



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^6 3^{13} 5^{11}$, bc делится на $2^{14} 3^{21} 5^{13}$, ac делится на $2^{16} 3^{25} 5^{28}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,4$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4(0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3} (11^{-13}) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-15;90)$, $Q(2;90)$ и $R(17;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 180, $SA = BC = 20$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 6$, а радиус сферы Ω равен 8.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} ab = 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11} \\ bc = 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13} \\ ac = 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28} \end{cases}$$

Пусть $x, y, z \in \mathbb{N}$. Тогда можно записать, что для некоторых

$$\begin{cases} ab = x \cdot 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11} \\ bc = y \cdot 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13} \\ ac = z \cdot 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28} \end{cases}$$

① перемножим три равенства: $(abc)^2 = x y z \cdot 2^{36} \cdot 3^{59} \cdot 5^{52}$

$$\Leftrightarrow abc = \sqrt{xyz} \cdot 2^{18} \cdot 3^{29} \cdot 5^{26}$$

Значит, \sqrt{xyz} — целое число. Тогда каждое из чисел x, y, z делится на 3.

② перемножим первые два и поделим на 3-е:

$$b^2 = \frac{xy}{z} \cdot 2^2 \cdot 3^8 \cdot 5^{-4}$$

$$\text{Значит, } xy = 5^{4k}$$

$$\Rightarrow abc \geq 5^2 \cdot 3^{29} \cdot 2^{18} \cdot 5^{26}$$

Т.е. $xy \geq 5^4 \cdot 3$. Проведем поиск, когда это так:

$$(x=y=5^2, z=3)$$

$$\begin{cases} ab = 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{13} \\ bc = 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{15} \\ ac = 2^{16} \cdot 3^{26} \cdot 5^{28} \end{cases}$$

$$a = 2^2 \cdot 3^9 \cdot 5^{13}$$

$$b = 2^2 \cdot 3^4$$

$$c = 2^{12} \cdot 3^{17} \cdot 5^{28}$$

$$\text{и } abc = 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$$

$$\text{Ответ: } 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x.$$

① т.к. $\forall t \in [-1; 1]$ $\arccos(t) + \arcsin(t) = \frac{\pi}{2}$, то исходное уравнение равносильно следующему:

$$10 \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin x) \right) = 9\pi - 2x \Leftrightarrow 5\pi - 10 \arcsin(\sin x) = 9\pi - 2x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -10 \arcsin(\sin x) = 4\pi - 2x \Leftrightarrow -5 \arcsin(\sin x) = 2\pi - x.$$

② т.к. $\arcsin(t)$, $\forall t \in [-1; 1]$ $\arcsin(t) \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, то

$$-5 \arcsin(t) \in \left[-\frac{5\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right].$$

Тогда $(2\pi - x)$ также должен лежать на этом промежутке:

$$-\frac{5\pi}{2} \leq 2\pi - x \leq \frac{5\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{5\pi}{2} - 2\pi \leq -x \leq \frac{5\pi}{2} - 2\pi \Leftrightarrow -\frac{9\pi}{2} \leq -x \leq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{9\pi}{2}$$

③ Разобьем решение на рассмотрение отдельных случаев, в зависимости от которых будет дано значение $\arcsin(\sin x)$.

1) $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Тогда $\arcsin(\sin x) = x$ и получаем след. равенство:

$$-5x = 2\pi - x \Leftrightarrow 4x = -2\pi \Leftrightarrow \boxed{x = -\frac{\pi}{2}} - \text{решение, т.к. } -\frac{\pi}{2} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

2) $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$. Тогда заметим, что $-\frac{3\pi}{2} \leq -x \leq -\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \pi - \frac{3\pi}{2} \leq \pi - x \leq \pi - \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} \leq \pi - x \leq \frac{\pi}{2}. \text{ Тогда заметим, } \arcsin(\sin x) = \arcsin(\sin(\pi - x)) \Leftrightarrow$$

$$= \arcsin(\sin(\pi - x)) \text{ (Здесь мы воспользовались тем, что } \sin(x) = \sin(\pi - x) \text{ для}$$

