



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1) [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^6 3^{13} 5^{11}$, bc делится на $2^{14} 3^{21} 5^{13}$, ac делится на $2^{16} 3^{25} 5^{28}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,4$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .

-2
-1

3) [4 балла] Решите уравнение $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$.

4) [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5) [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4(0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3} (11^{-13}) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-15;90)$, $Q(2;90)$ и $R(17;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 180, $SA = BC = 20$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .

б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 6$, а радиус сферы Ω равен 8.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пусть $a = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\beta_1} \cdot 5^{\gamma_1}$, $b = 2^{\alpha_2} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\gamma_2}$,
 $c = \cancel{2^{\alpha_3} \cdot 3^{\beta_3}} \cdot 2^{\alpha_3} \cdot 3^{\beta_3} \cdot 5^{\gamma_3}$. П.к. все числа a, b, c ,
то другие простые множ., не входящие ни
делиться на $2^{k_1} \cdot 3^{k_2} \cdot 5^{k_3}$, в a, b, c не входят.

Пусть в задаче:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 \geq 6 \\ \alpha_2 + \alpha_3 \geq 14 \\ \alpha_1 + \alpha_3 \geq 16 \end{cases} \Rightarrow \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \geq \frac{36}{2} = 18. \text{ Пример: } \\ \alpha_1 = 4; \alpha_2 = 2; \alpha_3 = 12$$

$$\begin{cases} \beta_1 + \beta_2 \geq 13 \\ \beta_2 + \beta_3 \geq 21 \\ \beta_1 + \beta_3 \geq 25 \end{cases} \Rightarrow \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \geq \frac{59}{2} \Rightarrow \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \geq 30 \\ (\text{п.к. } \alpha_i, \beta_i, \gamma_i - \text{целые неотр.}) \\ \text{Пример: } \beta_1 = 8; \beta_2 = \frac{17}{5}; \beta_3 = \frac{17}{5}$$

П.к. $\gamma_1 + \gamma_3 \geq 28$, то $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 \geq 28$. Пример:
 $\gamma_2 = 0$;
 $\gamma_3 = 11; \gamma_3 = 17$, тогда $\gamma_1 + \gamma_2 = 11; \gamma_2 + \gamma_3 = 17; \gamma_1 + \gamma_3 = 28$.

П.к. $abc = 2^{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \cdot 3^{\beta_1 + \beta_2 + \beta_3} \cdot 5^{\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3}$, то
 $abc \geq 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$

Ответ: $2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$

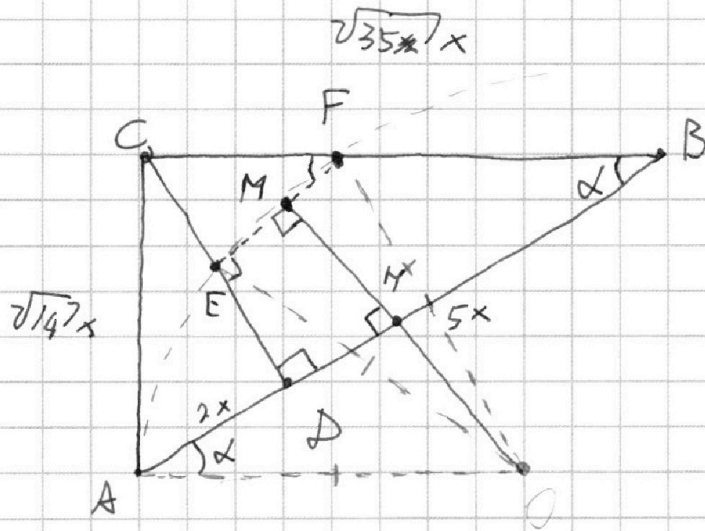
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{AB}{BD} = \frac{7}{5} \Rightarrow$$

$$\frac{AD}{BD} = \frac{2}{5} \text{ Пусть}$$

$$AD = 2x; BD = 5x$$

П.к. данная окружность как ACB , то ее центр O лежит на перпендикуляре к AC в A . П.к. E, F лежат на CB , то O лежит также на перпендикуляре к EF .

Пусть $S_{ABC} = S$. Тогда $S_{ACD} = \frac{2}{7}S$ (одна высота, ок. совм. как $\frac{2}{7}$).

$$CD = \sqrt{2x \cdot 5x} = x\sqrt{10} \text{ как высота прямоугол. } D \Rightarrow$$

$$\text{по т. Пиф. } BC = \sqrt{35}x; AC = x\sqrt{14}$$

M - середина EF , середина $MO \perp AB$ и CM

$$S_{ACD} = \frac{1}{2} \cdot CD \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot x\sqrt{10} \cdot x\sqrt{14} = \frac{x^2 \sqrt{140}}{2} = \frac{x^2 \sqrt{35 \cdot 4}}{2} = \frac{x^2 \sqrt{35} \cdot 2}{2} = x^2 \sqrt{35}$$

$$S_{ACD} = \frac{2}{7}S = \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AC = \frac{1}{7} \cdot \sqrt{35}x \cdot x\sqrt{14} = \frac{x^2 \sqrt{35 \cdot 14}}{7} = \frac{x^2 \sqrt{490}}{7} = \frac{x^2 \sqrt{35 \cdot 14}}{7} = \frac{x^2 \sqrt{35} \cdot \sqrt{14}}{7}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 \sqrt{35}}{1} = \frac{x^2 \sqrt{35} \cdot \sqrt{14}}{7} \Rightarrow \sqrt{35} = \frac{\sqrt{35} \cdot \sqrt{14}}{7} \Rightarrow 7 = \sqrt{14}$$

$$CF = \sqrt{35} \cdot xk$$

Пусть $\frac{CF}{CB} = k$. Тогда из $EF \parallel AB$: $EF = DH = 5x \cdot k$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$1) AO \text{ и } OF\text{-радиусы} \Rightarrow AO^2 = (AO - CF)^2 + AC^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 0 = -2AO \cdot CF + CF^2 + AC^2; \quad CF = \sqrt{35} \times k;$$
$$AM = AD + MD = 2x + 5 \times k = x(2 + 5k); \quad AO =$$
$$\frac{AM}{\cos \alpha} = \frac{x(2 + 5k) \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{35}}$$

