



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа  $a$ ,  $b$ ,  $c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^{15}7^{11}$ ,  $bc$  делится на  $2^{17}7^{18}$ ,  $ac$  делится на  $2^{23}7^{39}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .

2. [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}$ ,  $b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

3. [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , хорда  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC : CB = 17 : 7$ . Найдите длину  $AB$ , если известно, что радиусы  $\omega$  и  $\Omega$  равны 7 и 13 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-13; 26)$ ,  $Q(3; 26)$  и  $R(16; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$ .

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник  $ABC$  вписан в окружность. Пусть  $M$  – середина той дуги  $AB$  описанной окружности, которая не содержит точку  $C$ ;  $N$  – середина той дуги  $AC$  описанной окружности, которая не содержит точку  $B$ . Найдите расстояние от вершины  $A$  до центра окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ , если расстояния от точек  $M$  и  $N$  до сторон  $AB$  и  $AC$  соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Введем обозначения:  $\text{ord}_n a = k \Leftrightarrow \begin{cases} a : n^k \\ a \not: n^{k+1} \end{cases}$   
Пусть  $x_2 = \text{ord}_2 a$ ;  $x_7 = \text{ord}_7 a$ ;  $y_2 = \text{ord}_2 b$ ;  
 $y_7 = \text{ord}_7 b$ ;  $z_2 = \text{ord}_2 c$ ;  $z_7 = \text{ord}_7 c$ .

Из условий получаем 2 системы:

$$\begin{cases} x_2 + y_2 \geq 15 \\ y_2 + z_2 \geq 17 \Rightarrow 2(x_2 + y_2 + z_2) \geq 55 \Rightarrow x_2 + y_2 + z_2 \geq 28 \\ x_2 + z_2 \geq 23 \end{cases} \quad (\text{т.к. } x_2 + y_2 + z_2 \in \mathbb{N})$$

$$\begin{cases} x_7 + y_7 \geq 11 \\ y_7 + z_7 \geq 18 \Rightarrow 2(x_7 + y_7 + z_7) \geq 68 \Rightarrow x_7 + y_7 + z_7 \geq 34 \\ x_7 + z_7 \geq 39 \end{cases} \quad \geq 34$$

$$\begin{cases} x_2 + y_2 + z_2 \geq 34 \\ x_2 + y_2 + z_2 \geq 28 \end{cases} \Rightarrow abc \geq 2^{28} \cdot 7^{34}$$

Ответ:  $2^{28} \cdot 7^{34}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Обозначим  $\text{НОД}(a; b) = (a; b)$ .

Дробь  $\frac{a}{b}$  несократима  $\Leftrightarrow (a; b) = 1$  (1)

Если  $m$  - наибольшее число, на которое можно со-

кратить дробь  $\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$ , то  $(a+b; a^2-7ab+b^2) = m$ .

Т.к.  $(a; b) \neq (x; y) = (x-y; y)$ , то  
 $(a+b; a^2-7ab+b^2) = (a+b; (a+b)^2-9ab) =$   
 $= (a+b; -9ab)$ .

Предположим, что существует простое  $p$ :  
 $\left. \begin{array}{l} p|ab \\ p|(a+b) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} p|a \\ p|b \end{array} \right. \Rightarrow (a; b) \geq p$ , что про-

тиворечит (1), поэтому  $(a+b; -9ab) \leq 9$  и  
 равенство достигается, если выбрать значения  
 натуральных числа  $a$  и  $b$  таких, что  $a+b; 9$  (на-  
 пример  $a=4; b=5$ ).

Ответ: при  $m=9$ .

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1   
 2   
 3   
 4   
 5   
 6   
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{3x^2-6x+2} - \sqrt{3x^2+3x+1} = 1-9x$$

003:

Далее мы обе части ур-я на

$$\left\{ \begin{aligned} 3x^2-6x+2 > 0 \\ 3x^2+3x+1 > 0 \end{aligned} \right.$$

$$\sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1} > 0.$$

$$3x^2-6x+2 > 0$$

$$3x^2+3x+1 > 0$$

$$3x^2-6x+2 - 3x^2-3x-1 = (1-9x)(\sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1})$$

$$3x^2-6x+2 > 0$$

найдем корни ф.:  $\frac{D}{4} = 3$

$$+ \sqrt{3x^2+3x+1}$$

$$(1-9x) = (1-9x)(\sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1})$$

$$x_{1/2} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{3}$$

$$(1-9x)(\sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1} - 1) = 0$$

$$x \in (-\infty; \frac{3-\sqrt{3}}{3}] \cup [\frac{3+\sqrt{3}}{3}; +\infty)$$

$$x = \frac{1}{9} \text{ (проверяем 003.)}$$

$$3x^2+3x+1 > 0.$$

$$\sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1} = 1 \quad (2)$$

$$\sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1} = 1$$

Найдём вершины параболы  $x_0 = -$

$$\left( \sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1} \right)^2 = 1$$

$$D = 9-12 < 0 \Rightarrow \Rightarrow 3x^2+3x+1 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$$

$$6x^2-3x+3+a=1, \text{ где } a=2\sqrt{3x^2-6x+2}\sqrt{3x^2+3x+1}$$

Найдём минимум  $f(x) = 6x^2-3x+3$ .

$$x_0 = \frac{1}{4}; y_0 = \min f(x) = f(x_0) = \frac{6}{16} - \frac{3}{4} + 3 = 3 - \frac{3}{8} > 1.$$

$6x^2-3x+3+a > 1$ , поэтому ур-е (2) не имеет решений.

