



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-12;24)$, $Q(3;24)$ и $R(15;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

n/1

$$\begin{cases} ab : 2^{14} \cdot 7^{10} \\ bc : 2^{17} \cdot 7^{17} \\ ac : 2^{20} \cdot 7^{37} \end{cases} \quad \begin{cases} a = 2^{\alpha_1} \cdot 7^{\alpha_2} \cdot x \\ b = 2^{\beta_1} \cdot 7^{\beta_2} \cdot y \\ c = 2^{\gamma_1} \cdot 7^{\gamma_2} \cdot z \end{cases}$$

$$abc = 2^{\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1} \cdot 7^{\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2} \cdot xyz$$

$\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2$ - целые неотрицательные числа.
 xyz не делится на 2 и 7.
 $x, y, z \in \mathbb{N}; xyz \geq 1$

Тогда делимость из условия можно записать так:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 \geq 14 \\ \beta_1 + \gamma_1 \geq 17 \\ \alpha_1 + \gamma_1 \geq 20 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_2 + \beta_2 \geq 10 \\ \beta_2 + \gamma_2 \geq 17 \\ \alpha_2 + \gamma_2 \geq 37 \Rightarrow \end{cases}$$

$$2\alpha_1 + 2\beta_1 + 2\gamma_1 \geq 51 \Rightarrow \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 \geq 37$$

$$\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 \geq 26 \text{ (т.к. все числа целые)}$$

Тогда $abc \geq 2^{26} \cdot 7^{37} \cdot 1$

Пример где $abc = 2^{26} \cdot 7^{37}$:

$$a = 2^9 \cdot 7^{10} \quad b = 2^6 \cdot 7^{11} \quad c = 2^6 \cdot 7^{27}$$

Ответ: $abc = 2^{26} \cdot 7^{37}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$49x^4 + 1 + 14x^2 = 100 - 36x^2$$

$$49x^4 + 50x^2 - 99 = 0$$

$$t = x^2 \quad 49t^2 + 50t - 99 = 0$$

$$D = 25^2 - 49 \cdot (-99) = 5976 =$$

$$= 4 \cdot 1369$$

$$t = \frac{-25 \pm 2\sqrt{1369}}{49}$$

$$t \geq 0 \Rightarrow t = \frac{2\sqrt{1369} - 25}{49}$$

$$x = \frac{\sqrt{2\sqrt{1369} - 25}}{7}$$

$$AB = 8x = \frac{8}{7} \cdot \sqrt{2\sqrt{1369} - 25}$$

$$\text{ОТВЕТ: } AB = \frac{8}{7} \cdot \sqrt{2\sqrt{1369} - 25}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\sqrt{4}$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$$

$$\sqrt{2x^2 + 2x + 1 + (2 - 7x)} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$$

$$t = 2x^2 + 2x + 1 \quad y = 2 - 7x;$$

$$\sqrt{t+y} - \sqrt{t} = y$$

$$\begin{cases} t+y+t-2\sqrt{(t+y)t} = y^2 \\ t+y \geq 0 \\ t \geq 0 \end{cases}$$

$t \geq 0 \rightarrow$ всегда верно, т.к. $2x^2 + 2x + 1 > 0$

$$2t - y(y-1) = 2\sqrt{(t+y)t}$$

$$4t^2 + y^2(y-1)^2 - 4ty(y-1) = 4t^2 + 4yt$$

$$y^2(y-1)^2 - 4y + (y-1+1) = 0$$

$$y^2(y-1)^2 - 4y^2t = 0$$

$$y^2((y-1)^2 - 4t) = 0$$

$$y^2 = 0$$

$$(2-7x)^2 = 0$$

$$x = \frac{2}{7}$$

$$t+y = 2 \cdot \frac{4}{49} - 5 \cdot \frac{2}{7} + 3 > 0$$

$$(y-1)^2 - 4t = 0$$

$$(1-7x)^2 - 4(2x^2 + 2x + 1) = 0$$

$$49x^2 - 22x - 3 = 0$$

$$\frac{D}{4} = 121 - (-3) \cdot 49 = 294$$

$$x = \frac{11 \pm 2\sqrt{67}}{49}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