$$2. \frac{x \cdot (2 + 5k) \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{35}} \cdot \sqrt{35} \times k = 35x^2 k^2 + 14x^2$$

$$2 \cdot (2 + 5k) \cdot \sqrt{2} \cdot k = 35k^2 + 14$$

$$2(14 + 35k)k = 35k^2 + 14; \quad 28k + 70k^2 = 35k^2 + 14$$

$$35k^2 + 28k - 14 = 0 \quad 5k^2 + 4k - 2 = 0$$

$$D = 16 + 40 = 66$$

$$k_1 = \frac{-4 + \sqrt{66}}{10} \quad (\text{выбираю отриц. и не беру})$$

$$S_{CDB} = \frac{5}{7} S; \quad S_{CEF} = k^2 \cdot S_{CDB} = \left(\frac{\sqrt{66} - 4}{10}\right)^2 \cdot \frac{5}{7} S$$

$$\frac{S_{CEF}}{S_{ACD}} = \frac{(\sqrt{66} - 4)^2 \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{1}{2}}{10 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{66 + 4 - 8\sqrt{66}}{4} = \frac{35 - 4\sqrt{66}}{2}$$

$$\text{Ответ: } \frac{35 - 4\sqrt{66}}{2}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

(KEZ): $\arccos(\sin x) = \frac{9\pi - 2x}{10}$. Возьмем \cos от обеих

частей: $\sin x = \cos\left(\frac{9\pi - 2x}{10}\right) \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\left(\frac{9\pi - 2x}{10}\right)$

↓

$$\begin{cases} \frac{\pi}{2} - x = \frac{9\pi - 2x}{10} + 2\pi k & \text{(I)} \\ x - \frac{\pi}{2} = \frac{9\pi - 2x}{10} + 2\pi k & \text{(II)} \end{cases}$$

П.к. $\arccos(\cdot) \in [0; \frac{\pi}{2}]$,

но $9\pi - 2x \geq 0 \Rightarrow x \leq 4,5\pi$

$9\pi - 2x \leq 10\pi \Rightarrow x \geq -\frac{\pi}{2}$

I) $5\pi - 10x = 9\pi - 2x + 20\pi k$; $x = -4\pi + 20\pi k$

$x = -\frac{\pi}{2} + \frac{5}{2}\pi k$. С учетом ОДЗ получим:

$x = -\frac{\pi}{2}$; $x = \frac{3\pi}{2}$; $x = 4,5\pi$

II) $10x - 5\pi = 9\pi - 2x + 20\pi k$; $4\pi =$

$12x = 14\pi + 20\pi k$; $x = \frac{7}{6}\pi + \frac{10}{6}\pi k$. С уч. ОДЗ:

$x = -\frac{\pi}{2}$; $x = \frac{7}{6}\pi$; $x = \frac{17}{6}\pi$; $x = \frac{27}{6}\pi = \frac{9}{2}\pi = 4,5\pi$

Ответ: $-\frac{\pi}{2}$; $\frac{7}{6}\pi$; 2π ; $\frac{17}{6}\pi$; $4,5\pi$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\angle AOC = \beta. \quad \cos \beta = \frac{AO}{OC} = \frac{5 \cdot \sqrt{2}}{45} = \frac{\sqrt{2}}{9} \Rightarrow$$

$$\sin \beta = \frac{\sqrt{81 - 49}}{9} = \frac{\sqrt{32}}{9} = \frac{4\sqrt{2}}{9}$$

Если $|\frac{5}{6a}| > \frac{4\sqrt{2}}{9}$, то $\exists b$, удовл. усл. задачи.

$$\left(\frac{5}{6a}\right)^2 > \left(\frac{4\sqrt{2}}{9}\right)^2 \quad \left(\frac{5}{6a} - \frac{4\sqrt{2}}{9}\right) \left(\frac{5}{6a} + \frac{4\sqrt{2}}{9}\right) > 0$$

$$\left(a - \frac{24\sqrt{2}}{35}\right) \left(a + \frac{24\sqrt{2}}{35}\right) > 0 \quad a^2 < \left(\frac{5 \cdot 9}{6 \cdot 4\sqrt{2}}\right)^2$$

$$\left(a - \frac{35}{24\sqrt{2}}\right) \left(a + \frac{35}{24\sqrt{2}}\right) < 0$$

$$a \in \left(-\frac{35}{24\sqrt{2}}; \frac{35}{24\sqrt{2}}\right) \quad (\text{мы считали } a \neq 0, \text{ но}$$

при $a=0$ получ. $x = \frac{6}{5}$ - ~~мы~~ верши. пр., которая
может пересекать обе окр. в двух точках.

$$\text{Ответ: } a \in \left[-\frac{35\sqrt{2}}{48}; \frac{35\sqrt{2}}{48}\right)$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

МФТИ

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Вспомогательная система уравнений равновесия сов-сим:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 25 = 0 \\ x^2 + y^2 + 18y + 27 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 5^2 \\ x^2 + (y+9)^2 = 2^2 \end{cases} \text{ - ик}$$

уравнения - окр. радиусами 5 и 2 с центрами в $(0,0)$ и $(0,-9)$ соотв. График $5x + 6ay - 6 = 0$ - прямая, при $a \neq 0$ имеет вид: $y = \frac{6}{a} - \frac{5}{6}x$

Понятно, что при $a \rightarrow 0$ прямая

спускается к вертикали и становится перпендикулярной

к радиусам, а при $a \rightarrow \infty$ (уравнение почти вер. прямая) - система имеет ≤ 2 общ. точек.