Ответ:  $\frac{1}{9}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$2x_2 - 2x_1 + g_2 - g_1 = 14;$$

$$\text{Замени } \begin{cases} u = x_2 - x_1 \\ v = g_2 - g_1 \end{cases}$$

$$2u + v = 14; \begin{cases} 2u : 2 \\ 2u + v : 2 \end{cases} \rightarrow v : 2 \rightarrow v = 2k; k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} v = 2k \\ 2u + 2k = 14; \end{cases}$$

$$\begin{cases} v = 2k \\ u = 7 - k \end{cases}$$

$$\begin{cases} g_2 - g_1 = 2k \\ x_2 - x_1 = 7 - k \end{cases}, k \in \mathbb{Z}, k \leq 13 \quad (1)$$

Востроим параллелограмм  $OPQR$  по правилу  
уравновешивания  $A, B, R$ ;  $A_1(-13; 0)$ ,  $B_1(16; 26)$ .

Найдем в нем пар-во точек  $A(x_1; y_1)$ ,  $B(x_2; y_2)$ ,  
удовлетворяющих системе (1) и вытекает  
того пар-во пар точек, в которых пара  $A, B$   
содержится в 1 из тр-ков  $\triangle PA_1O$  или  $\triangle RB_1Q$ .  
Каждое из них выбрать отдельно точки  
в  $A_1, B_1, R$  так, чтобы они их ординаты от-  
личались на  $2k$  равнялась  $\begin{bmatrix} 26 \\ 2k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ k \end{bmatrix} + k$ , а

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~Каждый способ выбрать абсциссы, отстоя-  
ющую на  $7-k$  равняется  $29-30-(7-k, 1)=23k$ .~~

~~По проблеме произведения получаем, что всего та-  
ким образом в  $A, B, R$  можно выбрать~~

$$\sum_{n=1}^{13} \left[ \frac{13}{n} \right] (23+n)$$

Каждый способ выбрать ординаты рав-  
няется  $\frac{C_{27}^2}{2}$ , а абсциссу  $7 \cdot 14 - (1+2+\dots+13) =$

$$= 7 \cdot 14 - \frac{1+13}{2} \cdot 13 = 7$$

Всего  $\frac{7 C_{27}^2}{2}$  способов. При этом каждая  
точка  $TP$ -ков будет брать в какой-либо  
паре, всего их  $13 \cdot 26$ , причем каждая точка  
попадет в парах в  $28$  парам, всего получаем  $14 \cdot 13 \cdot 26$   
способов. Тогда всего таких точек в парам  
парам  $\frac{7 C_{27}^2}{2} - 14 \cdot 13 \cdot 26$

Ответ:  $\frac{7 C_{27}^2}{2} - 14 \cdot 13 \cdot 26$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

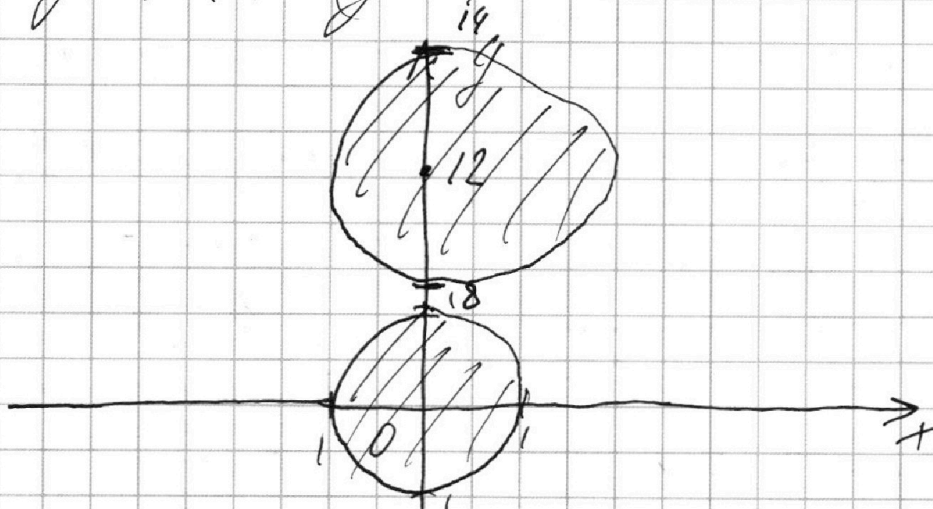
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} ax + y - 86 = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

Упр-е  $x^2 + y^2 - 1 = 0$  задает окружность с центром  $(0; 0)$  и радиусом 1. Упр-е  $x^2 + (y - 12)^2 - 16 = 0$  задает окружность с центром  $(0; 12)$  и радиусом 4.