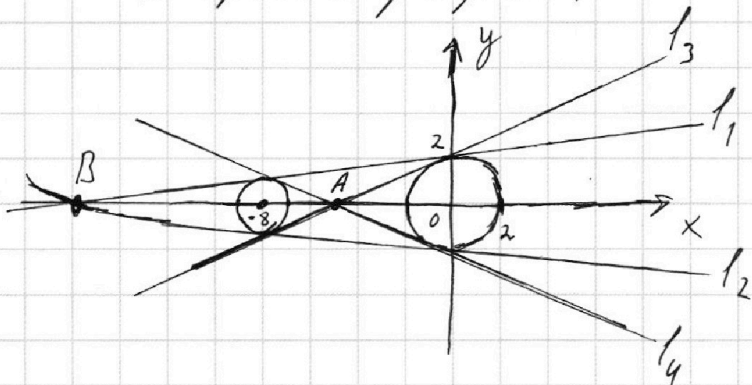
✓6

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

$(x+8)^2 + y^2 \leq 1$ - окружность с центром $(-8; 0)$
и радиуса 1.

$x^2 + y^2 \leq 4$ - окружность с центром $(0; 0)$
и радиуса 2.

Построим графики:



Чтобы прямая
имела ровно

2 решения,
необходимо,

чтобы прямая
вида $y = ax + 10b$

касается обеих окруж-

ностей. Всего таких
прямых ровно 4: две внеш-

ние и две внутренние общие
касательные. (изобразены
на рисунке).

Прямые l_1 и l_2 , а также

l_3 и l_4 симметричны

относительно Ox .

Прямые l_1 и l_2 пересекаются в точке B, а l_3 и l_4 в
точке A.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Примечание x -координата точки A равна

$$x_A = -\frac{8}{3} \cdot 2 = -5\frac{1}{3}, \text{ а точки } B$$

$$x_B = -8 \cdot 2 = -16$$

$$\text{Тогда } A \left(-5\frac{1}{3}; 0\right) \text{ и } B (-16; 0)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

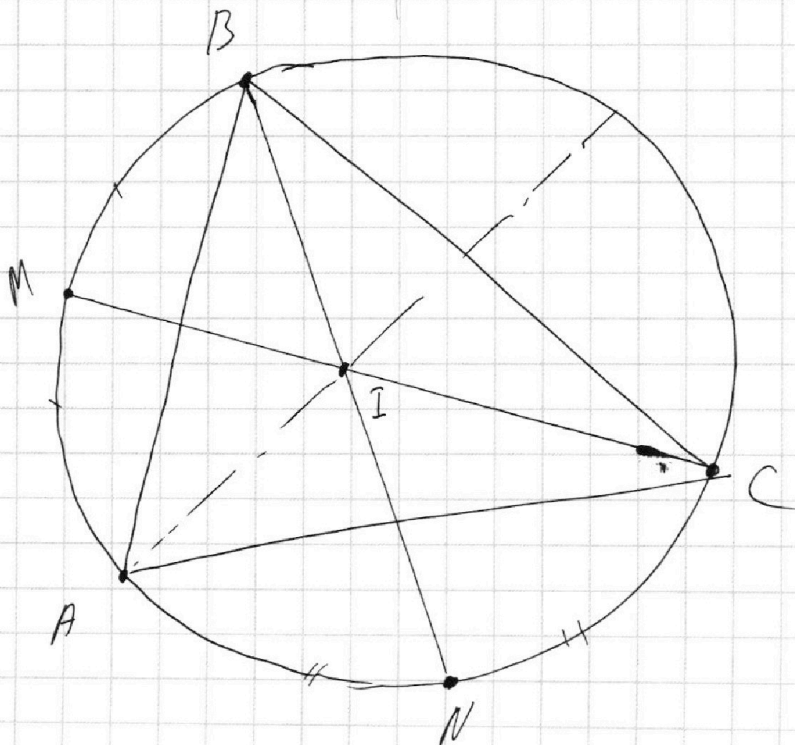
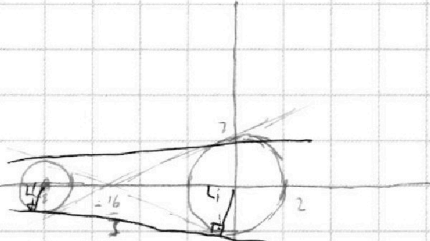
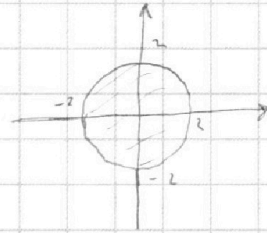
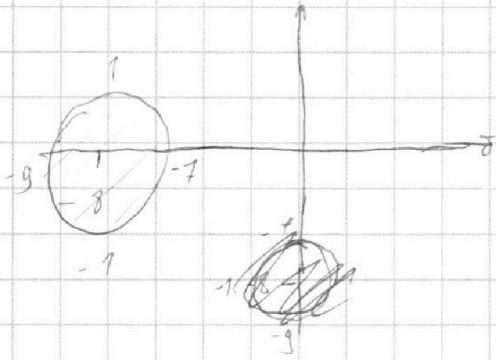


Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№6

$$y = ax + 10b$$

$$(x+8)^2 + y^2 \leq 1 \quad \text{или} \quad x^2 + y^2 \leq 4$$





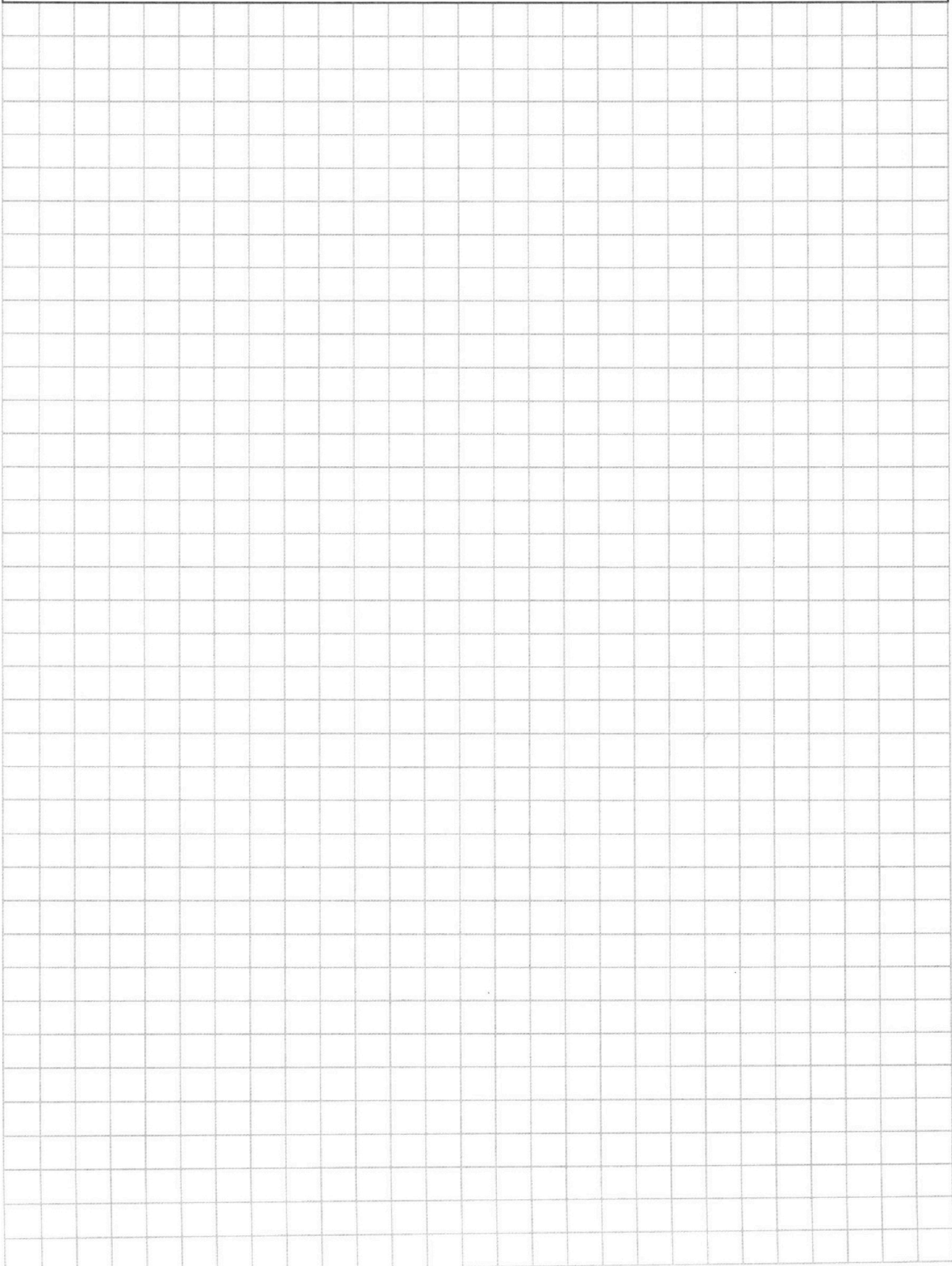
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$122 \cdot 2 = 244$$

