



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-13; 26)$, $Q(3; 26)$ и $R(16; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Введем обозначения: $\text{ord}_n a = k \Leftrightarrow \begin{cases} a : n^k \\ a \not: n^{k+1} \end{cases}$

Пусть $x_2 = \text{ord}_2 a$; $x_7 = \text{ord}_7 a$; $y_2 = \text{ord}_2 b$;
 $y_7 = \text{ord}_7 b$; $z_2 = \text{ord}_2 c$; $z_7 = \text{ord}_7 c$.

Из условий получаем 2 системы:

$$\begin{cases} x_2 + y_2 \geq 15 \\ y_2 + z_2 \geq 17 \Rightarrow 2(x_2 + y_2 + z_2) \geq 55 \Rightarrow x_2 + y_2 + z_2 \geq 28 \\ x_2 + z_2 \geq 23 \end{cases} \quad (\text{т.к. } x_2 + y_2 + z_2 \in \mathbb{N})$$

$$\begin{cases} x_7 + y_7 \geq 11 \\ y_7 + z_7 \geq 18 \Rightarrow 2(x_7 + y_7 + z_7) \geq 68 \Rightarrow x_7 + y_7 + z_7 \geq 34 \\ x_7 + z_7 \geq 39 \end{cases} \quad \geq 34$$

$$\begin{cases} x_7 + y_7 + z_7 \geq 34 \\ x_2 + y_2 + z_2 \geq 28 \end{cases} \Rightarrow abc \geq 2^{28} \cdot 7^{34}$$

Ответ: $2^{28} \cdot 7^{34}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Обозначим $\text{НОД}(a; b) = (a; b)$.

Дробь $\frac{a}{b}$ несократима $\Leftrightarrow (a; b) = 1$ (1)

Если m - наибольшее число, на которое можно со-

кратить дробь $\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$, то $(a+b; a^2-7ab+b^2) = m$.

Т.к. $(a; b) \neq (x; y) = (x-y; y)$, то $(a+b; a^2-7ab+b^2) = (a+b; (a+b)^2-9ab) = (a+b; -9ab)$.

Предположим, что существует простое p : $\left. \begin{array}{l} p|ab \\ p|(a+b) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} p|a \\ p|b \end{array} \right. \Rightarrow (a; b) \geq p$, что про-

тиборазит (1), поэтому $(a+b; -9ab) \leq 9$ и равенство достигается, если выбрать значения простых чисел a и b таких, что $a+b \equiv 9$ (на-
пример $a=4; b=5$).

Ответ: при $m=9$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{3x^2-6x+2} - \sqrt{3x^2+3x+1} = 1-9x$$

ООЗ:

Далее запишем обе части ур-я на

$$\left\{ \begin{aligned} 3x^2-6x+2 > 0 \\ 3x^2+3x+1 > 0 \end{aligned} \right.$$

$$\sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1} > 0$$

$$3x^2-6x+2 > 0$$

$$3x^2+3x+1 > 0$$

$$3x^2-6x+2 - 3x^2-3x-1 = (1-9x)(\sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1})$$

$$3x^2-6x+2 > 0$$

найдем корни ф.:

$$\frac{D}{4} = 3$$

$$x_{1/2} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{3}$$

$$(1-9x) = (1-9x)(\sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1})$$

$$x \in (-\infty; \frac{3-\sqrt{3}}{3}] \cup [\frac{3+\sqrt{3}}{3}; +\infty)$$

$$(1-9x)(\sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1} - 1) = 0$$

$$x \in [-\infty; \frac{3-\sqrt{3}}{3}] \cup [\frac{3+\sqrt{3}}{3}; +\infty)$$

$$x = \frac{1}{9} \text{ (проверяем ООЗ.)}$$

$$3x^2+3x+1 > 0$$

$$\sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1} = 1 \quad (2)$$

Найдём вершины параболы $x_0 = -$

$$\sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1} = 1$$

$$\left(\sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1} \right)^2 = 1$$

$$D = 9-12 < 0 \Rightarrow \Rightarrow 3x^2+3x+1 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$$

$$6x^2-3x+3+a=1, \text{ где } a=2\sqrt{3x^2-6x+2}\sqrt{3x^2+3x+1}$$

Найдём минимум $f(x) = 6x^2-3x+3$.

$$x_0 = \frac{1}{4}; y_0 = \min f(x) = f(x_0) = \frac{6}{16} - \frac{3}{4} + 3 = 3 - \frac{3}{8} > 1$$

≥ 1 .
 $6x^2-3x+3+a > 1$, поэтому ур-е (2) не имеет решений.

Ответ: $\frac{1}{9}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$2x_2 - 2x_1 + g_2 - g_1 = 14;$$

$$\text{Замени } \begin{cases} u = x_2 - x_1 \\ v = g_2 - g_1 \end{cases}$$

$$2u + v = 14; \begin{cases} 2u : 2 \\ 2u + v : 2 \end{cases} \Rightarrow v : 2 \Rightarrow v = 2k; k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} v = 2k \\ 2u + 2k = 14; \end{cases}$$

$$\begin{cases} v = 2k \\ u = 7 - k \end{cases}$$

$$\begin{cases} g_2 - g_1 = 2k \\ x_2 - x_1 = 7 - k \end{cases}, k \in \mathbb{Z}, k \leq 13 \quad (1)$$

Востроим параллелограмм $OPQR$ по правилу
уравновешивания A, B, R ; $A_1(-13; 0)$, $B_1(16; 26)$.