Изобразим лн-во точек, удовлетв. неравенству  $(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0$ :



Получаем:

$$\begin{cases} ax + y - 86 = 0 \\ \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 \\ x^2 + (y - 12)^2 \leq 16 \end{cases} \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0 \Rightarrow y = 8b - ax \\ x^2 + y^2 - 1 \leq 0 \\ x^2 + (8b - ax)^2 - 1 \leq 0; \\ x^2 + 64b^2 - 16axb + a^2x^2 - 1 \leq 0 \\ (a^2 + 1)x^2 - 16axb + 64b^2 - 1 \leq 0 \Rightarrow \frac{D}{4} = 64a^2b^2 - (a^2 + 1)(64b^2 - 1) \leq 0; \end{cases}$$

$$64a^2b^2 - 64a^2b^2 + a^2 - 64b^2 + 1 \leq 0;$$

$$a^2 + 1 \leq 64b^2. \text{ Для любого } a \in \mathbb{R} \exists b. a^2 + 1 \leq 64b^2 \\ (\text{например } b = \sqrt{\frac{a^2 + 1}{64}})$$

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0 \Rightarrow y = 8b - ax \\ x^2 + (y - 12)^2 - 16 \leq 0 \\ x^2 + (8b - ax - 12)^2 - 16 \leq 0 \\ x^2 + 64b^2 + a^2x^2 + 12^2 - 16 \cdot 12b - 16abx + 24ax - 16 \leq 0; \\ x^2(a^2 + 1) + 8ax(3 - 2b) + (64b^2 + 12^2 - 16 \cdot 12b - 16) \leq 0 \Rightarrow \frac{D}{4} = 16a^2(9 - 12b + 4b^2) - (a^2 + 1) \cdot (64b^2 + 12^2 - 16 \cdot 12b - 16) \leq 0; \\ 9 \cdot 16a^2 - 12 \cdot 16a^2b + 4 \cdot 16a^2b^2 - 64a^2b^2 - 12^2a^2 + 16 \cdot 12a^2b + 16a^2 - 64b^2 - 12^2 + 16 \cdot 12b - 16 \leq 0 \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$= (9 \cdot 16 - 12^2 + 16) a^2 - 64b^2 + 16 \cdot 12b + 1650;$$

$$16a^2 \leq 64b^2 - 16 \cdot 12b - 16;$$

$$a^2 \leq 4b^2 - 12b + 1$$

Т.к. решение должно быть ровно 2, то  
прямая  $ax + 15 - 8b = 0$  — общая касательная

к данным окружностям, т.е., каждый из  
дискриминантов  $\frac{D_1}{4} = a^2 + 1 - 64b^2$  и  $\frac{D_2}{4} = 16a^2 - 64b^2 - 16 \cdot 12b - 16$   
 ~~$+ 12b$~~  должен быть равен 0.

$$\begin{cases} a^2 + 1 = 64b^2 \\ a^2 = 4b^2 - 12b + 1 \end{cases}$$

$$60b^2 + 12b - 2 = 0;$$

$$30b^2 + 6b - 1 = 0;$$

$$30b^2 + 6b - 1 = 0$$

$$\frac{D}{4} = 39$$

$$b_{1/2} = -3 \pm \sqrt{39}.$$

$$\begin{cases} a^2 + 1 = (3 + \sqrt{39})^2 \\ a^2 + 1 = (3 - \sqrt{39})^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \pm \sqrt{47 + 6\sqrt{39}} \\ a = \pm \sqrt{47 - 6\sqrt{39}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \pm \sqrt{47 + 6\sqrt{39}} \\ a = \pm \sqrt{47 - 6\sqrt{39}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \pm \sqrt{47 + 6\sqrt{39}} \\ a = \pm \sqrt{47 - 6\sqrt{39}} \end{cases}$$

Ответ:  $\pm \sqrt{47 + 6\sqrt{39}}$ ;  
 $\pm \sqrt{47 - 6\sqrt{39}}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1)  $ab: 2^{15} \cdot 7^{11}; bc: 2^{17} \cdot 7^{18}; ac: 2^{23} \cdot 7^{39}$

$\min(abc); x_2 = \text{ord}_2 a; x_7 = \text{ord}_7 a$

$\text{ord}_n a = \frac{a}{n^x}$

$\Rightarrow a: n^x \Rightarrow \begin{cases} x_2 = \text{ord}_2 b; x_7 = \text{ord}_7 b \\ z_2 = \text{ord}_2 c; z_7 = \text{ord}_7 c \end{cases}$

$\begin{cases} x_2 + x_7 = 15 \\ x_7 + z_7 = 11 \\ x_2 + z_2 = 17 \\ x_7 + z_7 = 18 \\ x_2 + z_2 = 23 \\ x_7 + z_7 = 39 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 + x_7 = 15 \\ x_2 + z_2 = 17 \\ x_2 + z_2 = 23 \end{cases} \Rightarrow 2(x_2 + z_2) = 55$