$$= 67 \cdot 4$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$$

$$\sqrt{2x^2 + 2x + 1 + (2 - 7x)} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$$

$$\sqrt{t+y} - \sqrt{t} = y$$

$$t+y+t-2\sqrt{(t+y)t} = y^2$$

$$2t+y-y^2 = 2\sqrt{t^2+yt}$$

$$2x^2 - 5x + 3$$

$$D = 25 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 1$$

$$2t+y-y(y-1) = 2\sqrt{t^2+yt}$$

$$4t^2 + y^2 - (y-1)^2 - 4t \cdot y(y-1) = 4(t^2+yt)$$

$$4t^2 + y^2 - (y-1)^2 - 4t \cdot y(y-1) = 4t^2 + 4yt$$

$$y(y-1)(y(y-1)-4t) - 4yt = 0$$

$$D = 4 - 4 \cdot 2$$

$$y^2(y-1)^2 - 4yt(y-1) - 4yt = 0$$

$$y^2(y-1)^2 - 4yt(y-1+1) = 0$$

$$y^2(y-1)^2 - 4y^2t = 0$$

$$y^2((y-1)^2 - 4t) = 0$$

$$y^2 = 0$$

$$(y-1)^2 - 4t = 0$$

$$(2-7x)^2 = 0$$

$$(1-7x)^2 - 4(2x^2+2x+1) = 0$$

$$2-7x=0 \quad 2 \cdot \frac{1}{49} - 5 \cdot \frac{2}{7} + 3 = 1 + 49x^2 - 14x - 8x^2 - 8x - 4 = 0$$

$$7x = 2$$

$$49x^2 - 22x - 3 = 0$$

$$x = \frac{2}{7}$$

$$= \frac{8-70}{49} + 3 =$$

$$\frac{D}{4} = 121 - (-3) \cdot 49 = 249$$

$$2 \cdot \frac{1}{49} + 2 \cdot \frac{2}{7} + 1 =$$

$$= \frac{-62+150}{49}$$

$$x = \frac{11 \pm \sqrt{249}}{49} = \frac{11 \pm 2\sqrt{67}}{49}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$2(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 12$$