Найдем в нем пар-во точек $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$,
удовлетворяющих системе (1) и вытекает
того пар-во пар точек, в которых пара A, B
содержится в 1 из тр-ков $\triangle PA_1O$ или $\triangle RB_1Q$.
Каждое из них выбрать отдельно точки
в A_1, B_1, R так, чтобы они их ординаты от-
личались на $2k$ равняется $\lfloor \frac{26}{2k} \rfloor = \lfloor \frac{13}{k} \rfloor$ но, а

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~Каждый способ выбрать абсциссы, отстоя-
ющую на $7-k$ равняется $29-30-(7-k, 1)=23k$.~~

~~По проблеме произведения получаем, что всего та-
ким образом в A, B, R можно выбрать~~

$$\sum_{n=1}^{13} \left[\frac{13}{n} \right] (23+n)$$

Каждый способ выбрать ординаты рав-
няется $\frac{C_{27}^2}{2}$, а абсциссу $7 \cdot 14 - (1+2+\dots+13) =$

$$= 7 \cdot 14 - \frac{1+13}{2} \cdot 13 = 7$$

Всего $\frac{7 C_{27}^2}{2}$ способов. При этом каждая
точка TP -ков будет брать в какой-либо
паре, всего их $13 \cdot 26$, причем каждая точка
попадет в оба в 28 парам, всего получаем $14 \cdot 13 \cdot 26$
способов. Тогда всего таких точек в парам
параллельно $\frac{7 C_{27}^2}{2} - 14 \cdot 13 \cdot 26$

Ответ: $\frac{7 C_{27}^2}{2} - 14 \cdot 13 \cdot 26$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

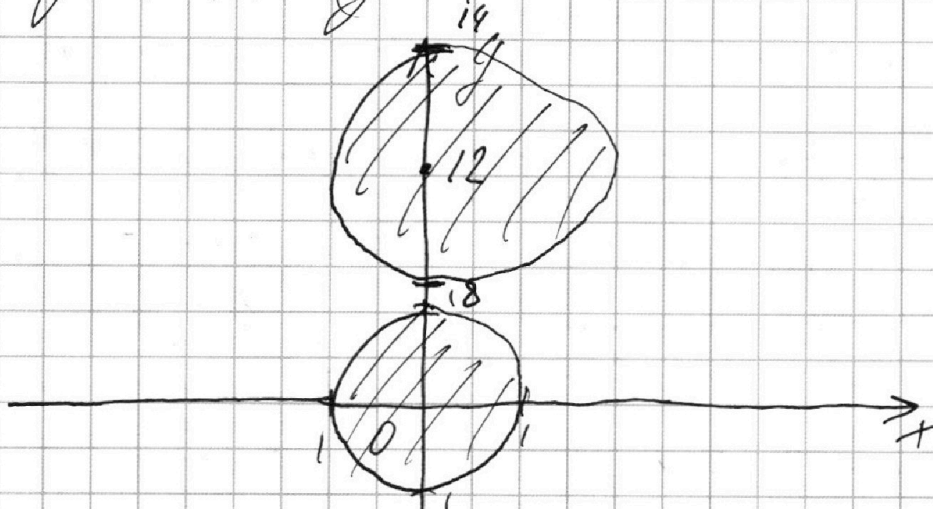
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} ax + y - 86 = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

Упр-е $x^2 + y^2 - 1 = 0$ задает окружность с центром $(0; 0)$ и радиусом 1. Упр-е $x^2 + (y - 12)^2 - 16 = 0$ задает окружность с центром $(0; 12)$ и радиусом 4.

Изобразим на рисунке точки, удовлетв. неравенству $(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0$:



Получаем:

$$\begin{cases} ax + y - 86 = 0 \\ \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 \\ x^2 + (y - 12)^2 \leq 16 \end{cases} \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0 \Rightarrow y = 8b - ax \\ x^2 + y^2 - 1 \leq 0 \\ x^2 + (8b - ax)^2 - 1 \leq 0; \end{cases}$$
$$x^2 + 64b^2 - 16axb + a^2x^2 - 1 \leq 0$$
$$(a^2 + 1)x^2 - 16axb + 64b^2 - 1 \leq 0 \Rightarrow \frac{D}{4} = 64a^2b^2 - (a^2 + 1)(64b^2 - 1) \leq 0;$$

$$64a^2b^2 - 64a^2b^2 + a^2 - 64b^2 + 1 \leq 0;$$

$$a^2 + 1 \leq 64b^2. \text{ Для любого } a \in \mathbb{R} \exists b. a^2 + 1 \leq 64b^2$$

(например $b = \sqrt{\frac{a^2 + 1}{64}}$)

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0 \Rightarrow y = 8b - ax \\ x^2 + (y - 12)^2 - 16 \leq 0 \\ x^2 + (8b - ax - 12)^2 - 16 \leq 0 \end{cases}$$
$$x^2 + 64b^2 + a^2x^2 + 12^2 - 16 \cdot 12b - 16abx + 24ax - 16 \leq 0;$$

$$x^2(a^2 + 1) + 8ax(3 - 2b) + (64b^2 + 12^2 - 16 \cdot 12b - 16) \leq 0 \Rightarrow \frac{D}{4} = 16a^2(9 - 12b + 4b^2) - (a^2 + 1) \cdot (64b^2 + 12^2 - 16 \cdot 12b - 16) \leq 0;$$

$$9 \cdot 16a^2 - 12 \cdot 16a^2b + 4 \cdot 16a^2b^2 - 64a^2b^2 - 12^2a^2 + 16 \cdot 12a^2b + 16a^2 - 64b^2 - 12^2 + 16 \cdot 12b - 16 \leq 0$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$= (9 \cdot 16 - 12^2 + 16) a^2 - 64b^2 + 16 \cdot 12b + 1650;$$

$$16a^2 \leq 64b^2 - 16 \cdot 12b - 16;$$

$$a^2 \leq 4b^2 - 12b + 1$$

Т.к. решение должно быть ровно 2, то
прямая $ax + 15 - 8b = 0$ — общая касательная