$\frac{55}{2} = 27.5$

$140 - 91 = 49$

$\frac{49}{9} = 5.44$

$\frac{66}{16 - 7 \cdot 20 + 25} = \frac{66}{-140} = -0.47$

$\frac{55}{2} = 27.5$

$\frac{66}{2} = 33$

$\frac{55}{2} = 27.5$

$\Rightarrow \min(abc) = 2^{28} \cdot 7^{39} = 4746139$

2)  $\frac{a}{b}$ -нормал  $\Leftrightarrow \text{НОД}(a, b) = 1$

$\frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2}$  - нормал  $\Leftrightarrow \text{НОД}(a+b, a^2 - 7ab + b^2) = m$

$\begin{cases} |a+b; a^2 - 7ab + b^2| = m \\ |a; b| = 1 \end{cases}$

$\text{НОД}(a; b) = \text{НОД}(b-a; b)$

$|a; b| = 1 \Rightarrow \text{НОД}(a; b) = 1$

$a^2 - 7ab + b^2 = (a+b)^2 - 9ab$

$(a+b | a^2 - 7ab + b^2) = (a+b | (a+b)^2 - 9ab) = (a+b | -9ab)$

Если  $(a+b | -9ab) \neq 1$ , то  $\exists p | ab$  и  $p | a+b \Rightarrow \text{НОД}(a; b) = p$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$4) \sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x \quad | \cdot \sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$3x^2 - 6x + 2 - 3x^2 - 3x - 1 = (1 - 9x)(\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1})$$

$$(1 - 9x) = (1 - 9x)(\sqrt{\dots})$$

$$(1 - 9x)(\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1}) = 0$$

$$x = \frac{1}{9}$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1$$

$$1 - \frac{\sqrt{3}}{3} > \frac{1}{9}$$

$$1 - \frac{1}{\sqrt{3}} > \frac{1}{3}$$

$$1 - \frac{1}{\sqrt{3}} > \frac{1 - \frac{1}{2}}{2} > \frac{1}{9}$$

Отв:  $\frac{1}{9}$

$$D = 3$$

$$x_{1/2} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{3}$$

$$x = -3$$

ООЗ:

$$\begin{cases} 3x^2 - 6x + 2 > 0 \\ 3x^2 + 3x + 1 > 0 \end{cases}$$

$$\frac{3}{9} - \frac{3}{2} + 1 = x_0 = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}$$

$$= \frac{3 - 6 + 3}{9} = 3 \cdot \frac{1}{9} + \frac{3}{2} + 1 =$$

$$= -\frac{3}{9} + 1 = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

$$= \frac{3}{9} - 1 > 1$$

$$\frac{3}{9} - \frac{6}{9} + 1 = 1 - \frac{3}{9} = \frac{6}{9}$$

ООЗ:  $(-\infty; \frac{3 - \sqrt{3}}{3}]$

$$\cup [\frac{3 + \sqrt{3}}{3}; +\infty)$$

$$1 - \frac{\sqrt{3}}{3} < 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}$$

5)  $O(0; 0); P(-13; 26); Q(3; 10); R(16; 0)$

кад-во  $A(x_1; y_1); B(x_2; y_2) \in \mathbb{C}^2$

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$$

$$2(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 14$$

$$2x + y = 14$$

$$y = 2k \quad \begin{cases} y = 2k \\ x = 7 - k \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$2x + 2k = 14$$

$$x = 7 - k$$

$$\frac{3}{9} - \frac{3}{2} + 1 =$$

$$= \frac{3 - 6 + 3}{9} = \frac{0}{9} = 0$$

$$\begin{cases} y_2 - y_1 = 2k \\ x_2 - x_1 = 7 - k \end{cases}$$

$$1 - \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$1 - \frac{8}{9}$$

$$1 +$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

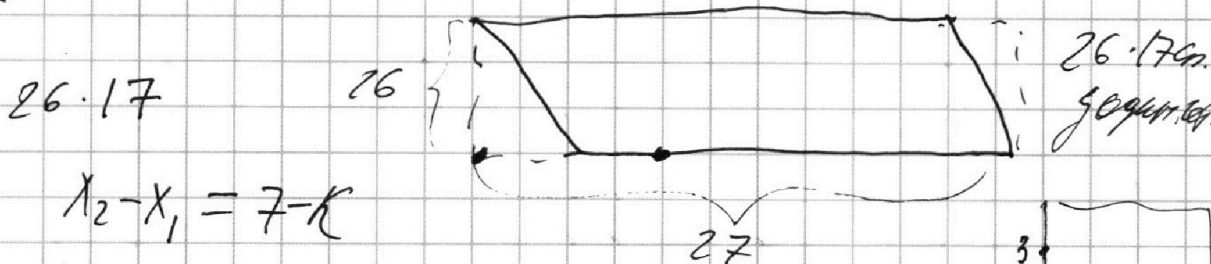
1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} y_2 - y_1 = 2k \\ x_2 - x_1 = 7 - k \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}; \quad \text{Значение } y \rightarrow 26 \text{ см.}$$

\$y\$ такой же мер. \$\rightarrow \frac{26}{2} - 1 = 12\$



$$x_2 - x_1 = 7 - k$$

Но невыполн.

$$6) \begin{cases} ax + y - 86 = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 12)^2 - 16 \leq 0 \end{cases}$$

