



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^9 3^{10} 5^{10}$, bc делится на $2^{14} 3^{13} 5^{13}$, ac делится на $2^{19} 3^{18} 5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-14; 42)$, $Q(6; 42)$ и $R(20; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 90, $SA = BC = 12$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N1

Обозначим a_i, b_i, c_i - ~~каждый~~ максимальная степень простого множителя
и на которого делится a, b, c .

Тогда $a_2 + b_2 \geq 9$

$b_2 + c_2 \geq 14 \Rightarrow 2(a_2 + b_2 + c_2) \geq 42$

$a_2 + c_2 \geq 13$

$a_2 + b_2 + c_2 \geq 21 \Rightarrow$ или abc

аналог делится на 2^{21}

$a_3 + b_3 \geq 10$

$b_3 + c_3 \geq 13$

$a_3 + c_3 \geq 18$

$2(a_3 + b_3 + c_3) \geq 41$

$a_3 + b_3 + c_3 \geq 21$ - или $abc: 3^{21}$

$a_5 + b_5 \geq 10$

$b_5 + c_5 \geq 13$

$a_5 + c_5 \geq 30$

$2(a_5 + b_5 + c_5) \geq 53$

$a_5 + b_5 + c_5 \geq 27$ - или $abc: 5^{27}$

Получаем, что $abc \geq 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{27}$, но $abc: bc \Rightarrow abc: 5^{30}$, так что

$abc \geq 2^{21} \cdot 3^{27} \cdot 5^{30}$, проверим a, b, c которые подходят при $abc = 2^{21} \cdot 3^{27} \cdot 5^{30}$

$a = 2^7 \cdot 3^8 \cdot 5^{10}$, получаем $ab = 2^9 \cdot 3^{11} \cdot 5^{20} : 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{20}$

$b = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^0$

$c = 2^{12} \cdot 3^{10} \cdot 5^{20}$

$bc = 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{20} : 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13}$

$ac = 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30} : 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30}$

Ответ: $abc_{\min} = 2^{21} \cdot 3^{27} \cdot 5^{30}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Продолжим EF до пересечения с $CB(N)$.

Обозначим AB за $3x$, DB за x . Тогда

и.и. $EN \parallel AB$. $EF = 3y$, $FN = y$.

Тогда по свойствам касательной и секущей:

$$FN \cdot NE = NB^2$$

$$y \cdot 4y = NB^2 \Rightarrow NB = 2y$$

(D - высота окружности Δ) $CD^2 = AD \cdot DB$

$$CD = \sqrt{3}x$$

$$(F = \frac{y}{x} \cdot CD = \sqrt{3}y \Rightarrow FD =$$

$$= \sqrt{3}(x-y) \text{ и т.д.}$$

$$(\sqrt{3}(x-y))^2 + (x-y)^2 = (2y)^2$$

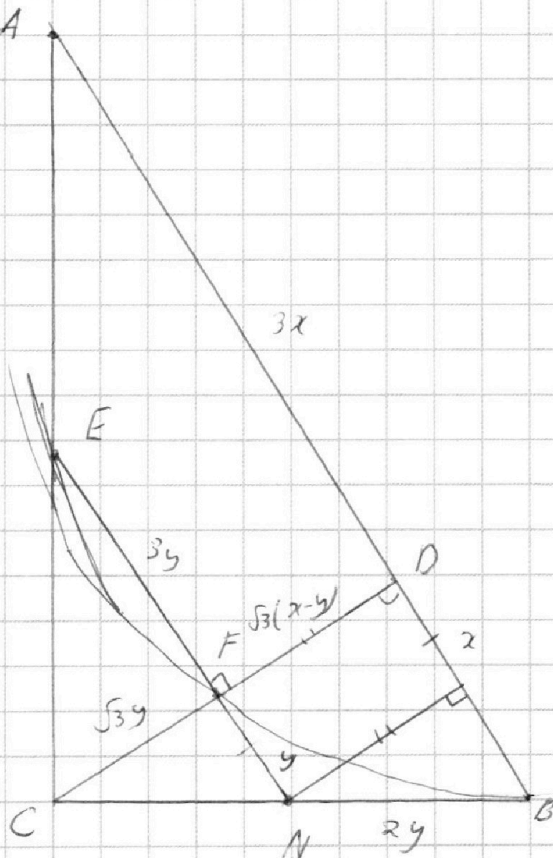
$$4(x-y)^2 = 4y^2$$

$$4x^2 - 8xy + 4y^2 = 4y^2 \Rightarrow 4x^2 - 8xy = 0$$

$$4x = 8y, \quad x = 2y, \quad S_{APC} = \frac{3S_{ABC}}{4}$$

$$S_{ECF} = \left(\frac{y}{x}\right)^2 \cdot S_{ABC} = \frac{1}{4} \cdot S_{ABC} = \frac{3S_{ABC}}{16}$$

Ответ: $S_{APC} : S_{CEB} = 16 : 3$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№3

$$5 \arcsin(\cos x) = \frac{x + \pi}{2}$$

$$5 \arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = \frac{x + \pi}{2}, \text{ помним, что } \arcsin(\sin(x)) = x + 2\pi k,$$

\downarrow
тогда, что $x + 2\pi k \in [0, 2\pi]$

$$5\left(\frac{\pi}{2} - x + 2\pi k\right) = \frac{x + \pi}{2}$$

$$\frac{5\pi}{2} - 5x + 10\pi k = \frac{x + \pi}{2}$$

$$6x = 9\pi + 10\pi k$$

$$x = \frac{\pi}{3} + \frac{5\pi k}{3}; \text{ тогда } \frac{\pi}{3} + \frac{5\pi k}{3} + 2\pi k = \frac{\pi + 11\pi k}{3} \in [0, 2\pi]$$

\downarrow
попробуем только $k=0$

$$x = \frac{\pi}{3} - \text{единственный ответ}$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{\pi}{3}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



нч

Систему уравнений можно решить графически. Тогда первое уравнение - прямая вида $kx+d=y$, где $ax+2y-3b=0$

$$y = -0,5ax + 1,5b; k = -0,5a; d = 1,5b$$

Второе уравнение можно из двух частей: окружность $x^2+y^2=9=0$

$x^2+y^2=3^2$ - с центром в $(0,0)$ и радиусом 3. и еще окружность

$$x^2+y^2-12x+32=0; x^2-6 \cdot 2x+6^2+y^2=2^2$$

Получим так: $(x-6)^2+y^2=2^2$ - с центром в $(6,0)$ и радиусом 2.

y

Тогда нам нужно найти тангенс k ,

т.к. касательная к окружности проходит через точку пересечения с окружностями,

наше l_1 и l_2 не параллельны. Однако, это k

выражен.

Между k двумя другими касательными, как показано

на рисунке:

$$\text{Тогда } l_1+l_2=6, \frac{l_1}{l_2} = \frac{3}{2}; l_1=1,5l_2$$

$$1,5l_2=6, l_2 = \frac{6}{1,5}; l_1 = \frac{1,5 \cdot 6}{1,5}$$

$$= \frac{18}{1,5} = 3,6$$

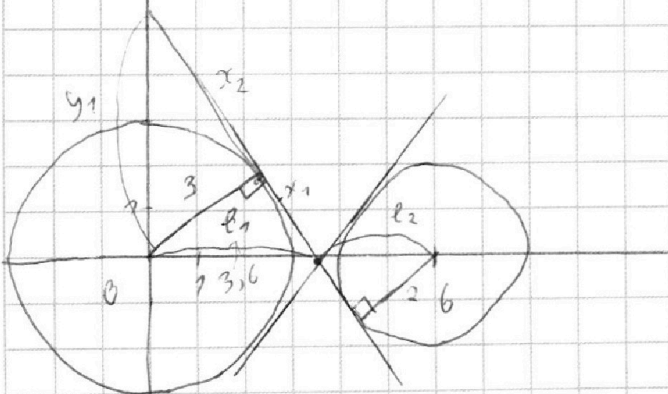
$$x_1^2 = 3,6^2 - 3^2 =$$

$$= 0,6 \cdot 6,6 \Rightarrow$$

$$x_1 = \sqrt{0,6 \cdot 6,6}; x_2 = \frac{3}{2}$$

$$k_1 = \frac{y_1}{3,6} = \frac{x_2}{3} = \frac{3}{x_1} = \frac{3}{\sqrt{0,6 \cdot 6,6}} = \frac{5}{\sqrt{11}} \Rightarrow k_1 = \frac{5}{\sqrt{11}}$$

- когда отложено значение k одну окружность.