к данным окружностям, т.е., каждый из
дискриминантов $\frac{D_1}{4} = a^2 + 1 - 64b^2$ и $\frac{D_2}{4} = 16a^2 - 64b^2 - 16 \cdot 12b - 16$
 ~~$+ 12b$~~ должен быть равен 0.

$$\begin{cases} a^2 + 1 = 64b^2 \\ a^2 = 4b^2 - 12b + 1 \end{cases}$$

$$60b^2 + 12b - 2 = 0;$$

$$30b^2 + 6b - 1 = 0;$$

$$30b^2 + 6b - 1 = 0$$

$$\frac{D}{4} = 39$$

$$b_{1/2} = -3 \pm \sqrt{39}.$$

$$\begin{cases} a^2 + 1 = (3 + \sqrt{39})^2 \\ a^2 + 1 = (3 - \sqrt{39})^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \pm \sqrt{47 + 6\sqrt{39}} \\ a = \pm \sqrt{47 - 6\sqrt{39}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \pm \sqrt{47 + 6\sqrt{39}} \\ a = \pm \sqrt{47 - 6\sqrt{39}} \end{cases}$$

Ответ: $\pm \sqrt{47 + 6\sqrt{39}}$;
 $\pm \sqrt{47 - 6\sqrt{39}}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1) $ab: 2^{15} \cdot 7^{11}; bc: 2^{17} \cdot 7^{18}; ac: 2^{23} \cdot 7^{39}$ $\left\{ \begin{array}{l} 9; 5 \\ 4 \\ 5 \\ 9 \end{array} \right.$

$\min(abc); x_2 = \text{ord}_2 a; x_7 = \text{ord}_7 a$

$\text{ord}_n a = \frac{a}{n} \Rightarrow \begin{cases} a: n^x \\ a: n^{x+1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_2 = \text{ord}_2 b; y_7 = \text{ord}_7 b \\ z_2 = \text{ord}_2 c; z_7 = \text{ord}_7 c \end{cases}$

$\left\{ \begin{array}{l} x_2 + y_2 \geq 15 \\ x_7 + y_7 \geq 11 \\ y_2 + z_2 \geq 17 \\ y_7 + z_7 \geq 18 \\ x_2 + z_2 \geq 23 \\ x_7 + z_7 \geq 39 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_2 + y_2 \geq 15 \\ y_2 + z_2 \geq 17 \\ x_2 + z_2 \geq 23 \end{array} \right. \Rightarrow 2(x_2 + y_2 + z_2) \geq 55$

$\frac{55}{2} = 27.5$

$\left\{ \begin{array}{l} y_7 + z_7 \geq 18 \\ x_7 + y_7 \geq 11 \\ x_7 + z_7 \geq 39 \end{array} \right. \Rightarrow 2(x_7 + y_7 + z_7) \geq 68$

$\frac{68}{2} = 34$

$\Rightarrow \min(abc) = 2^{28} \cdot 7^{39} = 4746139$

2) $\frac{a}{b}$ -нормал $\Leftrightarrow \text{НОД}(a, b) = 1$

$\frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2}$ - нормал $\Leftrightarrow \text{НОД}(a+b, a^2 - 7ab + b^2) = m$

$\left\{ \begin{array}{l} |a+b; a^2 - 7ab + b^2| = m \\ |a; b| = 1 \end{array} \right.$

$a^2 - 7ab + b^2 = (a+b)^2 - 9ab$

$(a+b | a^2 - 7ab + b^2) = (a+b | (a+b)^2 - 9ab) = (a+b | -9ab)$

Если $(a+b | -9ab) \neq 1$, то $\exists p | ab$ и $p | a+b \Rightarrow \text{НОД}(a, b) = p$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$4) \sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x \quad | \cdot \sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$3x^2 - 6x + 2 - 3x^2 - 3x - 1 = (1 - 9x)(\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1})$$

$$(1 - 9x) = (1 - 9x)(\sqrt{\dots})$$

$$(1 - 9x)(\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1}) = 0$$

$$x = \frac{1}{9}$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1$$

$$1 - \frac{\sqrt{3}}{3} > \frac{1}{9}$$

$$1 - \frac{1}{1,71} > \frac{1,71}{3}$$

$$1 - \frac{1}{1,71} > \frac{1 - \frac{1}{2}}{2} > \frac{1}{9}$$

$$\text{Отв: } \frac{1}{9}$$

$$1,71 \cdot \frac{3}{0,5}$$

$$\frac{3}{9} - \frac{3}{2} + 1 = x_0 = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}$$