Тр. сит. Трапециoidal случай -

- общая внешн. кас. Найдем её наклон: A, B - точки кас. C

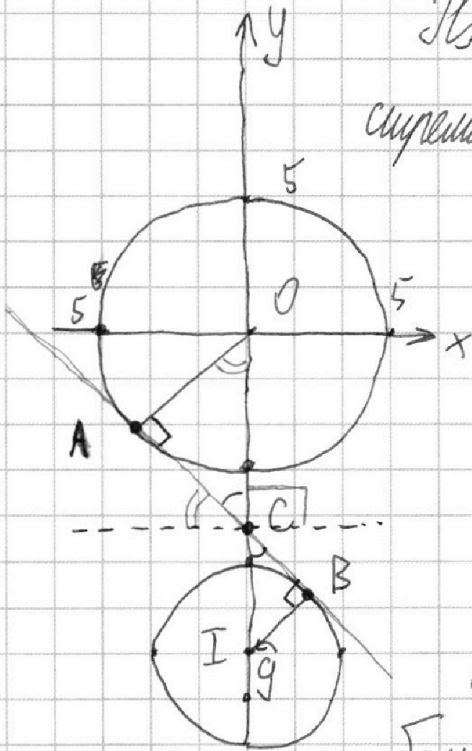
ее наклон: A, B - точки кас. C

большой и меньшей окр., C - пересек. с

осью y; O и I - центры большой и меньшей окр.

$$OI = 9. \triangle OAC \sim \triangle IBC \Rightarrow \frac{OC}{CI} = \frac{OA}{IB} = \frac{5}{2} \Rightarrow OC = \frac{5}{2} CI$$

$$OC + CI = \frac{7}{2} CI = 9 \Rightarrow CI = \frac{18}{7}, OC = \frac{45}{7}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пусть $\log_{11} x = t$; $\log_{11}(0,5y) = u$; $t \neq 0$; $u \neq 0$

$$\log_{11} \frac{1}{3|2|} = -2 \log_{11} 3|1| = -\frac{2}{3} \log_{11} 11 = -\frac{2}{3} \frac{1}{\log_{11} x} = -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{t}$$

$$\log_{0,125} y^3 (11^{-13}) = -13 \cdot \log_{0,5} (11)^3 = -\frac{13}{3} \frac{1}{u}$$

Тогда мы имеем:

$$t - \frac{6}{t} = -\frac{2}{3}t - 5 \Rightarrow t^5 - 16 + 5t = 0 \quad t^5 + 5t - \frac{16}{3} = 0$$

$$u^4 + \frac{1}{u} = -\frac{13}{3u} - 5 \Rightarrow u^5 + 5u + \frac{16}{3} = 0$$

$$\begin{cases} t^5 + 5t - \frac{16}{3} = 0 \\ u^5 + 5u + \frac{16}{3} = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Заметим, что если } t, -\text{решение,} \\ \text{то } u = -t, -\text{также решение} \end{array}$$

Заметим, что $f(t) = t^5 + 5t - \frac{16}{3}$ строго возрастает
по t ($f'(t) = 5t^4 + 5 > 0 \forall t \in \mathbb{R}$); $f(0) \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f(t)$ имеет только одно решение $t = \frac{16}{3}$ и имеет одно решение.

От $0 \Rightarrow u^5 + 5u + \frac{16}{3}$ имеет одно решение $u = -\frac{16}{3}$.

$$\Rightarrow u + t = 0 \quad \log_{11} x + \log_{11} 0,5y = 0; \log_{11}(0,5xy) = 0$$

$$\Rightarrow 0,5xy = 1 \Rightarrow xy = 2$$

Ответ: $xy = 2$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Посмотрим, какие значения принимает $\arccos(\sin x)$
при углах x из различных четв.: (часть $2\pi k$, $6x$ шир.)
 $k \in \mathbb{Z}$

I) $\frac{\pi}{2} - x$

II) $\pi - x$ - угол I четв.; $\sin(\pi - x) = \sin x \Rightarrow$

$\Rightarrow \arccos(\sin x) = \frac{\pi}{2} - \pi + x = x - \frac{\pi}{2}$

III) $x - \pi$ - угол I четв., $\sin(x - \pi) = -\sin x \Rightarrow$

$\Rightarrow \arccos(-\sin x) = \frac{\pi}{2} - x + \pi = \frac{3\pi}{2} - x \Rightarrow \arccos(\sin x) =$
 $= \pi - \frac{3\pi}{2} + x = x - \frac{\pi}{2}$

IV) $x - \pi$ - угол второй четв., $\sin(x - \pi) = \sin(x) \cdot (-1) \Rightarrow$

$\Rightarrow \arccos(-\sin x) = x - \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \arccos(\sin x) = \pi - x + \frac{3\pi}{2} =$
 $= \frac{5\pi}{2} - x.$

1) Пусть x - угол первой четв.: $10(\frac{\pi}{2} - x) = 9\pi - 2x;$

$5\pi - 10x = 9\pi - 2x \Rightarrow 8x = -4\pi \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2}$ - не в I четв.

2) x - угол II четв.: $10(x - \frac{\pi}{2}) = 9\pi - 2x;$ $10x - 5\pi = 9\pi - 2x$

$* 12x = 14\pi; x = \frac{7\pi}{6}$ - не в II четв.

3) x - III четв.: из 2) $x = \frac{7\pi}{6}$ - не подходит

4) x - IV четв.: $25\pi - 10x = 9\pi - 2x \Rightarrow x = 2\pi$ - не подходит

Ответ: $-\frac{\pi}{2}; 2\pi$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$x^2 + y^2 = 25$$