$$(y_2 - y_1) + k(x_2 - x_1) = 0$$

$$(y_2 + y_1) + k(x_2 + x_1) = 2b$$

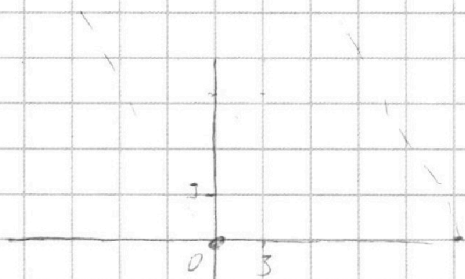
$$y = kx + b$$

$$y_1 = kx_1 + b$$

$$y_2 = kx_2 + b$$

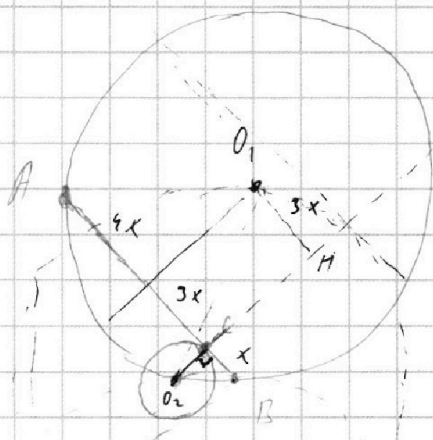
$$y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1)$$

$$y_2 + y_1 = k(x_2 + x_1) + 2b$$



$$2x_2 + y_2 = 12$$

$$y_2 = -2x_2 + 12$$



$$25 = 3x + O_1H^2$$

$$O_1H^2 = 25 - 3x$$

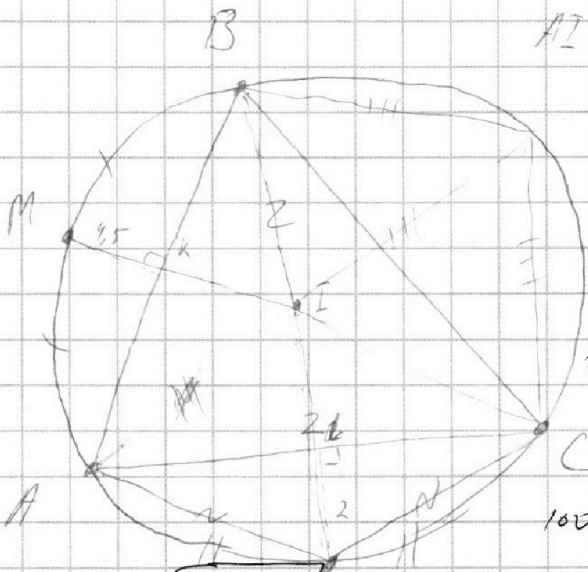
$$25 - (O_1H - 1)^2 = 4x$$

$$25 - (\sqrt{25 - 3x} - 1)^2 = 4x$$

$$25 - 25 + 3x - 1 + 2\sqrt{25 - 3x} = 4x$$

$$BM^2 = \frac{AA^2}{4} + 4,5^2$$

$$IK = \sqrt{\frac{AB^2}{4} + 4,5^2} - 4,5 = 16$$



$$x + 1 = 2\sqrt{25 - 3x}$$

$$x^2 + 2x + 1 = 4 \cdot 25 - 12x$$

$$LN^2 = \frac{AL^2}{4} + \frac{AC^2}{9} + 4$$

$$IL = \sqrt{\frac{AL^2}{4} + 4} - 2$$

$$IK = \frac{AL^2}{9} + (\sqrt{\frac{AL^2}{4} + 4} - 2)^2 = \frac{AL^2}{4} + \frac{AL^2}{9} + 4 + 4 - 4\sqrt{\frac{AL^2}{4} + 4}$$