любого $x \in \mathbb{R}$). Получаем:

$$-5\pi + 5x = 2\pi - x \Leftrightarrow 6x = 7\pi \Leftrightarrow \boxed{x = \frac{7\pi}{6}} - \text{решение, т.к. } \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{6} \leq \frac{7\pi}{6} \leq \frac{9\pi}{6} = \frac{3\pi}{2}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



3) $x \in \left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2} \right]$, тогда $\frac{3\pi}{2} \leq x - 2\pi \leq \frac{5\pi}{2} - 2\pi \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} \leq x - 2\pi \leq \frac{\pi}{2}$. А т.к.

$\sin(x - 2\pi) = \sin(x)$, то $\arcsin(\sin(x)) = \arcsin(\sin(x - 2\pi)) = x - 2\pi$. Получим:

$-5x + 10\pi = 2\pi - x \Leftrightarrow 8\pi = 4x \Leftrightarrow x = 2\pi$ — решение, ведь $\frac{3\pi}{2} =$

$= 1,5\pi \leq 2\pi \leq 2,5\pi = \frac{5\pi}{2}$.

4) $x \in \left[\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2} \right]$. Опять заметим, что $\frac{5\pi}{2} - 6\pi \leq x - 3\pi \leq \frac{7\pi}{2} - 6\pi \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} \leq$

$\leq x - 3\pi \leq \frac{\pi}{2}$. Тогда $\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} \leq 3\pi - x \leq \frac{\pi}{2}$. (Тогда воспользуемся

свойствами синуса и арксинуса: $\arcsin(\sin(x - 3\pi)) = \arcsin(\sin(3\pi - x)) =$

$= \arcsin(\sin(x))$. Значит, $\arcsin(\sin(x)) = 3\pi - x$ и мы получаем:

~~$5x - 15\pi = 3\pi - 2x \Leftrightarrow 7x = 18\pi \Leftrightarrow x = \frac{18\pi}{7}$~~

$5x - 15\pi = 2\pi - x \Leftrightarrow 6x = 17\pi \Leftrightarrow x = \frac{17\pi}{6}$, т.к. $\frac{17\pi}{6} = \frac{12\pi}{6} + \frac{5\pi}{6} = 2\pi + \frac{5\pi}{6}$,

то очевидно, $\frac{5\pi}{2} = 2\pi + \frac{\pi}{2} \leq 2\pi + \frac{5\pi}{6} \leq 2\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{7\pi}{2}$ — значит, решение

5) следующий вариант? $x \in \left[\frac{3\pi}{2}; \frac{9\pi}{2} \right]$. Тогда $-\frac{\pi}{2} \leq x - 4\pi \leq \frac{\pi}{2}$ и

$\arcsin(\sin(x)) = \arcsin(\sin(x - 4\pi)) = x - 4\pi$. Получим:

или $-5x + 20\pi = 2\pi - x \Leftrightarrow 4x = 18\pi \Leftrightarrow x = \frac{9\pi}{2}$ — очевидно, решение.

Можно записать ответ:

Ответ: $x \in \left\{ -\frac{\pi}{2}; \frac{7\pi}{6}; 2\pi; \frac{17\pi}{6}; \frac{9\pi}{2} \right\}$

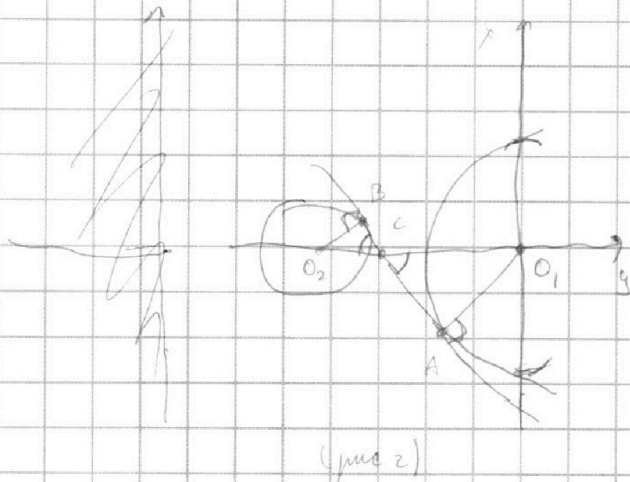
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