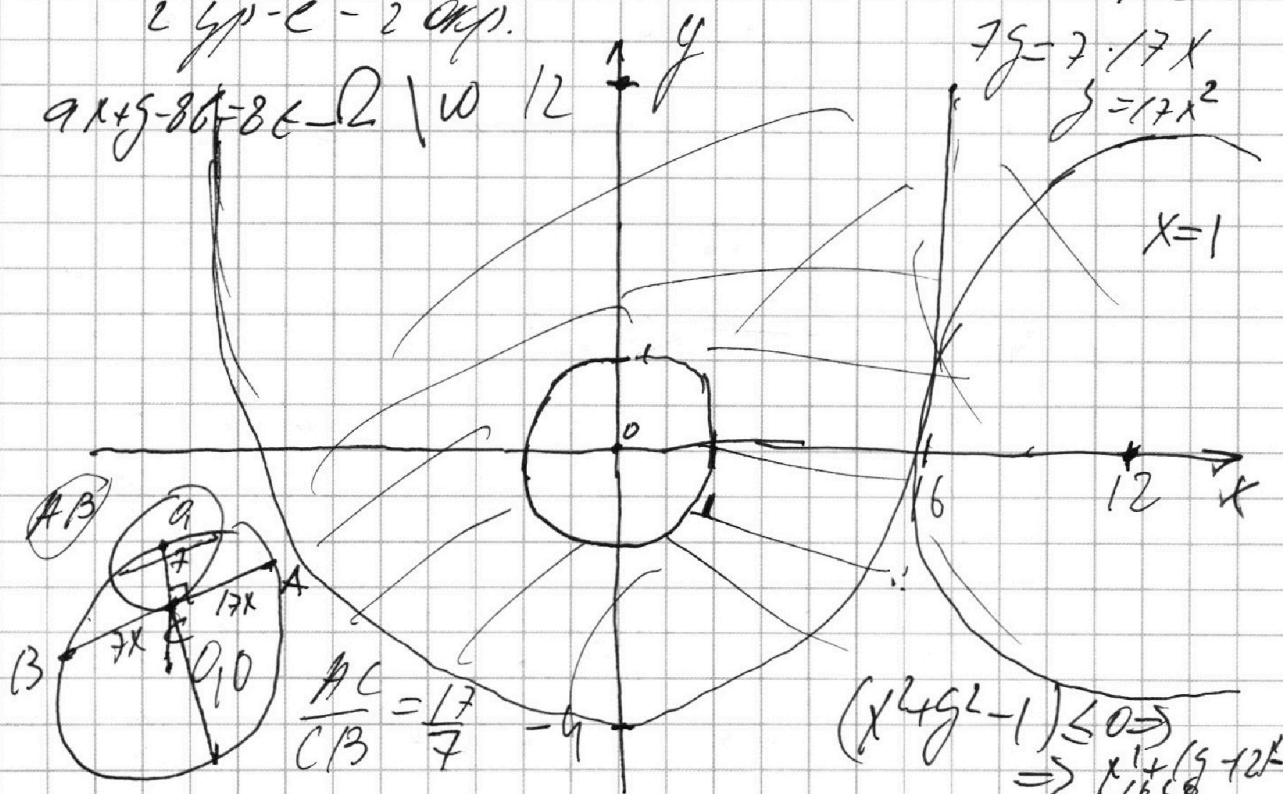
\$a: \exists 6\$: ровно 2 реш.

2 пр-е - 2 окр.

\$\Omega\$ MM-601; \$\Omega \setminus \omega\$

$$\begin{cases} 7y = 7 \cdot 17x \\ y = 17x^2 \end{cases}$$

$$ax + y - 86 = 86 \setminus \omega \quad 12$$



$$(x^2 + y^2 - 1) \leq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 - 12 \leq 0$$

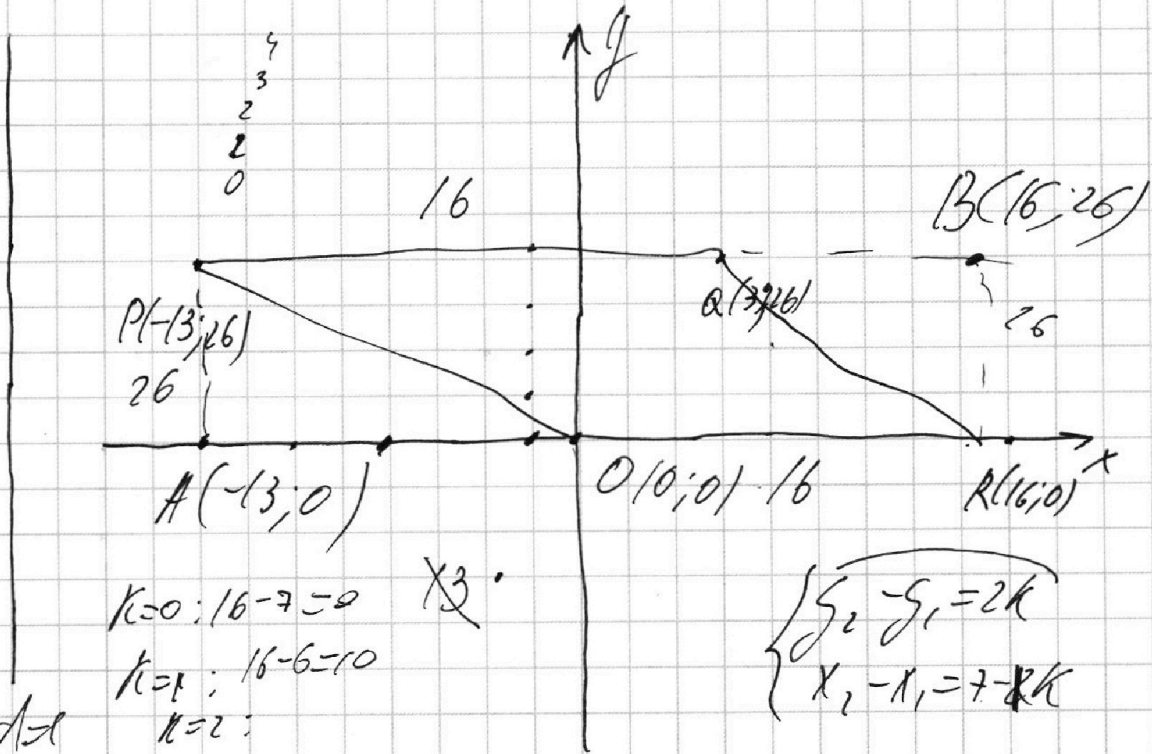
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$k=0: 16-7=9$   
 $k=1: 16-6=10$   
 $k=2:$