$$x^2 + y^2 = 25$$

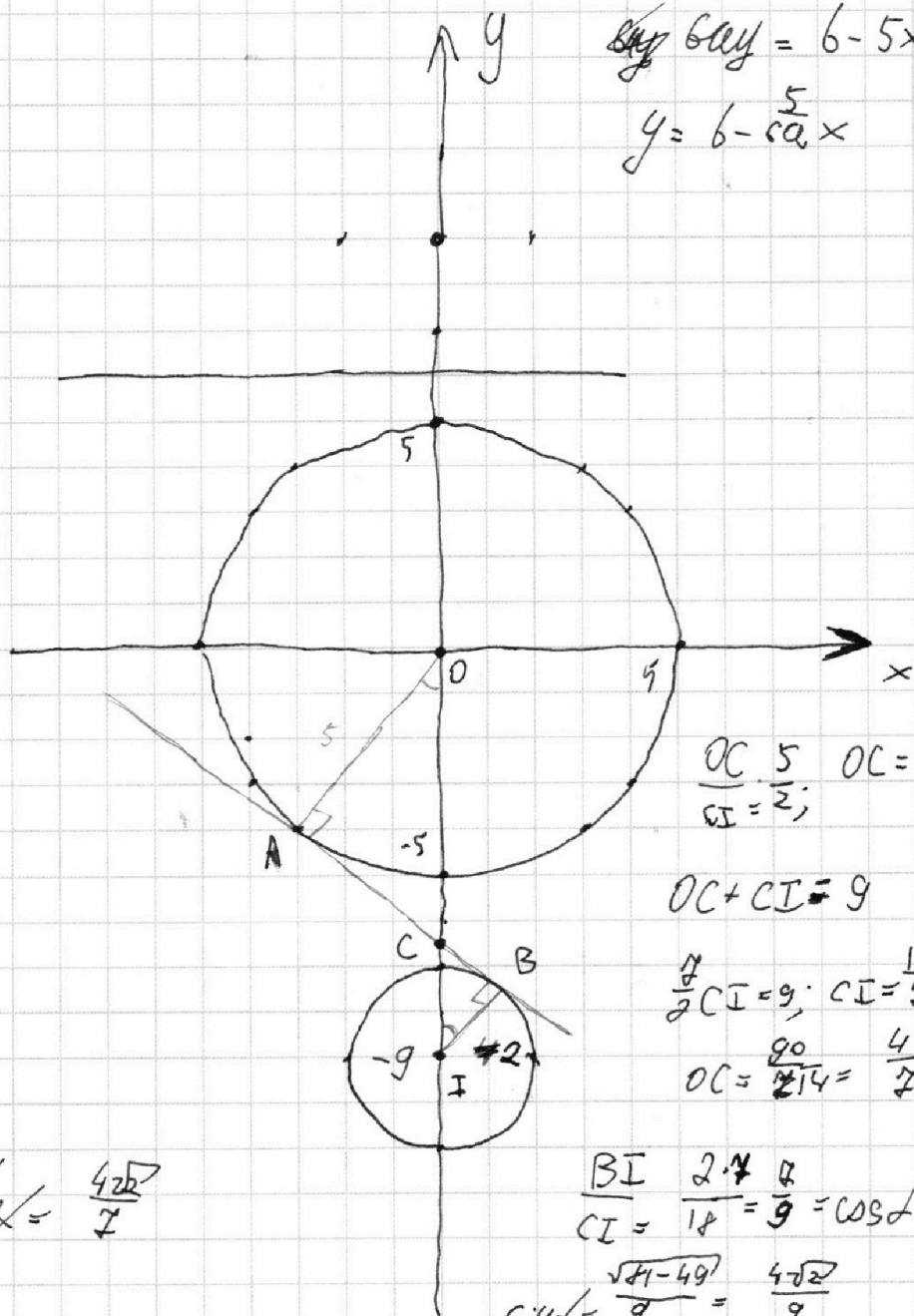
$$x^2 + y^2 + 18y + 81 + 7z - 81 = 0$$

$$x^2 + (y+9)^2 = 4$$

$$5x + 6ay - 6 = 0$$

$$6ay = 6 - 5x$$

$$y = 6 - \frac{5}{6}x$$



$$\frac{OC}{CI} = \frac{5}{2}; \quad OC = \frac{5}{2}CI$$

$$OC + CI = 9$$

$$\frac{5}{2}CI = 9; \quad CI = \frac{18}{7}$$

$$OC = \frac{90}{14} = \frac{45}{7}$$

$$\frac{BI}{CI} = \frac{2 \cdot 2}{18} = \frac{4}{9} = \cos \alpha$$

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{41-49}}{9} = \frac{4\sqrt{2}}{9}$$

$$\sin \alpha = \frac{4\sqrt{2}}{9}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
 Отметьте крестиком номер задачи,
 решение которой представлено на странице:

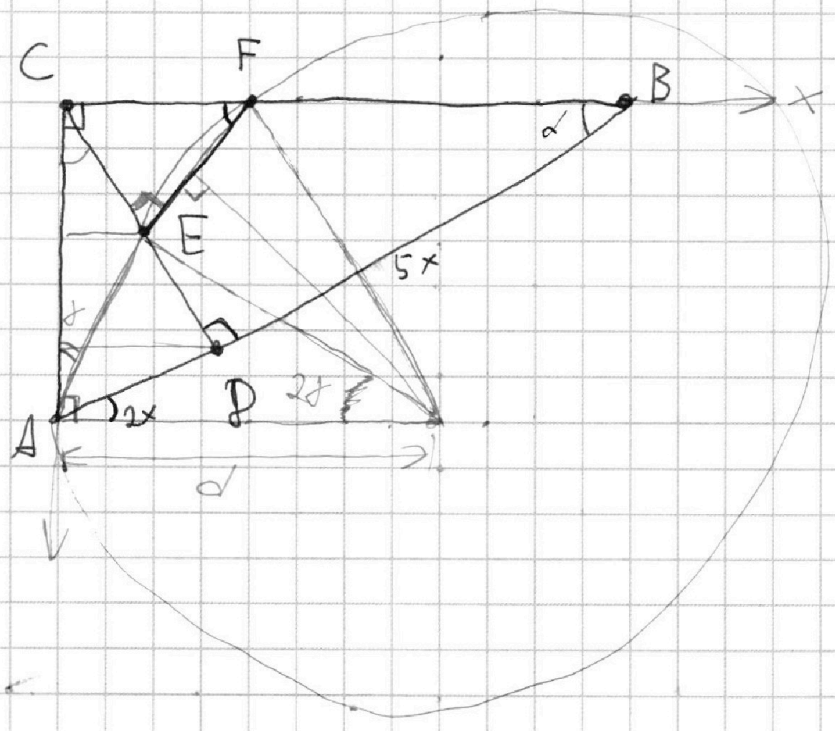
- 1
- 2
- 3
- 4
- 5
- 6
- 7



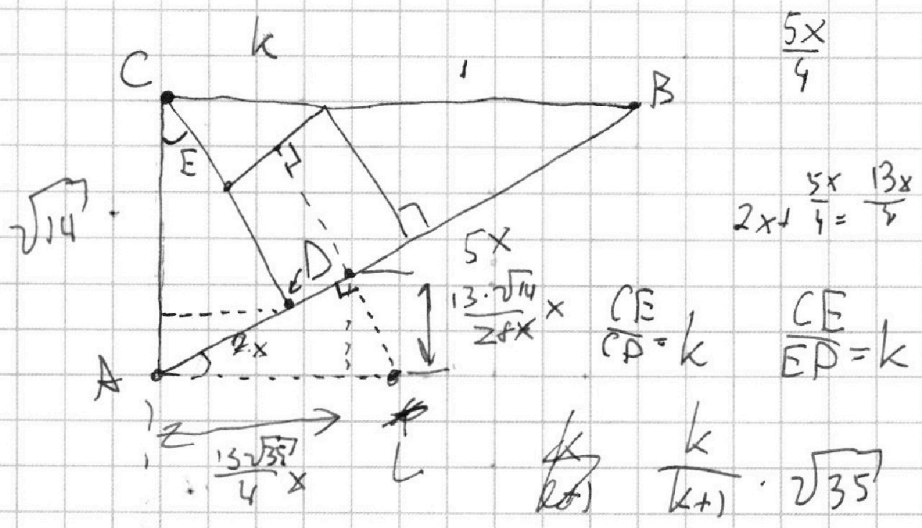
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
 страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{S_{ACD}}{S_{CEBF}}$$

$$\frac{AB}{BD} = \frac{7}{5} \Rightarrow \frac{AD}{DB} = \frac{2}{5}$$



E:
 d =



$$49 - 35$$

$$\frac{k}{k+1} \cdot \sqrt{35}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$3u^5 + 15u + \frac{16}{3} = 0$$

$$3u^5 + 15u + 16 = 0$$

$$3u^5 + 15u - 15 = 0$$

$$\log_{11} x = \log_{11} 0,5y$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\left(\frac{\pi - 2x}{10}\right)$$

$$2x + \frac{5}{4}x = \frac{4+5}{7}x = \pi$$

$$CD = x\sqrt{10}$$

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{10}}{5} = \frac{13}{4}x$$

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{35}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{14}}{7}$$

$$\frac{\sqrt{14}}{\sqrt{35}} = \frac{\sqrt{10}}{5}$$

$$\cos \alpha = \frac{5}{\sqrt{35}} = \frac{\sqrt{35} \cdot 5}{7 \cdot 5} = \frac{\sqrt{35}}{7}$$

$$\frac{13}{4}x \cdot \frac{\sqrt{14}}{7} = \frac{\sqrt{14} \cdot 13}{28}x$$

$$\frac{13}{4} \cdot \frac{\sqrt{35}}{x} = \frac{13 \cdot \sqrt{35}}{4}x$$

$$AL = \frac{13 \cdot \sqrt{7}}{4\sqrt{35}}$$

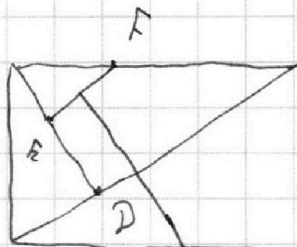
$$CK = \frac{k}{k+1} \cdot \sqrt{35}x$$

$$\left(\frac{13 \cdot \sqrt{7}}{4\sqrt{35}}x - k \cdot \sqrt{35}x\right)^2 + 14x^2 = \left(\frac{13 \cdot \sqrt{7}}{4\sqrt{35}}\right)^2$$

$$-2k \cdot \sqrt{35} \cdot \frac{13 \cdot \sqrt{7}}{4\sqrt{35}}x^2 + 14x^2 = 0$$

$$AH = 2x + 5x \cdot k = x(2 + 5k)$$

$$AO = \frac{AH}{\cos \alpha} = \frac{x(2 + 5k) \cdot 7}{\sqrt{35}}$$



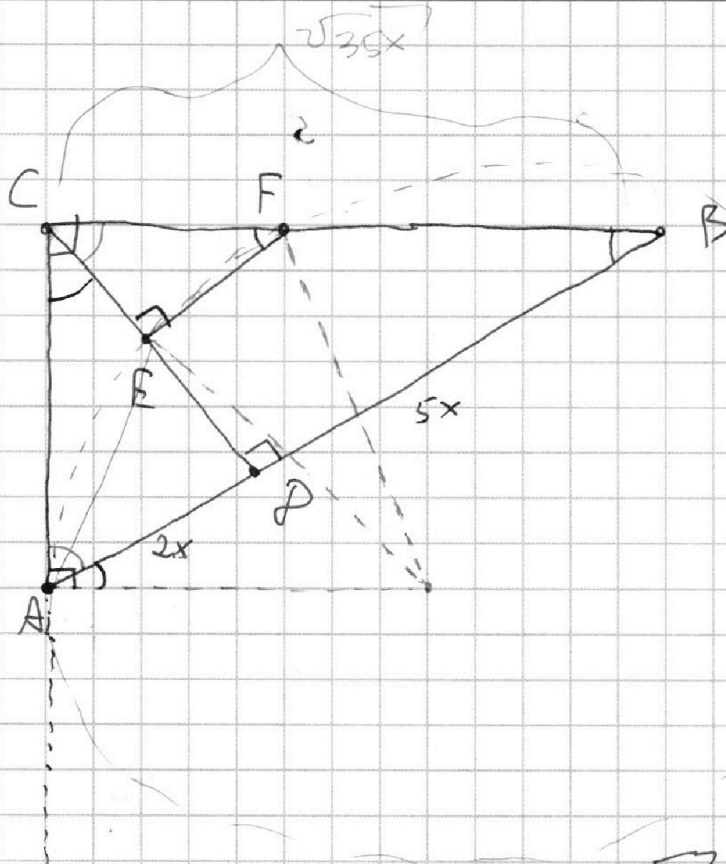
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$CD = 10x \quad CD = x\sqrt{10} \quad \frac{\sqrt{10}}{5} = \frac{25 + 0 = 38}{5} =$$