т.к. $\angle O_2BC = \angle O_1AC$ и $\angle O_2CB = \angle O_1CA$, то

$\angle O_2CB = \angle O_1CA$, то

$\triangle O_2BC \sim \triangle O_1AC \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{O_2C}{AC} = \frac{O_2B}{O_1A} = \frac{2}{5}$$

А т.к. $O_2C + CO_1 = O_1O_2 = 4$, то

$$O_2C = 2 \cdot \frac{4}{7} \quad \text{и} \quad O_1C = 5 \cdot \frac{4}{7}$$

Тогда $\tan k = \tan(\angle O_1CB) = -\tan(\angle O_2CB) = -\frac{O_2C}{O_1C} = -\frac{2}{5}$

B находится на T -линии: $BC^2 = O_2C^2 - O_2B^2 = 4 + 4 \cdot \frac{16}{49} =$

$$= 4 \left(\frac{81-49}{49} \right) = \frac{4}{49} \cdot 32 \Rightarrow BC = \frac{2}{7} \sqrt{32}$$

Тогда $k = -\frac{2}{\frac{2}{7} \sqrt{32}} = -\frac{7}{\sqrt{32}}$

Решить, что при $k < -\frac{7}{\sqrt{32}}$ ситуация будет ещё хуже: в т.е. касания с большей окр. стало меньше не будет иметь одного касания с меньшей. Зато $k > -\frac{7}{\sqrt{32}}$ подскажет, все ~~линии~~ касания будут пересекать меньшую окр. и касаться большей - просто будет её "примыкать", увеличив a , и будет 4 пересечения.

$$k > -\frac{7}{\sqrt{32}} \Leftrightarrow \frac{a}{5} < \frac{7}{\sqrt{32}} \Rightarrow a < \frac{35}{6.4\sqrt{2}} = \frac{35}{24\sqrt{2}}$$

3) $a < 0$. Очевидно, что ситуация аналогична, ответом будет

$$a > -\frac{35}{24\sqrt{2}}$$

Ответ: $a \in \left(-\frac{35}{24\sqrt{2}}; \frac{35}{24\sqrt{2}} \right)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

① $\log_{11}^4 x - 6 \log_{11} x = \log_{3,3} \frac{1}{12} - 5$. Преобразуем левую часть

слева: $\log_{11}^4 x - 6 \log_{11} x = \log_{11}^4(11^{-3}) - 5 = -\frac{2}{3} \log_{11} x - 5$. Вынесем
искладное множитель, перенесем всё число (всё, кроме -5):

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_{11} x + \frac{2}{3} \log_{11} x = -5 \Leftrightarrow \log_{11}^4 x - \frac{16}{3} \log_{11} x = -5$$

② Аналогично преобразуем и упростим из условия с переменной
 y , сделав замену $t = 0,5y$ (тогда $t^3 = 0,5^3 \cdot y^3 = 0,125 y^3$):

$$\log_{11}^4(t) + \log_{11} t = \log_{3,3}(11^{-13}) - 5 \Leftrightarrow \log_{11}^4(t) + \log_{11} t + \frac{13}{3} \log_{11} t = -5$$

$$\Leftrightarrow \log_{11}^4(t) + \frac{16}{3} \log_{11} t = -5$$

③ Теперь заметим, что если первое уравнение имеет
корень x_0 , то второе уравнение имеет корень $\frac{1}{x_0}$. Действительно:

Во-первых $x_0 > 0$ и $x_0 \neq 1$. Значит $\frac{1}{x_0} > 0$, $\frac{1}{x_0} \neq 1$ - второе
уравнение тоже имеет смысл. Подставим $t = \frac{1}{x_0}$:

$$\log_{11}^4\left(\frac{1}{x_0}\right) + \frac{16}{3} \log_{11}\left(\frac{1}{x_0}\right) = -5 \Leftrightarrow (-\log_{11}(x_0))^4 - \frac{16}{3} \log_{11}(x_0) = -5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_{11}^4 x_0 - \frac{16}{3} \log_{11}(x_0) = -5 \quad \text{— что верно, ввиду предполо-$$

жения, что x_0 - корень первого уравнения.