$$= \frac{3 - 6 + 6}{9} = 3 \cdot \frac{1}{9} + \frac{3}{2} + 1 =$$

$$= -\frac{3}{2} + 1 = \frac{1}{2} = \frac{3}{9} \cdot \frac{1}{3} + 1 =$$

$$= \frac{3}{9} + 1 > 1$$

$$\frac{3}{9} - \frac{6}{9} + 1 =$$

$$= 1 - \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

$$\text{Отв: } (-\infty; \frac{3 - \sqrt{3}}{3}]$$

$$\cup [\frac{3 + \sqrt{3}}{3}; +\infty)$$

$$1 - \frac{\sqrt{3}}{3} < 1 - \frac{1}{1,71}$$

$$5) O(0; 0); P(-13; 26); Q(3; 10);$$

$$R(16; 0)$$

$$\text{Над-во } A(x_1; y_1); B(x_2; y_2) \in \mathbb{C}^2$$

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$$

$$2(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 14$$

$$2x + y = 14$$

$$\text{Или } y = 2k \quad \begin{cases} y = 2k \\ x = 7 - k \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$2x + 2k = 14$$

$$x = 7 - k$$

$$\frac{3}{9} - \frac{3}{2} + 1 =$$

$$= \frac{3 - 6 + 6}{9} = \frac{3}{9} - \frac{6}{9} + \frac{6}{9} = \frac{3}{9}$$

$$1 - \frac{1}{1,71}$$

$$1 - \frac{8}{9}$$

$$1 +$$

$$y_2 - y_1 = 2k$$

$$x_2 - x_1 = 7 - k$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

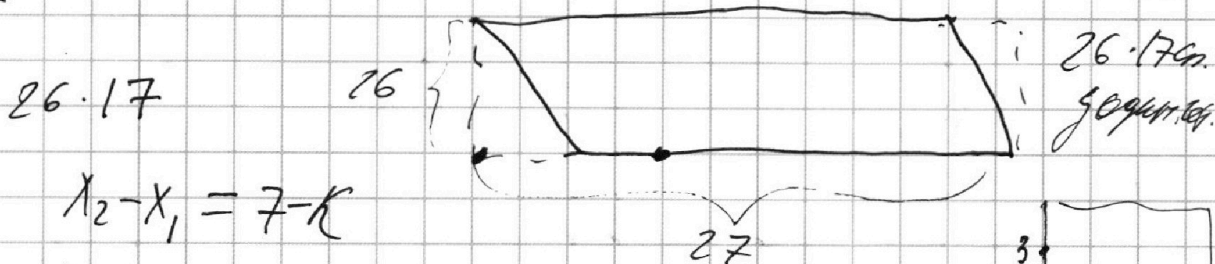
1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} y_2 - y_1 = 2k \\ x_2 - x_1 = 7 - k \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}; \quad \text{Значение } y \rightarrow 26 \text{ см.}$$

y такой же тер. $\rightarrow \frac{26}{2} - 1 = 12$



$$x_2 - x_1 = 7 - k$$

по формулам:

$$6) \begin{cases} ax + y - 86 = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 12)^2 - 16 \leq 0 \end{cases}$$

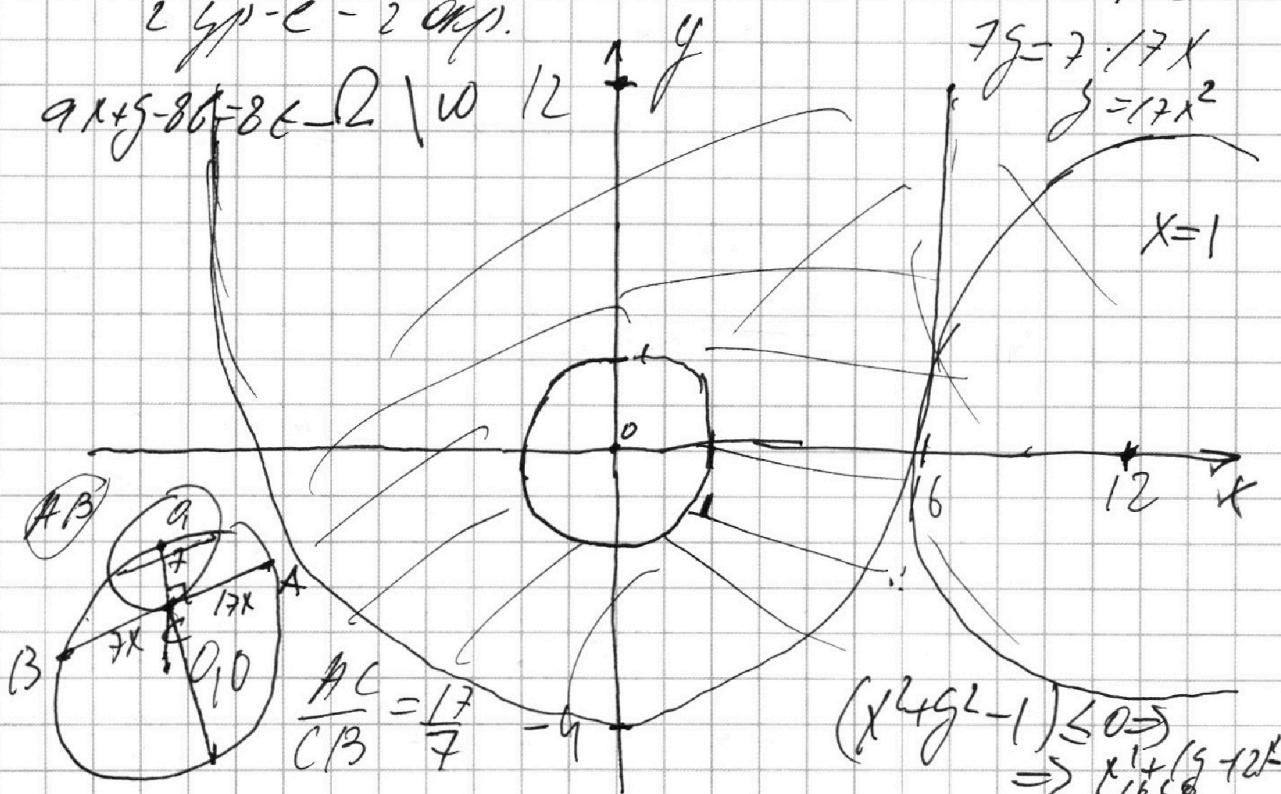
$a: \exists 6$: ровно 2 реш.