$$\begin{cases} y_2 - y_1 = 2k \\ x_2 - x_1 = 7 - k \end{cases}$$

$a_1 = 9$   
 $a_2 = 10$   
 $y_2 - y_1 = 2k, 0 \leq y_i \leq 26 \Rightarrow y_2 \equiv y_1 \pmod{26}$

Два APBR:  $25 \cdot 13 + 15 \cdot 13 = 1415$  — выработка  $(y_2, y_1)$ . Пусть мы выбрали пару  $(y_2, y_1)$ :

$y_2 - y_1 = 2k$ ; Найдем пот-во  $(x_2, x_1): x_2 - x_1 = 7 - k$   
 $|x_2 - x_1| = 7 - \frac{y_2 - y_1}{2} \leq 29$

$$\begin{cases} |x_2 - x_1| = |7 - k| \leq 29 \\ |y_2 - y_1| = |2k| \leq 26 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |7 - k| \leq 29 \\ |k| \leq 13 \\ k \geq 0 - \text{всё} \\ k \leq 0 - \text{всё} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 - x_1 = 7 - k \\ y_2 - y_1 = 2k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 16 - 7 = 9 = k = 0 - 16 + 9 \\ 7 + 13 = 20 = k = 1 \\ 7 - 13 = -6 = k = -3 \end{cases}$$
  
 Всего 26 вариантов  $\Rightarrow a_1 = 26$   
 $a_2 = 11$   
 $a_{12} = 11$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$(a^2+1)x^2 + 8ax(3-2b) + (64b^2+12^2-20 \cdot 12b) \leq 0 \quad \frac{160}{144} \quad \frac{16}{16}$$

$$\Delta_{x,y} = 16a^2(3-2a)^2 - (a^2+1)(64b^2+12^2-20 \cdot 12b) =$$

$$= 16 \cdot 9a^2 - 16 \cdot 12a^2b + 16 \cdot 4a^2b^2 - 16 \cdot 4a^2b^2 - 12^2a^2 + 16 \cdot 12a^2b - 64b^2 - 12^2 - 20 \cdot 12b =$$

$$= 16 \cdot 9a^2 - 12^2a^2 - 64b^2 - 12^2 - 20 \cdot 12b \leq 0$$

$$(16 \cdot 9 - 12^2)a^2 - 64b^2 - 12^2 - 16 \cdot 12b \leq 0$$

$$64b^2 + 16 \cdot 12b + 12^2 \geq (16 \cdot 9 - 12^2)a^2$$

$$\exists a \Rightarrow (16 \cdot 9 - 12^2)a^2$$

$$ax + y - 8b = 0$$

$$y = 8b - ax$$

$$(x^2 + y - 12)^2 - 16 \leq 0$$

$$a: \exists b$$

$$16a^2 \leq 64b^2$$

$$1 + a^2 \leq 4b^2 \quad a \leq \min$$

$$x^2 + (8b - ax - 12)^2 - 16 = x^2 + 64b^2 + a^2x^2 + 12^2 -$$

$$= 166ax - 16 \cdot 12b + 24ax - 16 =$$

$$= (a^2+1)x^2 + 8ax(3-2b) + (12^2 + 64b^2 - 16 \cdot 12b - 16) \leq 0$$

$$\Delta_{x,y} = 16a^2(3-2a)^2 - (a^2+1)(12^2 + 64b^2 - 16 \cdot 12b - 16) =$$

$$= 36a^2 - 4 \cdot 12a^2b + 16b^2a^2 - 12^2a^2 - 64b^2a^2 +$$

$$+ 16 \cdot 12a^2b + 16a^2 = 16 \cdot 9a^2 - 16 \cdot 12a^2b + 16 \cdot 4a^2b^2 -$$