$$\sin \alpha = \frac{2x}{x\sqrt{10}} = \frac{2\sqrt{10}}{\sqrt{10}} = 2 = 5$$

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{35}} = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{7}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{7}} = \frac{2}{\sqrt{7}}$$

$$\cos \alpha = \frac{5}{\sqrt{35}} = \frac{5\sqrt{35}}{35} = \frac{\sqrt{35}}{7}$$

$$\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{35}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{14}}{7}$$

$$\frac{\sqrt{14}}{\sqrt{35}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{10}}{5}$$

$$BC = \sqrt{35}x$$

$$\cos \frac{5}{\sqrt{35}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{35}}{7}$$

$$CD = x\sqrt{10}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$a = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\beta_1} \cdot 5^{\gamma_1}$$

$$b = 2^{\alpha_2} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\gamma_2}$$

$$c = 2^{\alpha_3} \cdot 3^{\beta_3} \cdot 5^{\gamma_3}$$

$$2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \geq 36$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \geq 18$$

$$2(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) \geq 59$$

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \geq 30$$

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 \geq 28$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \geq 18$$

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \geq 30$$

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 \geq 28$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_1 + \gamma_2 \geq 11 \\ \gamma_2 + \gamma_3 \geq 13 \\ \gamma_1 + \gamma_3 \geq 28 \end{array} \right.$$

$$\frac{\pi}{2} - x = \frac{9\sqrt{6} - 2x}{10}$$

$$5\sqrt{6} - 10x = 9\sqrt{6} - 2x$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 + \alpha_2 \geq 6 \\ \beta_1 + \beta_2 \geq 13 \\ \gamma_1 + \gamma_2 \geq 11 \\ \alpha_2 + \alpha_3 \geq 14 \\ \beta_2 + \beta_3 \geq 21 \\ \gamma_2 + \gamma_3 \geq 13 \\ \alpha_1 + \alpha_3 \geq 16 \\ \beta_1 + \beta_3 \geq 25 \\ \gamma_1 + \gamma_2 \geq 28 \end{array} \right.$$

$$\frac{-\sqrt{6}}{2}$$

$$2\sqrt{6}$$

$$8 \ 5 \ 12$$

$$8 \ 5 \ 16$$

$$8 \ 3 \ 16$$

$$\sin x = \cos \frac{9\sqrt{6} - 2x}{10}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos \frac{9\sqrt{6} - 2x}{10}$$

$$\frac{\pi}{2} + x = \frac{9\sqrt{6} - 2x}{10}$$

$$x - \frac{\pi}{2} = \frac{9\sqrt{6} - 2x}{10}$$

$$\frac{\pi}{6\sqrt{6}}$$

$$-\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3\sqrt{6}}$$

$$\frac{\pi}{6} - \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$$

$$25$$

$$+ \frac{21}{13}$$

$$\frac{59}{59}$$

$$11$$

$$+ 13$$

$$\frac{28}{52}$$

$$\alpha: 4 \ 2 \ 12$$

$$\beta: 8 \ 5 \ 14$$

$$\gamma: 9\sqrt{6} - \frac{2}{3}\sqrt{6} = \frac{28}{3}\sqrt{6}$$

$$\gamma_1 = 11 \quad x = \frac{\pi}{6\sqrt{6}}$$

$$\gamma_3 = 12$$

$$12x = 14\sqrt{6}$$

$$5\sqrt{6} + 10x = 9\sqrt{6} - 2x$$

$$12x = 4\sqrt{6}; \quad x = \frac{\pi}{3}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

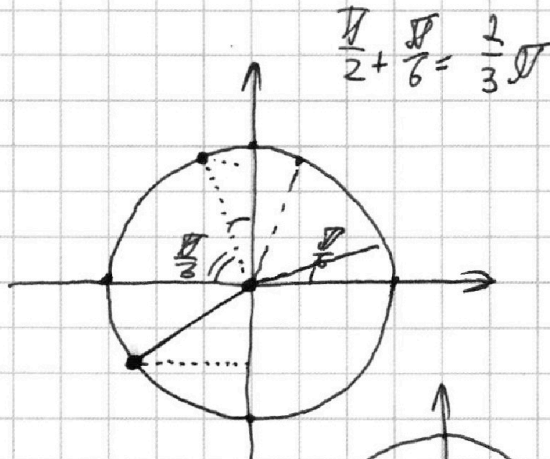
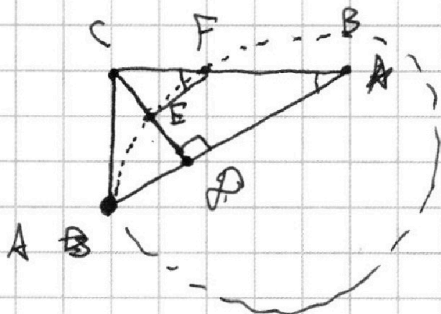
1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



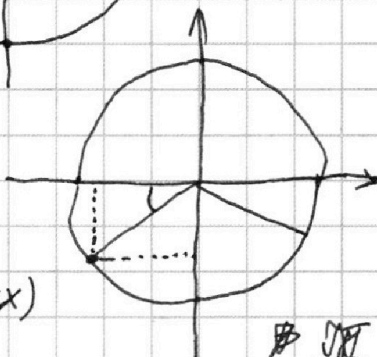
сд.



