pm 4$$

Ответ: $a = [-4; -2, 4; 2, 4; 4]$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

Каждая из скобок \leq ^{неравенства} ~~уравнения~~ если ее приравнять к 0 -
- окр-ть, радиус $\pi/4$ и центр $(0, 12)$, радиус 4 и $(0, 0)$

(x, y) - решение системы, если оно
Они не пересекаются

Принадлежит прямой $ax + y - 8b = 0$ и одной
из окр-тей (если r -ка внутри окр-ти - скобка ≤ 0)
на ней - $= 0$
вне нее - > 0

Решения всего \Leftrightarrow если r -ка лежит в окр-ти,
то прямая r уравн - сек и все r -ка на ней -
- решение \Leftrightarrow \checkmark

r -ка лежит на окр-ти (каждой)

Прямая - общая касательная
к окружностям (таких будет 2)

~~$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0 \\ ax_2 + y_2 - 8b = 0 \\ x_1^2 + y_1^2 = 1 \\ x_2^2 + (y_2 - 12)^2 = 16 \\ x_2 + (8b/ax_2 - 12)^2 = 16 \\ x_1 + (8b/ax_1)^2 = 4 \end{cases}$$~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

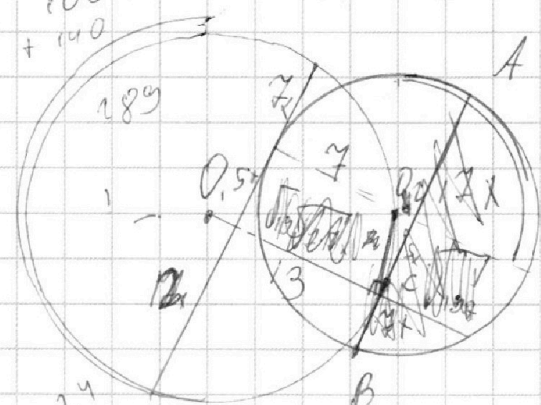


$ax + by = 8b$

$$y = \frac{8b}{a} - x$$

$$y = -ax + 8b$$

$$17^2 = 100 + 49$$



$$7 \cdot 17 = 70 + 49 = 119$$

$$108 : 4$$

$$108,16 : 4$$

$$27,04 : 4$$

$$6,76 : 4$$

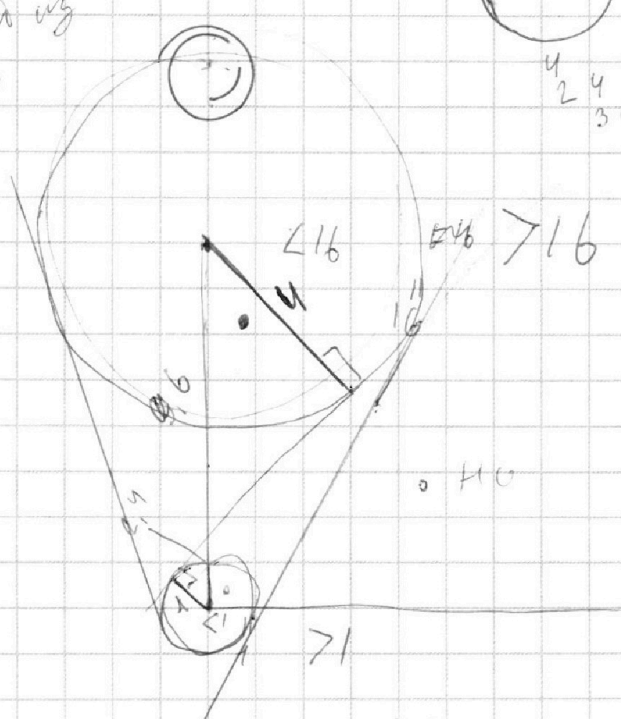
$$1,69$$

$$108,16$$

$$27 \cdot 4 = 80,28$$

$$\frac{1}{25} \cdot 4 = 100$$

r - радиус окружности
вспомогательная
окр.



$$ax + by = 8b$$

$$y = -ax + 8b$$

2 радиуса
или
полтора радиуса

$$96^2$$

$$(90 + 6)^2$$

$$16 +$$

$$8100 + 36 + 2 \cdot 540$$

$$9180 \quad 16 \quad 1080$$

$$9216$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$3(x^2 - 1)(x^2 - 4)$$