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

м.е. при $k \in \left[-\frac{5}{\sqrt{11}}; \frac{5}{\sqrt{11}} \right]$ - дуга несе 4 решениям при

точка в. $k = 0,5a$, значит при $a \in \left[-\frac{10}{\sqrt{11}}; \frac{10}{\sqrt{11}} \right]$ - несе 4.

Ответ: $a = \left(-\infty; -\frac{10}{\sqrt{11}} \right) \cup \left(\frac{10}{\sqrt{11}}; +\infty \right)$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

NS

По свойству логарифмов $\log_3 x = \frac{1}{\log_x 3}$, $\log_3 5y = \frac{1}{\log_{5y} 3}$, заменим $\log_3 x$ на t_x

тогда:

$\log_3 5y$ на t_y

$$t_x^4 + \frac{6}{t_x} = \frac{5}{2t_x} - 8, \quad t_y^4 + \frac{2}{t_y} = \frac{11}{2t_y} - 8$$

$$t_x^5 + 6 = 2,5 - 8t_x, \quad t_y^5 + 2 = 5,5 - 8t_y$$

$$t_x^5 + 8t_x = -3,5, \quad t_y^5 + 8t_y = -3,5$$

$$t_x^5 + t_y^5 + 8(t_x + t_y) = 0$$

можно разложить на

$$(t_x + t_y)(t_x^4 - t_x^3 t_y + t_x^2 t_y^2 - t_x t_y^3 + t_y^4)$$

второй множитель всегда > 0

тогда

$$(t_x + t_y)(t_x^4 - t_x^3 t_y + t_x^2 t_y^2 - t_x t_y^3 + t_y^4 + 8) = 0$$

второй множитель > 0

$$t_x + t_y = 0$$

$$\log_3 x + \log_3 5y = 0$$

$$\log_3 5xy = 0$$

$$3^0 = 5xy, \quad 1 = 5xy \Rightarrow xy = \frac{1}{5}$$

Ответ: $xy = 0,2$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

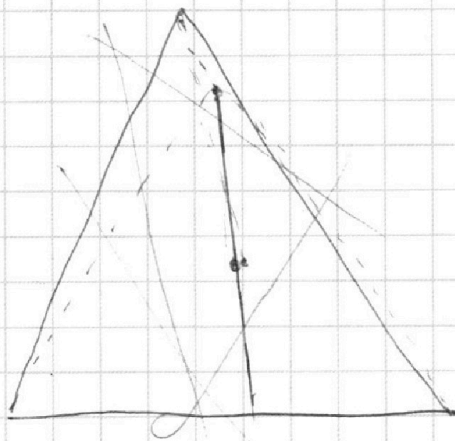
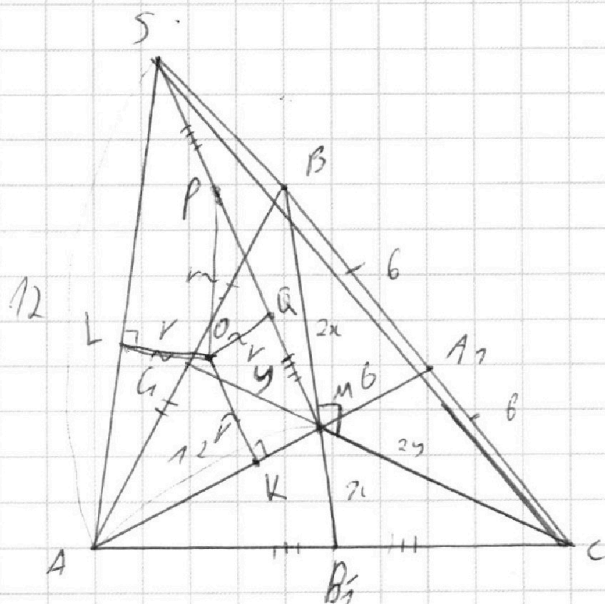
1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№7



Эта линия воспринимается т.к. все четыре точки
точка касания и точки пересечения ASM
и центра окружности - коллинеарны.