Аналогично, если второе уравнение имеет корень t_0 ,
($t_0 > 0$, $t_0 \neq 1$), то первое имеет корень $\frac{1}{t_0}$ ($\frac{1}{t_0} > 0$, $\frac{1}{t_0} \neq 1$):

$$\log_{11}^4 \frac{1}{t_0} - \frac{16}{3} \log_{11}\left(\frac{1}{t_0}\right) = -5 \Leftrightarrow \log_{11}^4 t_0 + \frac{16}{3} \log_{11}(t_0) = -5$$

что тоже верно по предположению.

Из этого всего мы заключаем, что x_0 - корень первого тогда
и только тогда, когда $\frac{1}{x_0}$ - корень второго.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

④ Стало бы замечать, что первое уравнение имеет единствен-
ный действительный корень. Видно, так как = имеет

$x = \sqrt[3]{\frac{16}{3}}$, $k \neq 0$. Тогда первое уравнение принимаем вид

$$\frac{1}{2k} + \frac{16}{3}k = -5 \Rightarrow \frac{1}{2k} = -\frac{16}{3}k - 5$$

рассмотрим $f(k) = \frac{1}{2k}$ и $g(k) = -\frac{16}{3}k - 5$. Попробуем, что

при $k > 0$ $f(k) > 0$ и $g(k) < 0$ — решений $f(k) = g(k)$ нет.

Но при $k < 0$ $f(k)$ — монотонно возрастающая функция

($f'(k) = -4 \cdot \frac{1}{2k^2} < 0$ для всех $k < 0$), а $g(k)$ — монотонно убыв.

Функция ($g(k) = -\frac{16}{3}k - 5$). Значит, если и есть пересечение, то оно
единственное.

Для доказательства существования этого пересечения, введем

$h(k) = f(k) - g(k)$. Замечая, что $h(k) \rightarrow -\infty$ при $k \rightarrow (-\infty)$

(т.к. при $k \rightarrow -\infty$ $f(k) \rightarrow 0$ и $-g(k) \rightarrow -\infty$), а при

Замечая, что $h(-3) = \frac{1}{3^2} - 16 + 5 = -11 + \frac{1}{9}$ — что меньше

0, т.к. $\frac{1}{9} < 1 < 11$. Зато при $h(-\frac{1}{2}) = 16 - \frac{2}{3} + 5 = 21 - \frac{2}{3} = \frac{65}{3} > 0$.

$f(k)$ и $g(k)$ непрерывны на интервале $(-3; -\frac{1}{2})$ — значит, и непре-

рывна $h(k) = f(k) - g(k)$. Тогда по теореме о промежуточных

значениях: $h(-3) < 0$, $h(-\frac{1}{2}) > 0 \Rightarrow \exists t \in (-3; -\frac{1}{2}) : h(t) = 0$

$\Leftrightarrow f(t) = g(t)$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Б) И так, единственность решения (а оно сформулировано)
доказана. Так как x_0 - корень первого ^{уравнения} x_0 - корень второго,
то x и y второго единственности корень.

Пусть x_0 действительное корень первого. Тогда второе
уравнение имеет корень $t = \frac{1}{x_0} \Rightarrow \frac{1}{2}y = \frac{1}{x_0} \Leftrightarrow y = \frac{2}{x_0}$

В) Таким образом x и y принимаем единственное значение

$$xy = x_0 \cdot \frac{2}{x_0} = 2$$

Ответ: $xy = 2$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

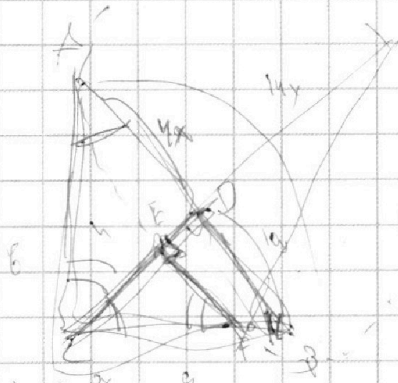


Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$abc = k \cdot 2^6 \cdot 3^1 \cdot 5^1$
 $bc = k \cdot 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{27}$
 $ac = 2^{10} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28}$