2 вып-е - 2 окр.

Ω мин-бог: $\Omega \setminus \omega$

$$\begin{aligned} 7y &= 7 \cdot 17x \\ y &= 17x^2 \end{aligned}$$

$$x = 1$$





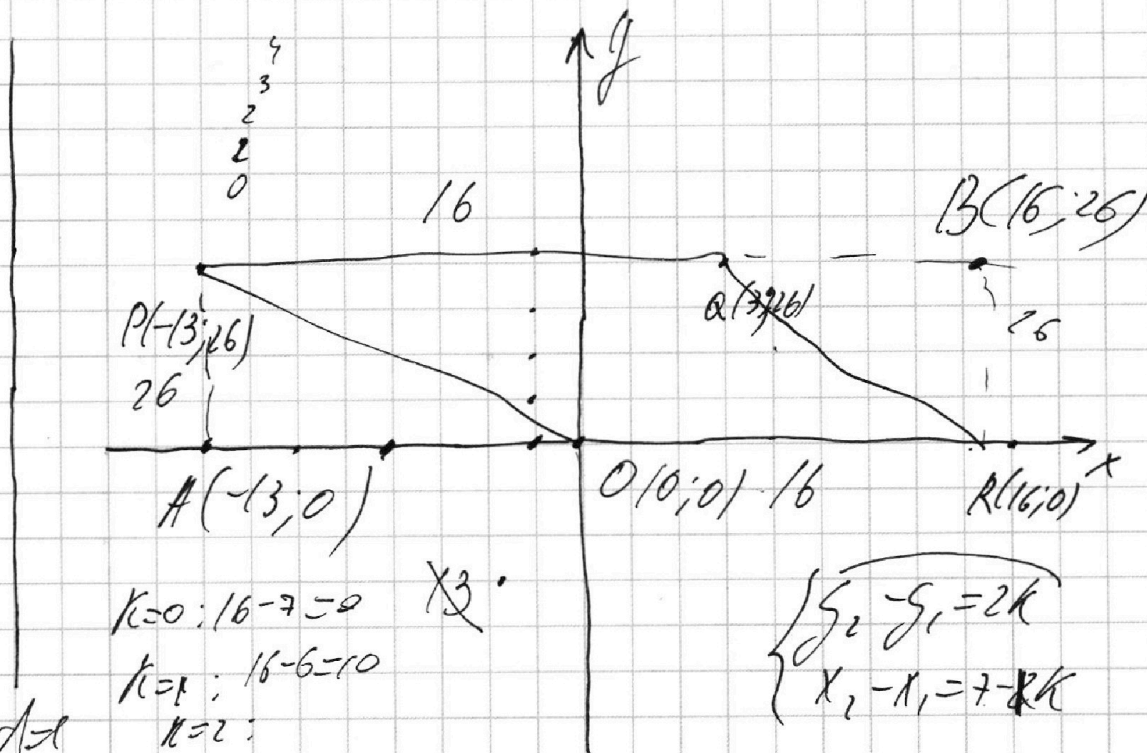
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$k=0: 16 - 7 = 9$
 $k=1: 16 - 6 = 10$
 $k=2:$

$$\begin{cases} y_2 - y_1 = 2k \\ x_2 - x_1 = 7 - k \end{cases}$$

$a_1 = 9$
 $a_2 = 10$
 $y_2 - y_1 = 2k, 0 \leq y_i \leq 26 \Rightarrow y_2 \equiv y_1 \pmod{1}$

Два A P B R: $2 \cdot 5 \cdot 13 + 15 \cdot 13 = 14 \cdot 13 = 182$ - выработка

$(y_2; y_1)$. Пусть мы выбрали пару $(y_2; y_1)$:

$y_2 - y_1 = 2k$; Найдем нот-во $(x_2; x_1)$: $x_2 - x_1 = 7 - k$

$$|x_2 - x_1| = 7 - \frac{y_2 - y_1}{2} \leq 29$$

$$\begin{cases} |x_2 - x_1| = |7 - k| \leq 29 \\ |y_2 - y_1| = |2k| \leq 26 \end{cases}$$

$$\begin{cases} |7 - k| \leq 29 \\ |k| \leq 13 \\ k \geq 0 - \text{всё} \\ k \leq 0 - \text{всё} \end{cases}$$