По теореме о секущей и касательной: $MK^2 = MQ \cdot MP$; $MK^2 = MQ \cdot (PQ + MQ)$

также $\triangle OLA \sim \triangle AKO$ (углы при вершине).

$AL = AK$; $AL + SL = AK + KM$

$SA = KM = 12$

$SL^2 = SP \cdot SQ$; $SL^2 = MQ \cdot (MQ + PQ)$
($SP = QM$)

$MK = SL$

по свойствам медиан $MA_1 = \frac{1}{2} BC = 6$

$\Rightarrow \triangle BMC$ - прямоугольный. Пусть $BM = 2x$; $CM = 2y$, тогда $MB_1 = x$
 $CB_1 = y$

Заметим, что $S_{MBC} = \frac{S_{ABC}}{3} = 30 = \frac{BM \cdot MC}{2} = \frac{2x \cdot 2y}{2}$

$AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 3x \cdot 3y = 9xy$ $xy = 15$

$= 18 \cdot 9xy = 18 \cdot 9 \cdot 15 = 2430$

Ответ: $AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 2430$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

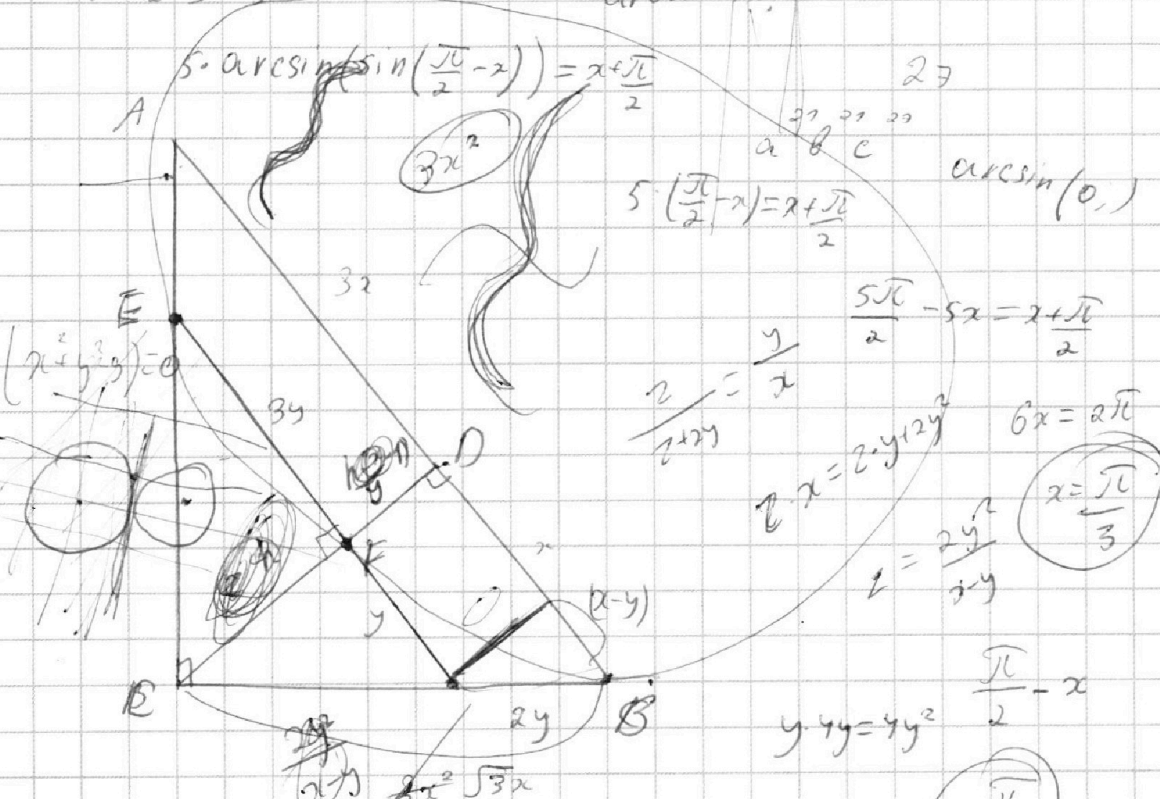
1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$x^2 - 12x + 36 + y^2 - 4 = 0$ $28 + 14 = 38 + 4 = 42$
 $2 \cdot 6 \cdot x \cdot (x^2 - 6)^2 + y^2$
 $a_2 + b_2 \geq 9$ $2(a_2 + b_2 + c_2) \geq 42$
 $b_2 + c_2 \geq 14$ $a_2 + b_2 + c_2 \geq 21$ $23 + 18 = 41$
 $a_2 + c_2 \geq 19$ $23 + 30 = 53$