$$x^2 + 14x - 99 = 0$$

$$\frac{D}{4} = 49 - (-99) = 148$$

$$= 148$$

$$x = -7 \pm 2\sqrt{37}$$

$$= 2\sqrt{37} - 7$$

$$\begin{array}{r} AI = 11 \\ 99 \\ 99 \\ \hline 198 \\ 2 \\ \hline 37 \\ 7 \\ \hline 148 \\ 2\sqrt{37} \end{array}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$d_1 + \beta_1 = 14$$

$$\beta_1 + \gamma_1 = 17$$

$$\gamma_1 + d_2 = 20 \quad d_1 = 20 - d_2$$

$$d_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 26$$

$a, b, c \in \mathbb{N}$

$$\gamma_1 - d_1 = 3$$

$$\gamma_1 - 20 + d_1 = 3$$

$$d_1 = 23 \quad \gamma_1 = 11,5$$

$$a = 2^{d_1} \cdot 7^{d_2} = X$$

$$b = 2^{\beta_1} \cdot 7^{\beta_2} \cdot X^y$$

$$c = 2^{\gamma_1} \cdot 7^{\gamma_2} \cdot Z$$

$$\begin{cases} ab \geq 2 \cdot 7^{14} \\ bc \geq 2 \cdot 7^{17} \\ ac \geq 2 \cdot 7^{20} \end{cases}$$

$$a = 2^{\alpha} \cdot 7^{\beta} \quad X, y, z \in \mathbb{N}; 2; 7$$

$$c = 2^{\gamma} \cdot 7^{\delta} \quad 2\alpha + 2 = 20$$

$$\begin{aligned} a + d + \beta &= 20 \\ d &= 17 \\ a &= 8,5 \end{aligned}$$

$$a \cdot b = 2^{d_1 + \beta_1} \cdot 7^{x + y} \geq 2 \cdot 7^{14}$$

$$\begin{cases} d_1 + \beta_1 \geq 14 \\ \beta_1 + \gamma_1 \geq 17 \\ d_1 + \gamma_1 \geq 20 \end{cases}$$

$$b \cdot c = 2^{\beta_1 + \gamma_1} \cdot 7^{\beta_2 + \gamma_2} \geq 2 \cdot 7^{17}$$

$$\begin{cases} d_1 - \gamma_1 \geq -3 \\ 2d_1 \geq 17 \\ d_1 \geq 8,5 \\ d_1 \geq 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta_1 + \gamma_1 \geq 17 \\ \beta_2 + \gamma_2 \geq 17 \\ \gamma_1 - \beta_1 \geq 6 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \beta_1 &\geq 5,5 \\ \beta_1 &\geq 6 \\ d_2 + \gamma_2 &\geq 3 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} d_1 + \beta_1 \geq 14 \\ d_2 + \beta_2 \geq 10 \\ \beta_1 + \gamma_1 \geq 17 \\ \beta_2 + \gamma_2 \geq 17 \\ d_1 + \gamma_1 \geq 20 \\ d_2 + \gamma_2 \geq 12 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 2d_1 + 2\beta_1 + 2\gamma_1 &\geq 57 \\ 21 + 18 &= d_1 + \beta_1 + \gamma_1 \geq 29,5 \\ &= 29 + 15 = d_1 + \beta_1 + \gamma_1 \geq 24 \cdot 26 \\ &= 54 \\ 2d_2 + 2\beta_2 + 2\gamma_2 &\geq 64 \\ &27 \\ d_2 + \beta_2 + \gamma_2 &\geq 32 \end{aligned}$$

$$abc \geq 2^{d_1 + \beta_1 + \gamma_1} \cdot 7^{d_2 + \beta_2 + \gamma_2} \cdot xyz \geq 2 \cdot 7^{14} \cdot 1$$

$$xyz \geq 1$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{a}{b}$$

- несократ. дробь

$$(a, b \in \mathbb{N})$$

$$\frac{a+b}{a^2 - 6ab + b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2 - 8ab}$$

