



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 13



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $3^{11}7^{11}$ ,  $bc$  делится на  $3^{18}7^{16}$ ,  $ac$  делится на  $3^{21}7^{38}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .

2. [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-8ab+b^2}$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

3. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2-3x+4}-\sqrt{2x^2+x+3}=1-4x.$$

4. [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , диаметр  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC=1$  и  $BC=16$ . Найдите длину общей касательной к окружностям  $\omega$  и  $\Omega$ .

5. [4 балла] Ненулевые действительные числа  $x, y, z$  удовлетворяют равенствам

$$3x+2y=z \quad \text{и} \quad \frac{3}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{z}.$$

Найдите наибольшее возможное значение выражения  $\frac{3x^2-4y^2-z^2}{x^2-6y^2}$ .

6. [5 баллов] Из пункта  $A$  в пункт  $B$  выезжают одновременно велосипедист и мотоциклист. Оба они движутся с постоянной скоростью, и мотоциклист прибывает в пункт  $B$  на 2 часа раньше велосипедиста. Если бы велосипедист ехал со своей скоростью в течение того времени, что понадобилось мотоциклисту на дорогу от  $A$  к  $B$ , а мотоциклист – в течение того времени, что понадобилось велосипедисту на этот путь, то мотоциклист проехал бы на 96 километров больше. Если бы скорость каждого из них возросла на 6 км/ч, то велосипедист приехал бы в  $B$  на 1 час 15 минут позже велосипедиста. Найдите расстояние между  $A$  и  $B$ .

7. [6 баллов] Вписанная окружность  $\omega$  прямоугольного треугольника  $ABC$  с прямым углом  $B$  касается его сторон  $CA, AB, BC$  в точках  $D, E, F$  соответственно. Луч  $ED$  пересекает прямую, перпендикулярную  $BC$ , проходящую через вершину  $C$ , в точке  $Y$ ;  $X$  – вторая точка пересечения прямой  $FY$  с окружностью  $\omega$ . Известно, что  $EX=2\sqrt{2}XY$ . Найдите отношение  $AD:DC$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

 МФТИ

1  2  3  4  5  6  7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$ac : 3^{21}$$

$$ab : 3^{11}$$

$$bc : 3^{18}$$

Тогда  $a^2 b^2 c^2 : 3^{50}$

Уже тогда из того что числа  $\geq 0$

то  $abc : 3^{25}$

$$abc : ac$$

$$ac : 7^{38}$$

Значит  $abc : 7^{38}$

Тогда  $abc : 3^{25} 7^{38}$  и  $abc \geq 3^{25} 7^{38}$

Пример  $a = 3^7 7^{19}$   $b = 3^4$   $c = 3^{14} 7^{19}$

Тогда  $abc = 3^{25} 7^{38}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

МФТИ



1  2  3  4  5  6  7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№2

Докажем, что если  $a$  и  $b$  несократима  
то  $a+b$  и  $ab$  взаимно просты  
а и  $b$  взаимнопросты и пусть  
 $a+b$  и  $ab$  не?

тогда пусть  $k$  — общий делитель  
 $k$ , возьмем из  $k$  какой  
множитель, который присутствует  
только в  $a$  или в  $b$  (если

$a=1$ ), если его нет то  
 $a+b=2$   $ab=1$  взаимнопросты

без уменьшения общности возьмем  
из  $a$ -мнж тогда  $a$  делится  $k$   
 $ac$  — делится на  $k$ , а  $b$  нет  
тогда и  $a+b \nmid k$ , и вот и наоборот  
т.е.  $a+b$  и  $ab$  взаимнопросты

Решим

$$a^2 - 8ab + b^2 \text{ как } \frac{a+b}{(a+b)^2 - 10ab}$$

Пусть  $ab$  сократима на  $S$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Взаимно простое  $10$