- I: $2-x$
- II: $x - \frac{\sqrt{2}}{2}$
- III: $x - \frac{\sqrt{2}}{2}$
- IV: $\frac{5\sqrt{2}}{2} - x - \frac{3\sqrt{2}}{2}$

$$\frac{\sqrt{2}\sqrt{2}}{6 - \sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2} - 3\sqrt{2}}{6 - \sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{6 - \sqrt{2}}$$

$\arccos(\sin x)$



$$x - \sqrt{2} \quad \frac{\sqrt{2}}{2} - x = \frac{3\sqrt{2}}{2} - x \quad x - \sqrt{2}$$

$$\sqrt{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2} + x = x - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

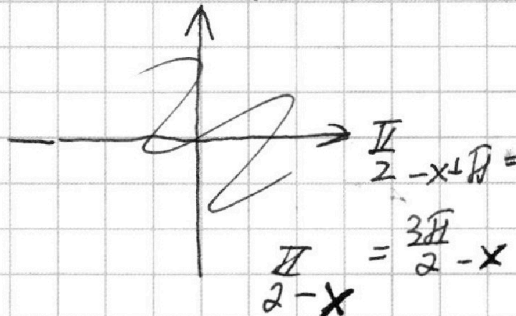
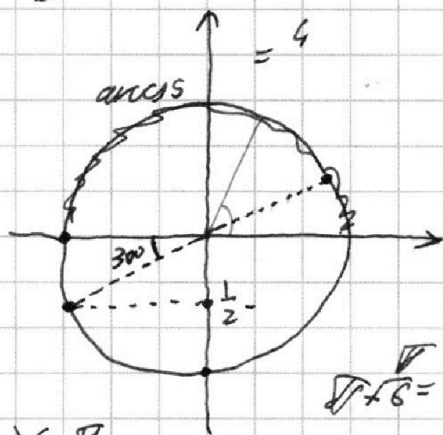
$$\frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2} + x = x - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sqrt{2} - x + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{7\sqrt{2}}{6} = \frac{3\sqrt{2}}{2} - x$$

$$10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x = \frac{9\sqrt{2}\sqrt{2}}{6} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{11\sqrt{2}}{6} - \frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{5\sqrt{2}}{6} \quad \frac{5\sqrt{2}}{2} - \frac{11\sqrt{2}}{6} = \frac{11\sqrt{2}}{6}$$

$$\sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - x\right) = 1 - \cos x$$



$$x - \sqrt{2}$$

$$x - \sqrt{2}$$

$$x -$$

$$\sqrt{2} + \sqrt{2} = \frac{2\sqrt{2}}{6}$$

$$x - \sqrt{2} \quad \frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{7\sqrt{2}}{6} = \frac{9\sqrt{2}}{6} = \frac{3}{2}$$

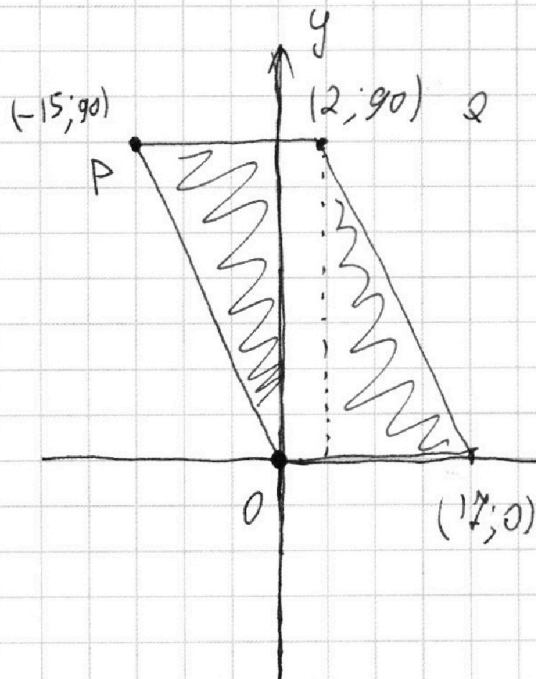
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$6(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 48$$

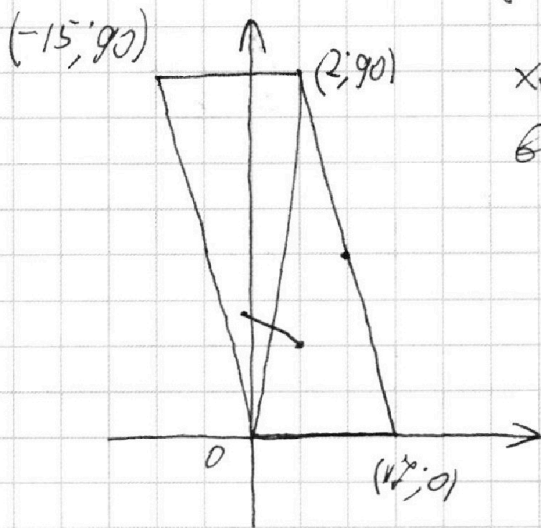
$$1) x_2 = x_1 :$$

$$y_2 - y_1 = 48$$

18:4 ~~12k=4k~~
~~15:8~~ ~~12k=4k~~

17:0	13:16	10:36
	12:20	7:40
16:4	11:324	68:44
15:8	10:28	52:48
14:12	9:32	48:52
	8	35:56
		25:60

$$x_2 - x_1 + y_2 - y_1 = C$$



$$x_1 - x_2 = 1$$

~~6 + x~~

$$y_2 - y_1 = 6$$

$$x_1 = y$$

$$(x+1; y+44)$$

$$y = 45x$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_{411}^4 x - 6 \log_x^{11} = - \log_x^3 11^2 - 5$$

$$\log_x^3 11^2 = \frac{2}{3} \log_x 11 \cdot \frac{14}{3}$$

$$\cancel{t^4 - 6t} = -\frac{2}{3}t - 5 \quad \cancel{t^4 - \frac{16}{3}t + 5 = 0}$$

$$\log_{411}(0,54) + \cancel{t^4 - \frac{6}{t}} = -\frac{2}{3}t - 5$$
$$t^4 - \frac{6}{t} + \frac{2}{3}t + 5 = 0$$

$$\log_{11}^4(0,54) + \frac{1}{\log_{11} 0,54} =$$

$$\log_x^3 \frac{1}{121} = -2 \log_x^3 11 = -\frac{2}{3} \log_x 11 = -\frac{2}{3} \log_{11} x$$

$$\log_{0,1254}^3(11^{-13}) = -13 \cdot \log_{0,54}^3(11) =$$

$$= -\frac{13}{3} \log_{0,54} 11^5 - \frac{13}{3} \frac{1}{\log_{11} 0,54} \quad 6 - \frac{2}{3} = \frac{4-2}{3} = \frac{10}{3}$$