$$- 12^2a^2 - 64a^2b^2 + 16 \cdot 12ba^2 + 16a^2 - 12^2 - 64b^2 + 16$$

$$+ 16 \cdot 12b + 16 = (16 \cdot 9 - 12^2)a^2 + 16a^2 - 64b^2 \leq 0$$

$$(16 \cdot 9 - 12^2)a^2 \leq 64b^2$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$(a^2+1)x^2 + 2x(988) + (646^2 - 166 \cdot 15) \leq 0$   
 $\Rightarrow 0 \leq 0$   
 $\frac{0}{4} = a^2(188)^2 - (a^2+1)(646^2 - 166 \cdot 15) = x^2 + 12^2 - 16^2 = 0$   
 $\frac{0}{4} = a^2(1 - 166 + 646^2) - (a^2+1)(646^2 - 166 \cdot 15) = x^2 = 48$   
 $x = 4\sqrt{3} \leq 646^2 - 166 \cdot 15$   
 $\leq x \leq 16a^2$   
 $a: \exists 6$   
 $= 6a^2 - 646^2 + 166 + 15 \leq 0$   
 $a: \exists 6: 16a^2 \leq 646^2 - 166 \cdot 15 = 16ax$   
 $646^2 - 166ax + 9 - 88 = 0 \Rightarrow y = 86 - ax$   
 $x^2 + 9^2 - 1 \geq 0 \Rightarrow x^2 + (86 - ax)^2 \geq 1$   
 $60 = 2 \cdot 646 \cdot 8$   
 $x^2 + 646^2 - 1696ax + a^2x^2 \geq 1$   
 $16a^2 \geq 1$   
 $(a^2+1)x^2 - 1696ax + 646^2 - 1 \geq 0$   
 $\frac{0}{4} = 64a^2b^2 - (a^2+1)(646^2 - 1) = 64a^2b^2 - 64a^2b^2 + a^2 - 646^2 + 1 = a^2 - 646^2 + 1 \geq 0$   
 $a^2 \geq 646^2 - 1$   
 $ax \quad y = 86 - ax$   
 $(245 - 12)^2 - 16 \leq 0$   
 $-1696ax + a^2x^2 - 16 \leq 0$   
 $x^2 + (86 - ax - 1)^2 - 16 \leq 0$   
 $x^2 + 646^2 + a^2x^2 + 1 = 166$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \geq \sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 6x^2 - 3x + 3 + 2\sqrt{\dots}$$

$$6x^2 - 3x + 3 = 0; \Delta = 9 - 160 = -149 < 0$$

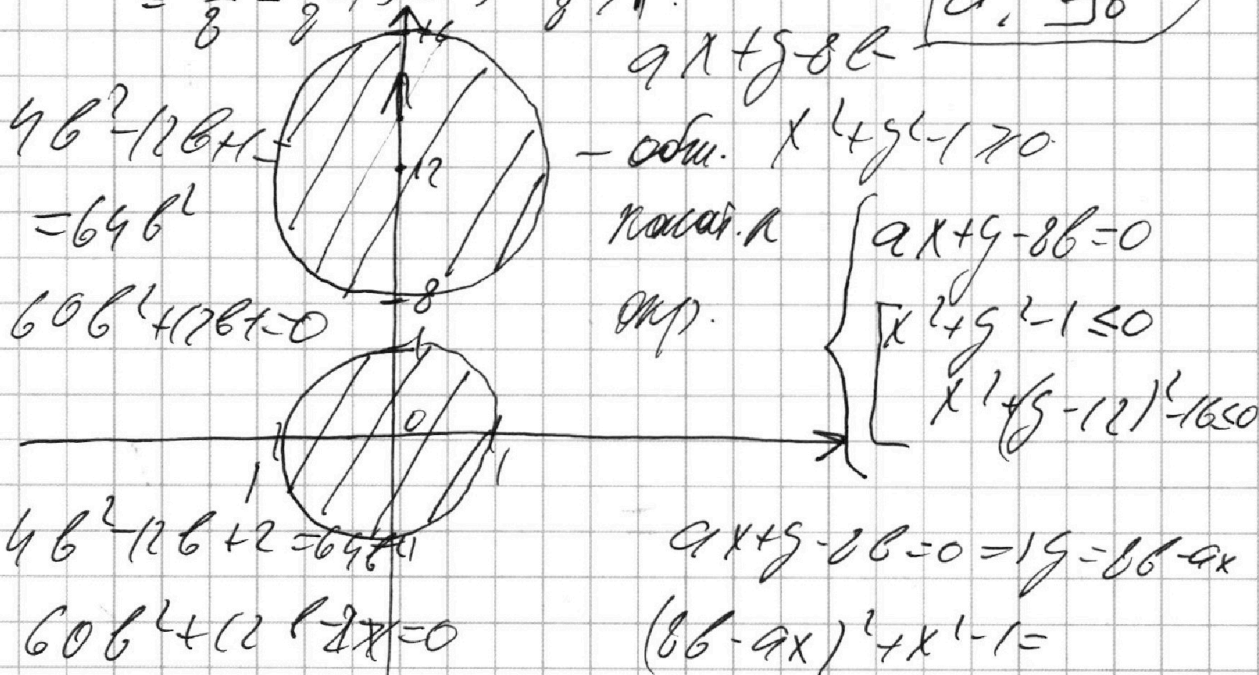
$$x_0 = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