Тогда  $(a+b) : S$

$$(a+b)^2 : S$$

но  $a, b$  на  $S$  не делится

т.к. взаимно простое с  $a+b$

Тогда ~~то~~ если  $10ab$  делится  
на  $S$  то  $10$  делится на  $S$

$$\text{и } S \leq 10$$

Ответ:  $10$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Возьмем  $2x^2 - 3x + 4$  на  $x$

$2x^2 + x + 3$  на  $y$

Тогда  $\sqrt{x} - \sqrt{y} = x - y$

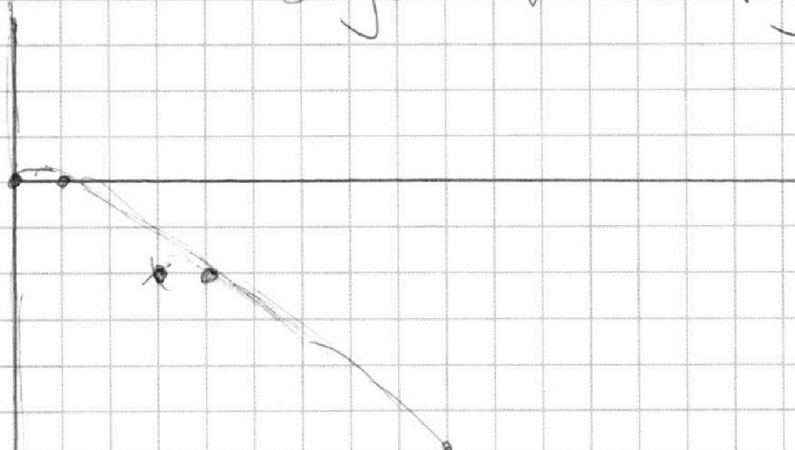
$$y - \sqrt{y} = x - \sqrt{x}$$

$$\sqrt{x} - x = \sqrt{y} - y$$

Рисуем график функции  $\sqrt{x} - x$

находим, что или  $x = y$

или  $x + y = 1$   $\sqrt{x} - x + \sqrt{y} - y = 1$



Если  $x = y$  то  $1 - 4x = 0$

подстановка получается  $x = \frac{1}{4}$  - при верный корень

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Если

$$\sqrt{x-x} + \sqrt{y-y} = 1, \text{ то}$$

$$\sqrt{x-x} - \sqrt{y-y} = 0$$

$$2(\sqrt{x-x}) = 1$$

$$\sqrt{x-x} = \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{x} = \frac{1}{2} + x$$

$$x = \frac{1}{4} + x^2 + x$$

$$0 = \frac{1}{4} + x^2$$

$$-\frac{1}{4} = x^2$$

Неверно

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

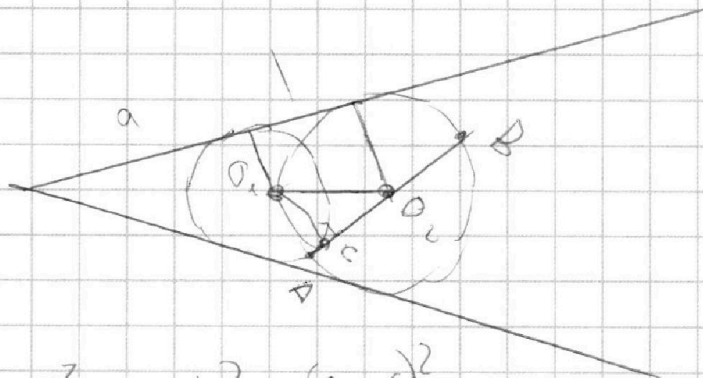
- 1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$R = \frac{16+1}{2} = 8,5$$



$$R^2 = r^2 + (O_2C)^2$$

$$R^2 - O_2C^2 = r^2$$

$$(8,5 - 4)(8,5 + 4) = r^2$$
$$4 = r$$

$$\frac{a}{r} = \frac{a+1}{R}$$

$$a = \frac{1}{R\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right)} = \frac{1}{\frac{R}{r} - 1}$$