$5 \cdot \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) = x + \frac{\pi}{2}$
 $5 \cdot (\frac{\pi}{2} - x) = x + \frac{\pi}{2}$
 $\frac{5\pi}{2} - 5x = x + \frac{\pi}{2}$
 $6x = 2\pi$
 $x = \frac{\pi}{3}$
 $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$
 $y = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4bc}}{2}$
 $ax - 3b = 2y$
 60°
 $\frac{5\pi}{6} = \frac{2\pi}{6} + \frac{3\pi}{6}$
 $\sqrt{3}x + (\frac{x}{y} - 1)^2 = 4y^2 + (x-y)^2$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



log

$$\log_3 243 = 5$$

$$txy (txy - tx^2y - ty^2) - txy$$

$$a = 2^7 \cdot 3^8 \cdot 5^{16}$$

$$b = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^5$$

$$c = 2^{10} \cdot 3^{10} \cdot 5^{20}$$

$$2 \log_x 27 = \log_x 243$$

$$2 \cdot \log_2 256 = 2 \cdot 4$$

$$a = 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{21}$$

$$b = 2^2$$

$$c = 2^{22}$$

$$\log_3 x = \frac{1}{\log_x 3}$$

$$\log_3 x^{12} = \frac{12}{\log_x 3}$$

$$\log_3 3 = 1$$

$$\log_2 5^{1024} = \log_2 1024 = 5$$

$$\log_3^4 x + \frac{6}{\log_3 2} = \frac{5 \log_3 3^9}{2} - 8$$

$$\log_3 x + \log_3 5y = \log_3 x \cdot 5y = 3$$

$$\frac{\pi}{3} \cdot \frac{5\pi k}{3} + \frac{6\pi k}{3}$$

$$\frac{7\pi k}{3} = \frac{\pi}{3}$$

$$\log_x z = \frac{1}{\log_z x}$$

$$2,5 - 6 = 3,5$$

$$tx^4 + \frac{6}{tx} = \frac{5}{2tx} - 8; \quad ty^4 + \frac{2}{ty} = \frac{11}{2ty} - 8$$

$$tx^3(tx - ty) + ty^3(ty - tx) = \frac{5}{2} - 8tx; \quad ty^3 + 2 = \frac{11}{2} - 8ty$$