$$t^4 - \frac{6}{t} = -\frac{2}{3}t - 5 \quad t^4 - \frac{16}{3t} + 5 = 0$$

$$t^4 + \frac{1}{t} + \frac{13}{3} \frac{1}{t} = -5 = t^4 - \frac{16}{3t}$$

$$t^4 + \frac{1}{t} \Rightarrow \frac{16}{3} \cdot \frac{1}{t} = t^4 - \frac{16}{3t}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{16}{3} \left(\frac{1}{4+t} + \frac{1}{4-t} \right) = \sqrt[4]{4} - u^4 \Rightarrow u+t=0$$

$$\frac{16}{3} \left(\frac{u+t}{u^4} \right) = (\sqrt[4]{4} - u^4) (\sqrt[4]{4} + u^4) = (4 - u^4)(4 + u^4)$$

$$\sqrt[4]{4} - \frac{16}{3t} + 5 = 0$$

$$u^4 + \frac{16}{3u} - 5 = 0$$

$$u^4 + \frac{16}{3u} + 5 = 0$$

$$\sqrt[4]{5} - \frac{16}{3} + 5t = 0$$

~~3t^5 = 22~~

$$3t^5 + 15t - 16 = 0$$

(1; 2)

$$3t^5 + 15t - 16 = 0$$

$$u^5 + \frac{16}{3} + 5u = 0$$

$$3t^5 + 30t^5 + 15u + 15t = 0$$

$$3u^5 + 15u + \frac{16}{3} = 0$$

$$t+u = \log_{11}(0,5(xy)) =$$

$$= \log_{11} xy + \log_{11} 0,5 =$$

$$= \log_{11} xy - \log_{11} 2$$

$$\sqrt[4]{4} - \frac{6}{t} = -\frac{2}{3} \frac{1}{t} - 5$$

$$\sqrt[4]{4} - \frac{16}{3t} - 5 = 0$$

$$\sqrt[4]{5} - 5t - \frac{16}{3} = 0$$

$$6 - \frac{3}{t} = \frac{16}{3}$$

$$3u^5 + 15u + 3\sqrt[4]{5} + 15t = 0$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) =$$

$$= a^3 - a^2b + ab^2 + b^3 - b^2a + ab^2$$

$$3(u+t)(u^4 + u^3t + u^2t^2 + ut^3 + t^4)$$

$$u^5 - u^4t + u^3t^2 - u^2t^3 + ut^4 + u^4t - u^3t^2 + u^2t^3 - ut^4 + t^5$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

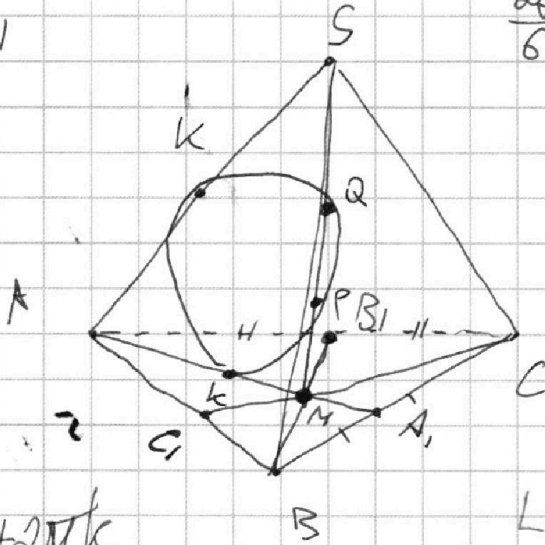


$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 9 \cos\left(\frac{9\pi - 2x}{10}\right)$$

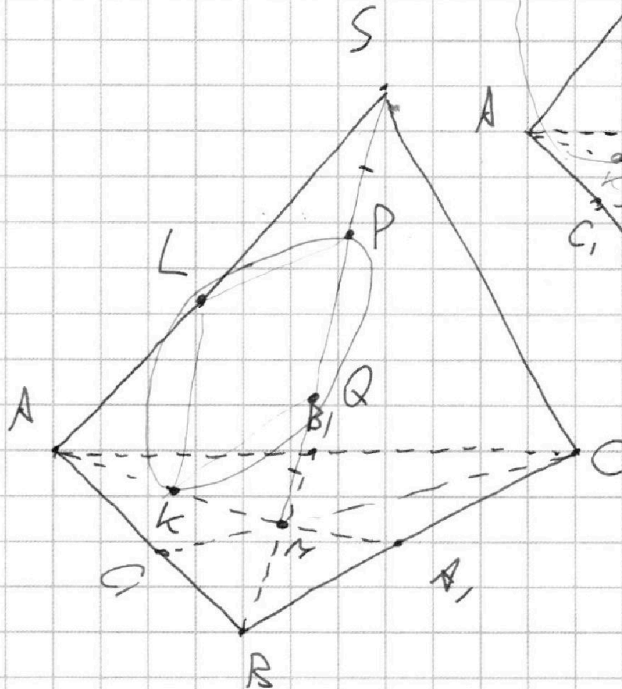
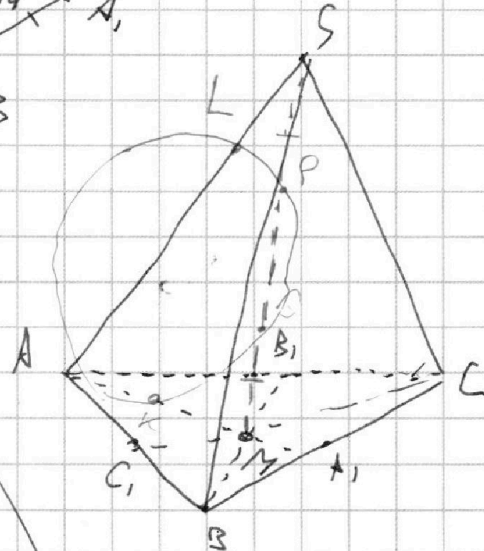
$$-1 = \frac{24}{6} = \frac{9}{2}$$

~~10π~~

$$\frac{5\pi}{2}$$



$$\frac{\pi}{2} - x = \frac{9\pi - 2x}{10} + 2\pi k$$



$$\frac{10}{3} = \frac{5}{2}$$

$$\frac{20}{12} = \frac{5}{3}$$