$$1 = \sqrt{R^2 - (R-r)^2}$$

$$1 = \sqrt{(8,5 - 4)(8,5 + 4)} = \sqrt{4 \cdot 13} = 2\sqrt{13}$$

$$a = \frac{2\sqrt{13}}{\frac{8,5}{4} - 1}$$

$$a+1 = 2\sqrt{13} \left(1 + \frac{1}{\frac{8,5}{4}}\right) = 2\sqrt{13} \cdot \frac{8,5}{4}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Подставим вместо  $z^2$   $(3x+2y)^2$  получим

$$1) \frac{-6x^2 - 8y^2 - 12xy}{x^2 - 6y^2}$$

$$\frac{3}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{z}$$

$$3yz + xz = 2yx$$

$$3y(3x+2y) + x(3x+2y) = 2yx$$

$$9yx + 6y^2 + 3x^2 = 0$$

$$3yx + 2y^2 + x^2 = 0$$

$$D = 9x^2 - 4 \cdot 2 \cdot x^2 = x^2 \quad \sqrt{D} = x$$

$$y_1 = \frac{-3x + x}{4} = -0,5x$$

$$y_2 = \frac{+3x - x}{4} = 0,5x$$

Подставим в  $\frac{1}{y}$   $y_2$

$$\frac{-6x^2 - 8y^2 + 12x^2}{x^2 - 6y^2} = \frac{-2x^2}{-5x^2} = 0,4$$

Подставим  $y_1$

$$\frac{-6x^2 - 2x^2 + 6x^2}{x^2 - 1,5x^2} = \frac{-2x^2}{-0,5x^2} = 4 \quad \text{Ответ: 4}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

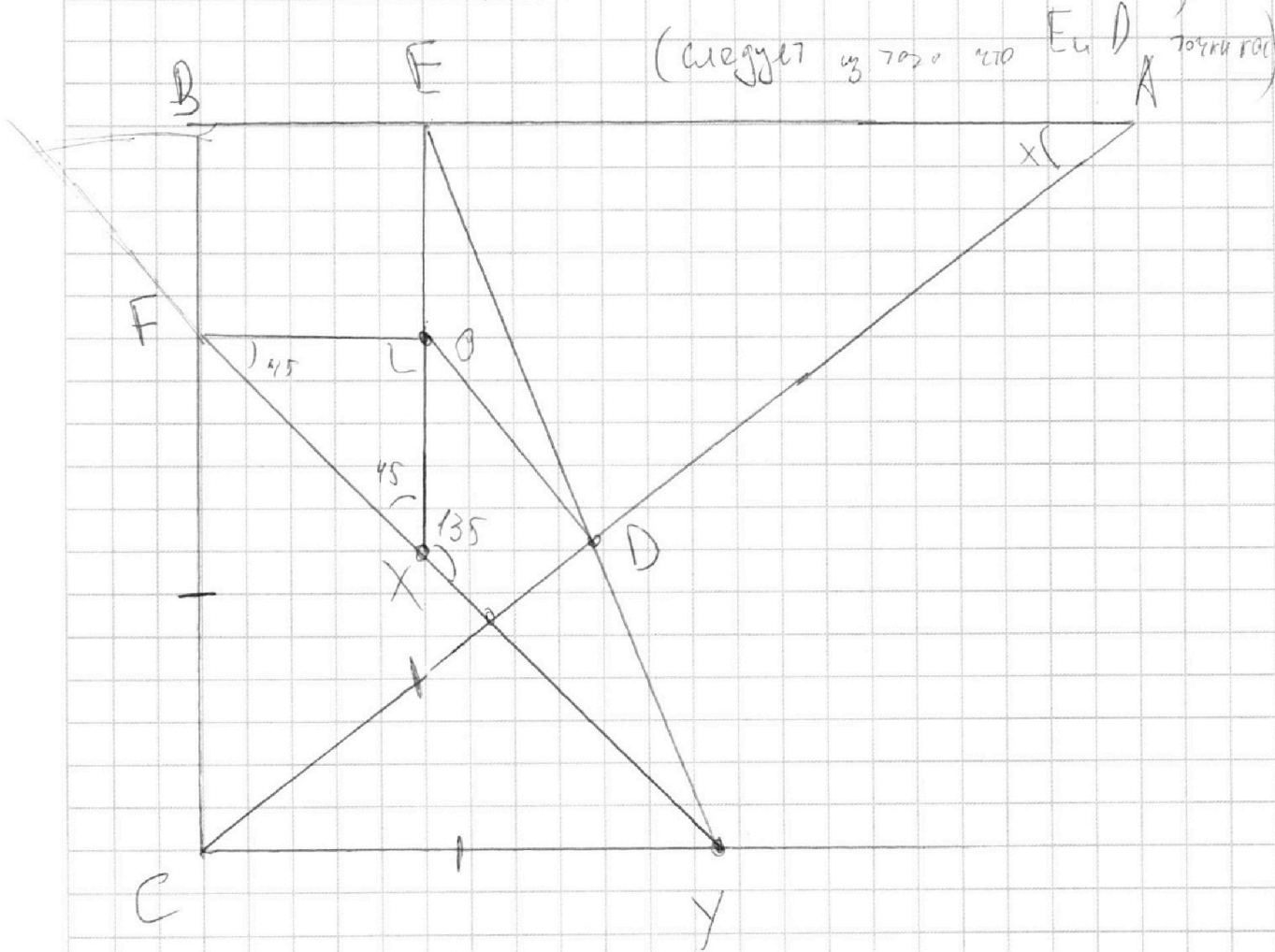
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пусть  $\angle A = x$  тогда  $\angle EDA = 90 - 0,5x$   
 $\angle CDY = 1$  также  $\angle AED = \angle DYC = 90 - 0,5x$   
(следует из того что  $E, D$  точки касания)