$$\begin{array}{r} 1369 \\ - 9 \\ \hline 96 \\ - 45 \\ \hline 19 \end{array}$$

$$a^2 - 6ab + b^2 = (a+b) \cdot k$$

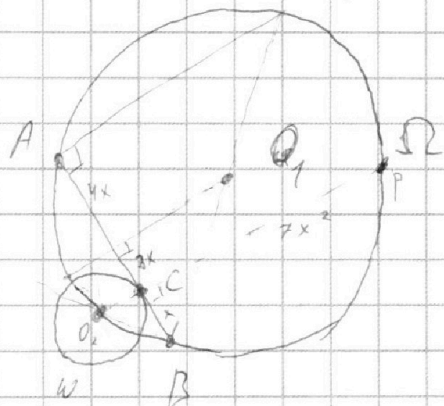
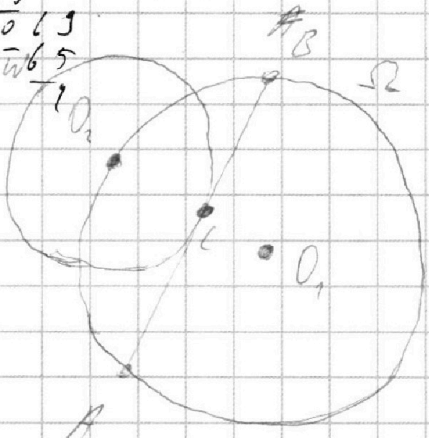
$$(a+b)^2 - 8ab - k(a+b) = 0$$

$$(a+b)(a+b-k) = 8ab$$

$$\text{НОД}(a+b, a^2 - 6ab + b^2)$$

$$\begin{array}{r} 1369 \\ - 13 \\ \hline 063 \\ - 65 \\ \hline 106 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1369 \\ - 13 \\ \hline 125 \\ - 25 \\ \hline 50 \\ - 50 \\ \hline 0 \end{array}$$



$$\frac{AC}{CB} = 7 \quad \underline{AB = 8BC}$$

$$R = 5$$

$$\begin{array}{r} 4851 \\ - 125 \\ \hline 5976 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5976 \\ - 4 \\ \hline 11 \\ - 12 \\ \hline 27 \\ - 21 \\ \hline 36 \\ - 36 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\frac{PC}{AC} = \frac{BC}{OC}$$

$$AC \cdot BC = O_2 C \cdot PC$$

$$x + 7x = O_2 C \cdot PC = PC$$

$$7x^2 = PC$$

$$x^2 + y^2 - 4 = ax - y + 10b$$

$$ax + 10b = 0$$

$$16a + 10b = 0$$

$$49x^4$$

$$49x^4 + 7 + 14x^2 = 100 - 36x^2$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№1

Получаем, что $\alpha_1 \geq 9$ $\beta_1 \geq 6 \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha_1 + \beta_1 \geq 15$. Тогда:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 \geq 15 \\ \beta_1 + \sigma_1 \geq 17 \\ \alpha_1 + \sigma_1 \geq 20 \end{cases} \Rightarrow 2\alpha_1 + 2\beta_1 + 2\sigma_1 \geq 52$$

Также имеем $\alpha_1 + \sigma_1 - \alpha_1 - \beta_1 \geq 20 - 14$

$$\sigma_1 - \beta_1 \geq 6$$

$$\sigma_1 - \beta_1 + \beta_1 + \sigma_1 \geq 6 + 17 \quad 2\sigma_1 \geq 23$$

$$\sigma_1 \geq 12 \text{ (т.к. } \sigma_1 \text{ - целое неотрицат.)}$$

Получаем: $\alpha_1 + \sigma_1 \geq 9 + 12 = 21$

$$\beta_1 + \sigma_1 \geq 6 + 12 = 18$$

В итоге:

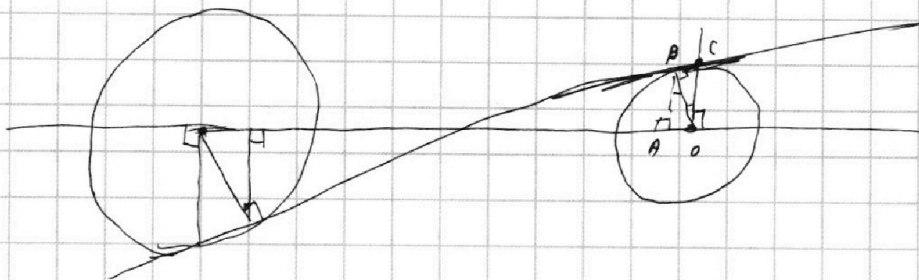
$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 \geq 15 \\ \beta_1 + \sigma_1 \geq 18 \\ \alpha_1 + \sigma_1 \geq 21 \end{cases} \Rightarrow 2\alpha_1 + 2\beta_1 + 2\sigma_1 \geq 54$$

$$\alpha_1 + \beta_1 + \sigma_1 \geq 27$$

Т.е. в abc произведение чисел 2 в степени b и c должно ≥ 27

Тогда мин. abc = $2^{27} \cdot 7^{37}$

Пример: $a = 2^9 \cdot 7^{10}$ $b = 2^6$ $c = 2^{11} \cdot 7^2$



$$\frac{AB}{OB} = \frac{OB}{CO}$$

$$CO = \frac{OB^2}{AB}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N1

$$\begin{cases} ab : 2^{14} \cdot 7^{10} \\ bc : 2^{17} \cdot 7^{17} \\ ac : 2^{20} \cdot 7^{37} \end{cases}$$

Заметим, это есть
какое-то xy число a, b или c
умноженное на простое $p \neq 2, 7$,
то можно убрать это p и

разложить на простые числа a, b, c ,
при этом на делимости xy условия это никак не
повлияет, а произведение abc увеличится \Rightarrow

\Rightarrow при минимальном abc числа a, b и c содержат
и разложимые на простые только числа 2 и 7.

Тогда: $a = 2^{\alpha_1} \cdot 7^{\alpha_2}$, $b = 2^{\beta_1} \cdot 7^{\beta_2}$, $c = 2^{\gamma_1} \cdot 7^{\gamma_2}$

$\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2$ - целые неотрицательные числа.

Тогда делимости xy условия можно записать в виде:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 \geq 14 \\ \beta_1 + \gamma_1 \geq 17 \\ \alpha_1 + \gamma_1 \geq 20 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_2 + \beta_2 \geq 10 \\ \beta_2 + \gamma_2 \geq 17 \\ \alpha_2 + \gamma_2 \geq 37 \Rightarrow \end{cases}$$

$$\alpha_1 + \beta_1 - \beta_1 - \gamma_1 \geq 14 - 17$$

$$\alpha_1 - \gamma_1 \geq -3$$

$$\alpha_1 - \gamma_1 + \alpha_1 + \gamma_1 \geq 20 - 3$$

$$2\alpha_1 \geq 17 \quad \alpha_1 \geq 9 \text{ (т.к. } \alpha_1 \text{ - целое неотрицат.)}$$

Также: $\beta_1 + \gamma_1 - \alpha_1 - \gamma_1 \geq 17 - 20$; $\beta_1 - \alpha_1 \geq -3$

$$\beta_1 - \alpha_1 + \alpha_1 + \beta_1 \geq -3 + 14 \quad 2\beta_1 \geq 11 \quad \beta_1 \geq 6 \text{ (т.к. } \beta_1 \text{ - целое неотрицательное)}$$

$\Rightarrow \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 \geq 37$, т.е.
в abc число 7 входит
в степени не меньшей 37.