$$36 - 24 = 12$$

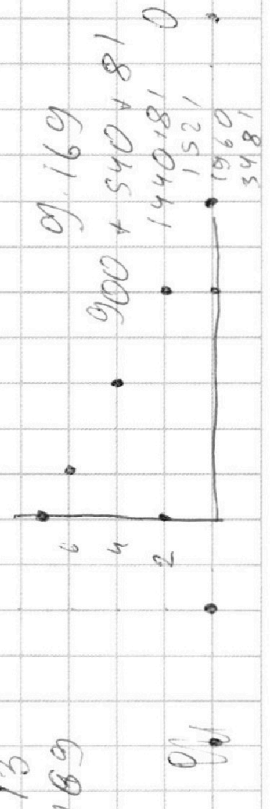
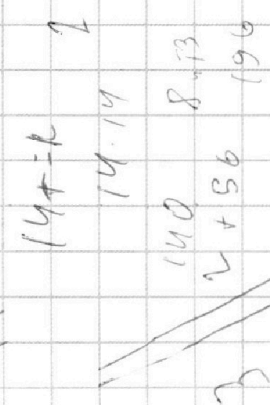
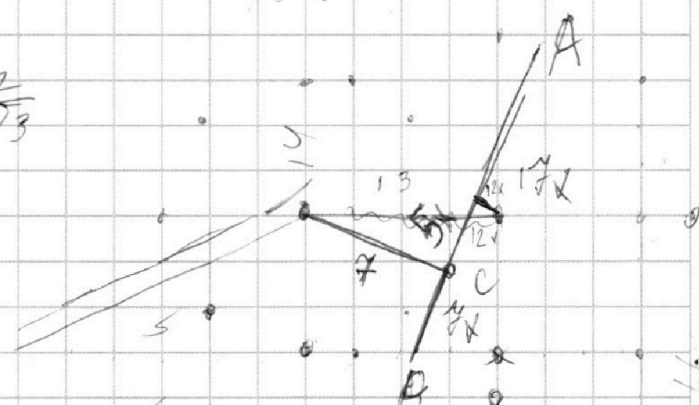
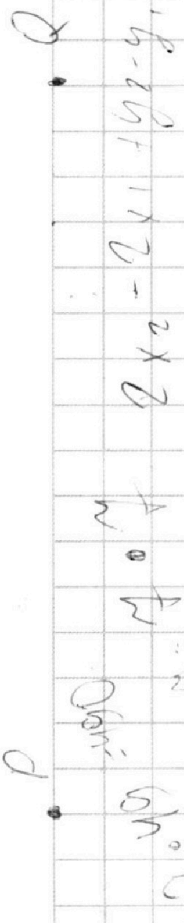
$$x = \frac{6 \pm 4\sqrt{3}}{6} = 1 + \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$1 - \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$h_1 = (b - 2a) / (x_2 - x_1) = 14$$

$$2(x_2 - x_1) \sqrt{2}$$

$$(b + x_2) + h_1 = (2a + 2x_2)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$ab \cdot bc \cdot ca = m \cdot 2^{15} \cdot 7^{11} \cdot n \cdot 2^{17} \cdot 3^{18} \cdot 5^{23} \cdot 7^{39}$

$ab \cdot bc \cdot ca = m \cdot 2^{15} \cdot 7^{11} \cdot n \cdot 2^{17} \cdot 3^{18} \cdot 5^{23} \cdot 7^{39}$

$abc^2 = mnk \cdot 2^{55} \cdot 7^{68}$

$abc : 2^{18} \cdot 7^{39}$

$ab \cdot bc : 7^{29}$

$a \cdot c : 7^{39}$

$\Sigma ab \cdot bc : 7^{39}$

$a : 2$

$b : 2^1$

a и b взаимно просты

$a = 2 \quad b = 3$

5^4

5

$4 - 42 + 9$

$13 \cdot 42$

$3 - 32$

-29

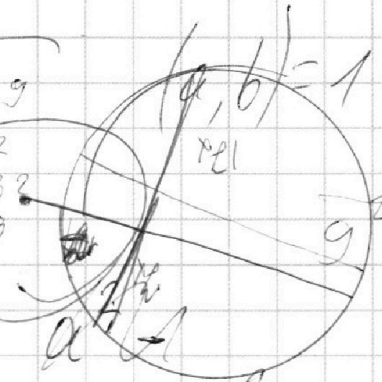
$a = 2^{15} \cdot 7^{11}$
 $c = 2^{17} \cdot 7^{39}$

$a = 2^{14} \cdot 7^{11}$

$b = 2^4$

$c = 2^{13} \cdot 7^{28}$

$18 \cdot 7 = 126$



$(a - b) + 5ab$

$(a + b)^2 - 9ab$

$\text{НОД}(a+b; a^2 - 7ab + b^2) = \text{НОД}(a+b; -9ab)$

$9ab : a; b; 9$

$a^2 + b^2 : a; b$

$12^2 = (3 \cdot 4)^2 = 16 \cdot 9$

$\Rightarrow a + b \text{ НОД} : 1 \cdot 3 \cdot 9$

$(1 - 9\sqrt{1})^2 = 1 - 18\sqrt{1} + 81$

AB

$a = 9$

$19 = \sqrt{a^2 + b^2}$

$a + b - 2\sqrt{a^2 + b^2} - 9a - b$

$\sqrt{a+b} - \sqrt{a-b} = b$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

МФТИ



1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} ax+by-8b=0 \\ [(x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16)] \leq 0 \end{cases}$$

1
если = 0,
то $ax-1a$
окр

1
если = 0, то
 $ax-1a$
окржности

если 1-ка внутри окр, то скобка < 0

если на окр, то эта скобка = 0

если вне, то скобка > 0

эти окр-ти не пересекаются (расст м/у ними 12,
а их радиусы - 1 и 4 соотв)

решения всего 2 →

решение - если 1-ка лежит внутри окр-ти
или на ней.

$$x(y) - \text{на } ax-1a$$

решения всего 2 - исконые прямые -

- рас. сразу к 2 окр-тям (на должно быть 4)
найдем а в этом случае:

$$\begin{cases} x_1^2 + y_1^2 = 1 \\ x_2^2 + (12-y_2)^2 = 16 \\ ax_1 + y_1 - 8b = 0 \\ ax_2 + y_2 - 8b = 0 \end{cases}$$