$x_2 - x_1 = 7 - k \quad 16 - 7 = 9 \quad k=0 - 16 + 9$
 $y_2 - y_1 = 2k \quad 7 + 13 = 20 \quad k=1 \quad 16 - 7 - k = 9$
 $7 + 13 = 20 \quad 16 - 7 - k = 9$
 $7 + 13 = 20 \quad 16 - 7 - k = 9$
 $7 + 13 = 20 \quad 16 - 7 - k = 9$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$(a^2+1)x^2 + 8ax(3-2b) + (64b^2+12^2-20\cdot 12b) \leq 0 \quad \frac{160}{144} \quad \frac{16}{16}$$

$$\Delta_{x,y} = 16a^2(3-2a)^2 - (a^2+1)(64b^2+12^2-20\cdot 12b) =$$

$$= 16\cancel{9}a^2 - 16\cancel{12}a^2b + 16\cdot 4a^2b^2 - 16\cdot 4a^2b^2 - 12^2a^2 + 16\cdot 12a^2b - 64b^2 - 12^2 - 20\cdot 12b =$$

$$= 16\cdot 9a^2 - 12^2a^2 - 64b^2 - 12^2 - 20\cdot 12b \leq 0$$

$$(16\cdot 9 - 12^2)a^2 - 64b^2 - 12^2 - 16\cdot 12b \leq 0$$

$$64b^2 + 16\cdot 12b + 12^2 \geq (16\cdot 9 - 12^2)a^2$$

$$\exists a \Rightarrow (16\cdot 9 - 12^2)a^2$$

$$ax + y - 8b = 0$$

$$y = 8b - ax$$

$$(x^2 + y - 12)^2 - 16 \leq 0$$

$$a: \exists b$$

$$16a^2 \leq 64b^2$$

$$1 + a^2 \leq 4b^2 \quad a \leq \min$$

$$x^2 + (8b - ax - 12)^2 - 16 = x^2 + 64b^2 + a^2x^2 + 12^2 -$$

$$= 166ax - 16\cdot 12b + 24ax - 16 =$$

$$= (a^2+1)x^2 + 8ax(3-2b) + (12^2 + 64b^2 - 16\cdot 12b - 16) \leq 0$$

$$\Delta_{x,y} = 16a^2(3-2a)^2 - (a^2+1)(12^2 + 64b^2 - 16\cdot 12b - 16) =$$

$$= 36a^2 - 4\cdot 12a^2b + 16b^2a^2 - 12^2a^2 - 64b^2a^2 +$$

$$+ 16\cdot 12a^2b + 16a^2 = 16\cdot 9a^2 - 16\cdot 12a^2b + 16\cdot 4a^2b^2 -$$

$$- 12^2a^2 - 64a^2b^2 + 16\cdot 12ba^2 + 16a^2 - 12^2 - 64b^2 + 16$$

$$+ 16\cdot 12b + 16 = (16\cdot 9 - 12^2)a^2 + 16a^2 - 64b^2 \leq 0$$

$$(16\cdot 9 - 12^2)a^2 \leq 64b^2$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$(a^2+1)x^2 + 2x(988) + (646^2 - 166 \cdot 15) \leq 0$
 $\Rightarrow 0 \leq 0$
 $\frac{0}{4} = a^2(188)^2 - (a^2+1)(646^2 - 166 \cdot 15) = x^2 + 12^2 - 16^2 = 0$
 $\frac{0}{4} = a^2(1 - 166 + 646^2) - (a^2+1)(646^2 - 166 \cdot 15) = x^2 = 48$
 $x = 4\sqrt{3}$
 $646^2 - 166 \cdot 15 \leq x \cdot 16a^2$
 $a: \exists 6$
 $= 6a^2 \cdot 646^2 + 166 + 15 \leq 0$
 $a: \exists 6 \cdot 16a^2 \leq 646^2 - 166 \cdot 15 = 16ax$
 $646^2 - 166ax + 9 - 88 = 0 \Rightarrow y = 86 - ax$
 $x^2 + 9^2 - 1 \geq 0 \Rightarrow x^2 + (86 - ax)^2 \geq 1$
 $60 = 2 \cdot 646 \cdot 8$
 $x^2 + 646^2 - 1696ax + a^2x^2 \geq 1$
 $16a^2 \geq 1$
 $(a^2+1)x^2 - 1696ax + 646^2 - 1 \geq 0$
 $\frac{0}{4} = 64a^2b^2 - (a^2+1)(646^2 - 1) = 64a^2b^2 - 64a^2b^2 + a^2 - 646^2 + 1 = a^2 - 646^2 + 1 \geq 0$
 $a^2 \geq 646^2 - 1$
 $ax \quad y = 86 - ax$
 $(245 - 12)^2 - 16 \leq 0$
 $-1696ax + a^2x^2 - 16 \leq 0$
 $x^2 + (86 - ax - 1)^2 - 16 \leq 0$
 $x^2 + 646^2 + a^2x^2 + 1 = 166$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \geq \sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 6x^2 - 3x + 3 + 2\sqrt{\dots}$$

$$6x^2 - 3x + 3 = 0; \Delta = 9 - 160 = -149 < 0$$

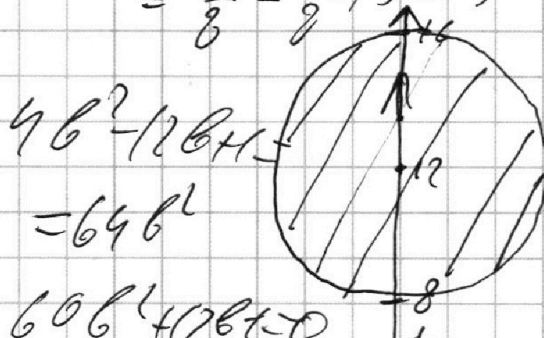
$$x_0 = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