$$(tx^3 - ty^3)(tx - ty) + tx^5 + 8tx = -3,5; \quad ty^5 + 8ty = 3,5$$

$$tx^5 + ty^5 + 8(tx + ty) = 0$$

$$(tx + ty)(tx^4 - tx^3ty + tx^2ty^2 - txty^3 + ty^4)$$

2B + 7 = 1
3B = 4

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



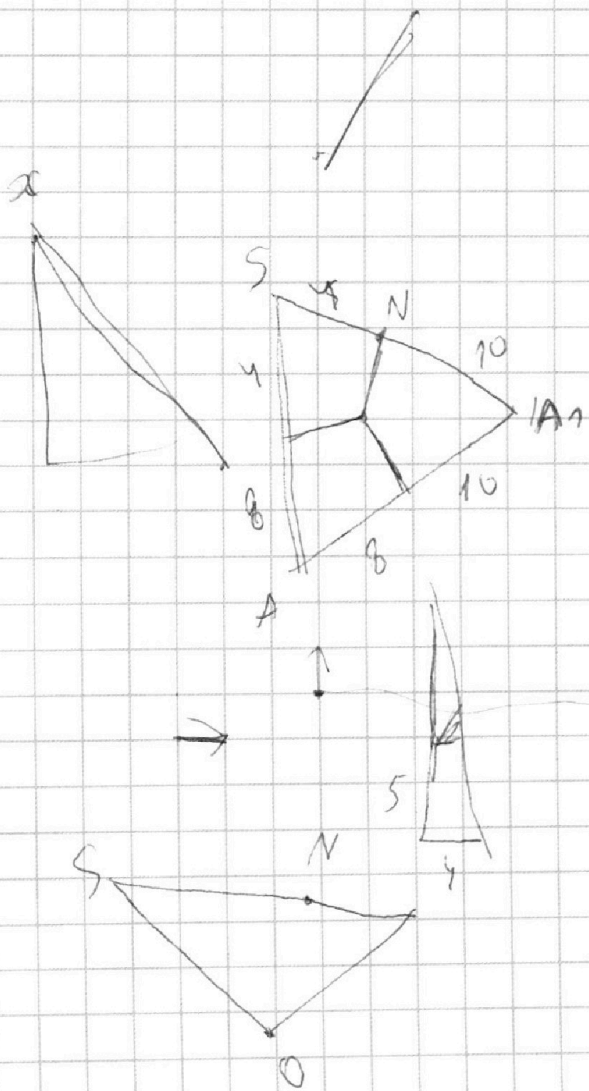
MS

~~систему уравнений можно решить графически. Тогда первая задача~~

~~решается тогда $y = kx + b$, где $ax + 2y - 3b = 0$~~

$$y = -\frac{a}{2}x + 1,5b \rightarrow k = -\frac{a}{2}, d = 1,5b$$

~~а вторая задача решается~~



0,6 6,6
 0,6 0,6 11
 0,6 · 5,71
 $\frac{3}{0,6}$
 $\frac{1}{0,2 \cdot 5,71}$
 $\frac{5}{5,71}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Handwritten mathematical solution on grid paper for a geometry problem involving a triangle and its medians.

Equations and Formulas:

- $\arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right)$
- $\sqrt{3x\left(1-\frac{y}{2}\right)}$
- $(x-y)^2 = 4y^2$
- \cos
- \sin
- $\arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right)$
- $MK^2 = MQ \cdot MP$
- $SL^2 = SP \cdot SQ$
- $\frac{MK^2}{SL^2} = \frac{MQ \cdot MP}{SP \cdot SQ}$
- $ML \cdot MB =$
- $4x \cdot y = 30 \Rightarrow$
- $3y \cdot 3x \cdot 18 =$
- $9xy \cdot 18 =$
- $9 \cdot 30 \cdot 18 =$
- $\frac{30}{4} = 7.5$
- $\frac{18 \cdot 30}{2} = 15 \cdot 18 = 300 - 30 = 270$

Diagrams:

- Triangle with medians intersecting at point M.
- Triangle with medians and a line through M perpendicular to one of them.
- Triangle with medians and a line through M parallel to one of them.
- Triangle with medians and a line through M perpendicular to one of them, with points L, K, Q, P, S, R marked.
- Triangle with medians and a line through M perpendicular to one of them, with points L, K, Q, P, S, R marked.

Arithmetic:

- $81 \cdot 2 = 162$
- $1620 + 810 = 2430$
- $3 \cdot 10 = 30$
- $6 \cdot 9 = 54$
- $9 \cdot 162 = 1458$
- $12 \cdot 2430 = 29160$
- $15 \cdot 6 = 90$
- $18 \cdot 5 = 90$
- $21 \cdot 4 = 84$
- $24 \cdot 3 = 72$
- $27 \cdot 2 = 54$
- $30 \cdot 1 = 30$

Other notes:

- $\frac{\pi}{2} - \alpha$
- $\frac{\pi}{2} - \alpha$
- 270
- $90 +$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!