$$D = 39 \quad b_{1/2} = \frac{-3 \pm \sqrt{39}}{2}$$

$$2a + 6x^2 - 3x + 3 \geq 6 \cdot \frac{1}{16} - \frac{3}{16} + 3 = \frac{3}{8} - \frac{3}{16} + 3 =$$

$$= \frac{3}{8} - \frac{6}{16} + 3 = 3 - \frac{3}{8} \geq 1$$

$a \in [36]$



$$= ax^2 + 16ax + 646^2 + x^2 - 1 = (a^2 + 1)x^2 - 16ax + 646^2 - 1 \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq 0$$

$$64a^2b^2 - (a^2 + 1)(646^2 - 1) = 64a^2b^2 - 646^2 + 1$$

$$+ a^2 - 646^2 + 1 = a^2 - 646^2 + 170, \forall a \in \mathbb{R} \exists b = 0$$

$$x^2 + (86 - ax - 12)^2 - 16 = x^2 + 646^2 + a^2x^2 + 2x^2 - 2 \cdot 86 \cdot 12 - 1696x + 24ax = \frac{(a^2 + 1)x^2}{646^2 + 12^2 - 1696} + 8ax(3 - 2a)$$



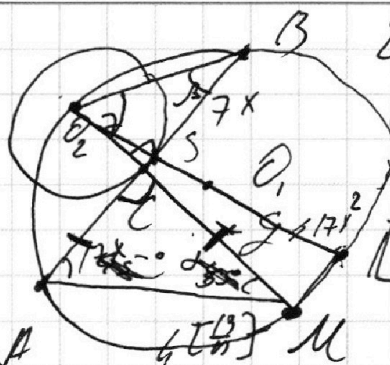
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

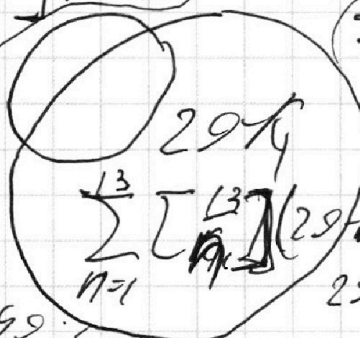


$29 \cdot 26 \cdot \text{Eqd} = \frac{1}{x}$   
 $29 \cdot 26 \cdot (13 \cdot 26 + 1)$   
 $k=1:6$   
 $O_1 T = 13 \cdot 0, 1; 2; \dots; 23$   
 $O_2 S + ST = 13 \cdot k \cdot i / 10 - k, \text{ m.} - x$   
 $0; 1; \dots; 29 \cdot k$   
 $k=0: 29 \cdot 26$   
 $29 \cdot 26$

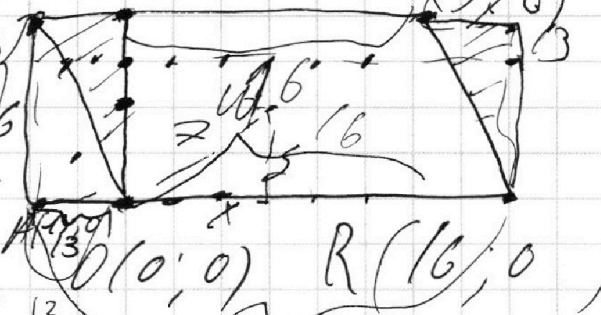
$\sum_{n=0}^{26} \left[ \frac{26}{2n} \right] (10-k) - 6 \square$

$(7-k)(13-2)z = 7(7+17x^2)$

$\sqrt{x^2 + 5^2} = 29k$   
 $= 7$   
 $x^2 + 25 = 99$   
 $18 = k$



$(y_i, z_i): (26 \cdot 12) \cdot 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14; 15; 16$   
 $P(13; 16) 13 \times 26$   
 $29 \cdot 25$   
 $Q(3; 7)$



$5) \quad \begin{cases} g_2 - g_1 = 2k \\ x_2 - x_1 = 7 - k \end{cases}$

$x^2 = 99 - 2k$   
 $7 \cdot 14 = 7 \cdot 13 = 7$

$a_n = 29 \cdot 26 \cdot 13 - \text{выбр. } g \cdot 6 \square$   
 $d = -1$   
 $x_2 - x_1 = 6$   
 $13 \cdot 26 \cdot 13 \cdot 26 = 13(2 \cdot 13 \cdot 26(29+3)) = 13 \cdot 26 \cdot 16$   
 $7 \cdot 14 - (7+2+10+\dots+14+13) = 13(2 \cdot 13 \cdot 26(29+3)) = 13 \cdot 26 \cdot 16$   
 $- \text{выбр } g \cdot 6 \square$

$\sum \left[ \frac{29}{2n} \right] \left[ \frac{29}{2n} \right]$   
 $\frac{29}{2n}$

$\text{Отв. макс. } x_2 - x_1 = k$   
 $K=0: g_2 = g_1 \Rightarrow 16 - 7 = 9$