$$D = 39 \quad b_{1/2} = \frac{-3 \pm \sqrt{39}}{2}$$

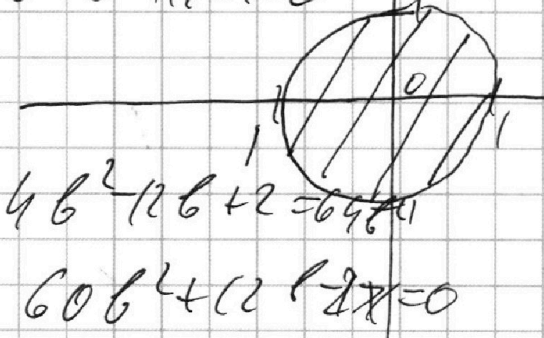
$$2a + 6x^2 - 3x + 3 \geq 6 \cdot \frac{1}{16} - \frac{3}{16} + 3 = \frac{3}{8} - \frac{3}{16} + 3 =$$

$$= \frac{3}{8} - \frac{6}{16} + 3 = 3 - \frac{3}{8} \geq 1$$

$a \in [36]$



$ax + y - 86 = 0$
 - обш. $x^2 + y^2 - 170$
 касат. л. $\begin{cases} ax + y - 86 = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 \leq 0 \\ x^2 + (y - 12)^2 - 16 \leq 0 \end{cases}$
 окр.



$ax + y - 86 = 0 \Rightarrow y = 86 - ax$
 $(86 - ax)^2 + x^2 - 1 =$

$$= ax^2 - 169ax + 646^2 + x^2 - 1 = (a^2 + 1)x^2 - 169ax + 646^2 - 1 \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq 0$$

$$64a^2b^2 - (a^2 + 1)(646^2 - 1) = 64a^2b^2 - 646^2 + 1$$

$$+ a^2 - 646^2 + 1 = a^2 - 646^2 + 170, \forall a \in \mathbb{R} \exists b = 0$$

$$x^2 + (86 - ax - 12)^2 - 16 = x^2 + 646^2 + a^2x^2 + 2x^2 - 2 \cdot 86 \cdot 12 - 1696x + 24ax = \frac{(a^2 + 1)x^2}{646^2 + 12^2 - 1696} + 8ax(3 - 2a)$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$29 \cdot 26 \cdot \text{Eqd} = \frac{1}{x}$

$\sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{26}{2n} \right] (10-k) = 6 \square$

$\sum_{n=1}^{13} \left[\frac{13}{n} \right] (29-k)$

$x^2 = 99 \Rightarrow x = 9.95 \approx 10$

5) $y_2 - y_1 = 2k$

$x_2 - x_1 = 7 - k$

$7 \cdot 14 - 7 \cdot 13 = 7$

$a_n = -6, d = -1$

$x_2 - x_1 = 6$

$7 \cdot 14 - (7+2+3+\dots+13) = 7 \cdot 14 - \frac{(7+13) \cdot 7}{2} = 7 \cdot 14 - 35 = 98 - 35 = 63$

$29 \cdot 26 \cdot (13 - 13) \cdot 26 = 13(2 \cdot 13 \cdot 26(29+3)) = 13 \cdot 26 \cdot 16$