$a = 2^8 \cdot 3^8 \cdot 5^2$
 $b = 2^7 \cdot 3^6$
 $c = 2^2 \cdot 3^7 \cdot 5^3$



$10 \arcsin(-1) = 3\pi + \pi$
 $10 \arcsin(\sin(\pi/2)) = 5\pi - 2\pi$

$\frac{10\pi}{n} = \frac{a}{b} = \frac{h}{h'} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$-\frac{3\pi}{2} \leq 2\alpha \leq \pi$
 $\frac{\pi}{2} \leq 2\alpha \leq 3\pi$

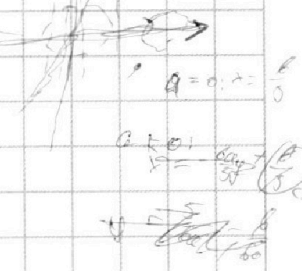
$\cos_{11}(\pi) + \cos_{11}(\pi) = \cos_{11}(11\pi) + (\cos_{11}(\pi))^2 - 5$

$\frac{2}{24} = \frac{6}{24} = -\frac{2}{3} \alpha - 5$

$\frac{1}{24} = \frac{16}{24} \alpha - 5$

$10 \arcsin(-1) = 5\pi + \pi$
 $10 \arcsin(-\frac{1}{2}) = 5\pi - \frac{3\pi}{2}$

$10 \arcsin(-\frac{1}{2}) = 5\pi - \frac{3\pi}{2}$



$\frac{1}{\beta} = \frac{3}{3} \beta - 5$
 $\frac{1}{\beta} = \beta - 5$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Handwritten mathematical solution on a grid background. The page contains several geometric diagrams, including circles, triangles, and spheres, with various points and lines labeled. The diagrams appear to be related to the geometry of a sphere or a cylinder, possibly involving tangents and normals. The text includes various mathematical expressions and calculations, such as:

- $\cos \alpha = \dots$
- $\cos \beta = \dots$
- $\cos \gamma = \dots$
- $\cos \delta = \dots$
- $\cos \epsilon = \dots$
- $\cos \zeta = \dots$
- $\cos \eta = \dots$
- $\cos \theta = \dots$
- $\cos \iota = \dots$
- $\cos \kappa = \dots$
- $\cos \lambda = \dots$
- $\cos \mu = \dots$
- $\cos \nu = \dots$
- $\cos \xi = \dots$
- $\cos \omicron = \dots$
- $\cos \pi = \dots$
- $\cos \rho = \dots$
- $\cos \sigma = \dots$
- $\cos \tau = \dots$
- $\cos \upsilon = \dots$
- $\cos \phi = \dots$
- $\cos \chi = \dots$
- $\cos \psi = \dots$
- $\cos \omega = \dots$
- $\cos \delta = \dots$
- $\cos \epsilon = \dots$
- $\cos \zeta = \dots$
- $\cos \eta = \dots$
- $\cos \theta = \dots$
- $\cos \iota = \dots$
- $\cos \kappa = \dots$
- $\cos \lambda = \dots$
- $\cos \mu = \dots$
- $\cos \nu = \dots$
- $\cos \xi = \dots$
- $\cos \omicron = \dots$
- $\cos \pi = \dots$
- $\cos \rho = \dots$
- $\cos \sigma = \dots$
- $\cos \tau = \dots$
- $\cos \upsilon = \dots$
- $\cos \phi = \dots$
- $\cos \chi = \dots$
- $\cos \psi = \dots$
- $\cos \omega = \dots$

The diagrams include a large circle with a point on its circumference, a sphere with a point on its surface, and various geometric constructions involving lines and angles. The text is written in a cursive style and includes many small annotations and corrections.