$- \text{выбор } y_{13} \square$

Диа. макс: $x_2 - x_1 = k$

$26 \cdot 29 - 7 - k$

$k=1: y_2 - y_1 = 2, x_2 - x_1 = 6$

$k=0: y_2 - y_1 = 0, x_2 - x_1 = 7$

$k=2: y_2 - y_1 = 4, x_2 - x_1 = 5$

$k=3: y_2 - y_1 = 6, x_2 - x_1 = 4$

$k=4: y_2 - y_1 = 8, x_2 - x_1 = 3$

$k=5: y_2 - y_1 = 10, x_2 - x_1 = 2$

$k=6: y_2 - y_1 = 12, x_2 - x_1 = 1$

$k=7: y_2 - y_1 = 14, x_2 - x_1 = 0$

$k=8: y_2 - y_1 = 16, x_2 - x_1 = -1$

$k=9: y_2 - y_1 = 18, x_2 - x_1 = -2$

$k=10: y_2 - y_1 = 20, x_2 - x_1 = -3$

$k=11: y_2 - y_1 = 22, x_2 - x_1 = -4$

$k=12: y_2 - y_1 = 24, x_2 - x_1 = -5$

$k=13: y_2 - y_1 = 26, x_2 - x_1 = -6$

$k=14: y_2 - y_1 = 28, x_2 - x_1 = -7$

$k=15: y_2 - y_1 = 30, x_2 - x_1 = -8$

$k=16: y_2 - y_1 = 32, x_2 - x_1 = -9$

$k=17: y_2 - y_1 = 34, x_2 - x_1 = -10$

$k=18: y_2 - y_1 = 36, x_2 - x_1 = -11$

$k=19: y_2 - y_1 = 38, x_2 - x_1 = -12$

$k=20: y_2 - y_1 = 40, x_2 - x_1 = -13$

$k=21: y_2 - y_1 = 42, x_2 - x_1 = -14$

$k=22: y_2 - y_1 = 44, x_2 - x_1 = -15$

$k=23: y_2 - y_1 = 46, x_2 - x_1 = -16$

$k=24: y_2 - y_1 = 48, x_2 - x_1 = -17$

$k=25: y_2 - y_1 = 50, x_2 - x_1 = -18$

$k=26: y_2 - y_1 = 52, x_2 - x_1 = -19$

$k=27: y_2 - y_1 = 54, x_2 - x_1 = -20$

$k=28: y_2 - y_1 = 56, x_2 - x_1 = -21$

$k=29: y_2 - y_1 = 58, x_2 - x_1 = -22$

$k=30: y_2 - y_1 = 60, x_2 - x_1 = -23$

$k=31: y_2 - y_1 = 62, x_2 - x_1 = -24$

$k=32: y_2 - y_1 = 64, x_2 - x_1 = -25$

$k=33: y_2 - y_1 = 66, x_2 - x_1 = -26$

$k=34: y_2 - y_1 = 68, x_2 - x_1 = -27$

$k=35: y_2 - y_1 = 70, x_2 - x_1 = -28$

$k=36: y_2 - y_1 = 72, x_2 - x_1 = -29$

$k=37: y_2 - y_1 = 74, x_2 - x_1 = -30$

$k=38: y_2 - y_1 = 76, x_2 - x_1 = -31$

$k=39: y_2 - y_1 = 78, x_2 - x_1 = -32$

$k=40: y_2 - y_1 = 80, x_2 - x_1 = -33$

$k=41: y_2 - y_1 = 82, x_2 - x_1 = -34$

$k=42: y_2 - y_1 = 84, x_2 - x_1 = -35$

$k=43: y_2 - y_1 = 86, x_2 - x_1 = -36$

$k=44: y_2 - y_1 = 88, x_2 - x_1 = -37$

$k=45: y_2 - y_1 = 90, x_2 - x_1 = -38$

$k=46: y_2 - y_1 = 92, x_2 - x_1 = -39$

$k=47: y_2 - y_1 = 94, x_2 - x_1 = -40$

$k=48: y_2 - y_1 = 96, x_2 - x_1 = -41$

$k=49: y_2 - y_1 = 98, x_2 - x_1 = -42$

$k=50: y_2 - y_1 = 100, x_2 - x_1 = -43$

$k=51: y_2 - y_1 = 102, x_2 - x_1 = -44$

$k=52: y_2 - y_1 = 104, x_2 - x_1 = -45$

$k=53: y_2 - y_1 = 106, x_2 - x_1 = -46$

$k=54: y_2 - y_1 = 108, x_2 - x_1 = -47$

$k=55: y_2 - y_1 = 110, x_2 - x_1 = -48$

$k=56: y_2 - y_1 = 112, x_2 - x_1 = -49$

$k=57: y_2 - y_1 = 114, x_2 - x_1 = -50$

$k=58: y_2 - y_1 = 116, x_2 - x_1 = -51$

$k=59: y_2 - y_1 = 118, x_2 - x_1 = -52$

$k=60: y_2 - y_1 = 120, x_2 - x_1 = -53$

$k=61: y_2 - y_1 = 122, x_2 - x_1 = -54$

$k=62: y_2 - y_1 = 124, x_2 - x_1 = -55$

$k=63: y_2 - y_1 = 126, x_2 - x_1 = -56$

$k=64: y_2 - y_1 = 128, x_2 - x_1 = -57$

$k=65: y_2 - y_1 = 130, x_2 - x_1 = -58$

$k=66: y_2 - y_1 = 132, x_2 - x_1 = -59$

$k=67: y_2 - y_1 = 134, x_2 - x_1 = -60$

$k=68: y_2 - y_1 = 136, x_2 - x_1 = -61$

$k=69: y_2 - y_1 = 138, x_2 - x_1 = -62$

$k=70: y_2 - y_1 = 140, x_2 - x_1 = -63$

$k=71: y_2 - y_1 = 142, x_2 - x_1 = -64$

$k=72: y_2 - y_1 = 144, x_2 - x_1 = -65$

$k=73: y_2 - y_1 = 146, x_2 - x_1 = -66$

$k=74: y_2 - y_1 = 148, x_2 - x_1 = -67$

$k=75: y_2 - y_1 = 150, x_2 - x_1 = -68$

$k=76: y_2 - y_1 = 152, x_2 - x_1 = -69$

$k=77: y_2 - y_1 = 154, x_2 - x_1 = -70$

$k=78: y_2 - y_1 = 156, x_2 - x_1 = -71$

$k=79: y_2 - y_1 = 158, x_2 - x_1 = -72$

$k=80: y_2 - y_1 = 160, x_2 - x_1 = -73$

$k=81: y_2 - y_1 = 162, x_2 - x_1 = -74$

$k=82: y_2 - y_1 = 164, x_2 - x_1 = -75$

$k=83: y_2 - y_1 = 166, x_2 - x_1 = -76$

$k=84: y_2 - y_1 = 168, x_2 - x_1 = -77$

$k=85: y_2 - y_1 = 170, x_2 - x_1 = -78$

$k=86: y_2 - y_1 = 172, x_2 - x_1 = -79$

$k=87: y_2 - y_1 = 174, x_2 - x_1 = -80$

$k=88: y_2 - y_1 = 176, x_2 - x_1 = -81$

$k=89: y_2 - y_1 = 178, x_2 - x_1 = -82$

$k=90: y_2 - y_1 = 180, x_2 - x_1 = -83$

$k=91: y_2 - y_1 = 182, x_2 - x_1 = -84$

$k=92: y_2 - y_1 = 184, x_2 - x_1 = -85$

$k=93: y_2 - y_1 = 186, x_2 - x_1 = -86$

$k=94: y_2 - y_1 = 188, x_2 - x_1 = -87$

$k=95: y_2 - y_1 = 190, x_2 - x_1 = -88$

$k=96: y_2 - y_1 = 192, x_2 - x_1 = -89$

$k=97: y_2 - y_1 = 194, x_2 - x_1 = -90$

$k=98: y_2 - y_1 = 196, x_2 - x_1 = -91$

$k=99: y_2 - y_1 = 198, x_2 - x_1 = -92$

$k=100: y_2 - y_1 = 200, x_2 - x_1 = -93$