Тогда  $CD = CY$

$F$  и  $D$  точки касания  $CF = CD \Rightarrow CF = CY$

Тогда  $\angle CFY = 45$  т.к. равнобедр  $\triangle$

т.к  $\angle FO = \angle FX = 45 = \angle XFO$

и  $FO = OX$ , то  $\angle FOX = 90$  и

$BF \parallel OX$ , значит  $EOX$  прямая

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$EX = 2R$$

$$DO = R$$

Выражая  $XO^2$

используя  $\angle DFE = 90^\circ$   
двумя способами

получаем

$$XO^2 - DO^2 = XF^2 - DF^2$$

Заметим что  $XO = \frac{R}{\sqrt{2}}$

$$DF^2 - DO^2 = 4R^2 - \frac{R^2}{2}$$

$$DF^2 - DO^2 = 3,5R^2$$

По теореме кос

$$\sqrt{EX^2 + XO^2} - 2 \cos(\angle XO) (EX) = DF + DO$$

Подставляем  $\cos 135 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$   
и  $EX$  и  $XO$

$$\text{получим } DF + DO = \sqrt{6,5} R$$

$$\text{Тогда } DF - DO = \frac{3,5}{\sqrt{6,5}} R$$

$$2DF = R \left( \frac{3,5}{\sqrt{6,5}} + \sqrt{6,5} \right) = R \left( \frac{10}{\sqrt{6,5}} \right)$$

$$DF = \frac{5}{\sqrt{6,5}}$$

$$DO = \frac{1,5}{\sqrt{6,5}}$$

$$\frac{DF}{DO} = \frac{5}{1,5} = \frac{10}{3} = 3 \frac{1}{3}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

EAD

поговети

~~CD~~

но это и

$$\frac{DE}{DY} = \frac{AD}{DC} = 3\frac{1}{3}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7



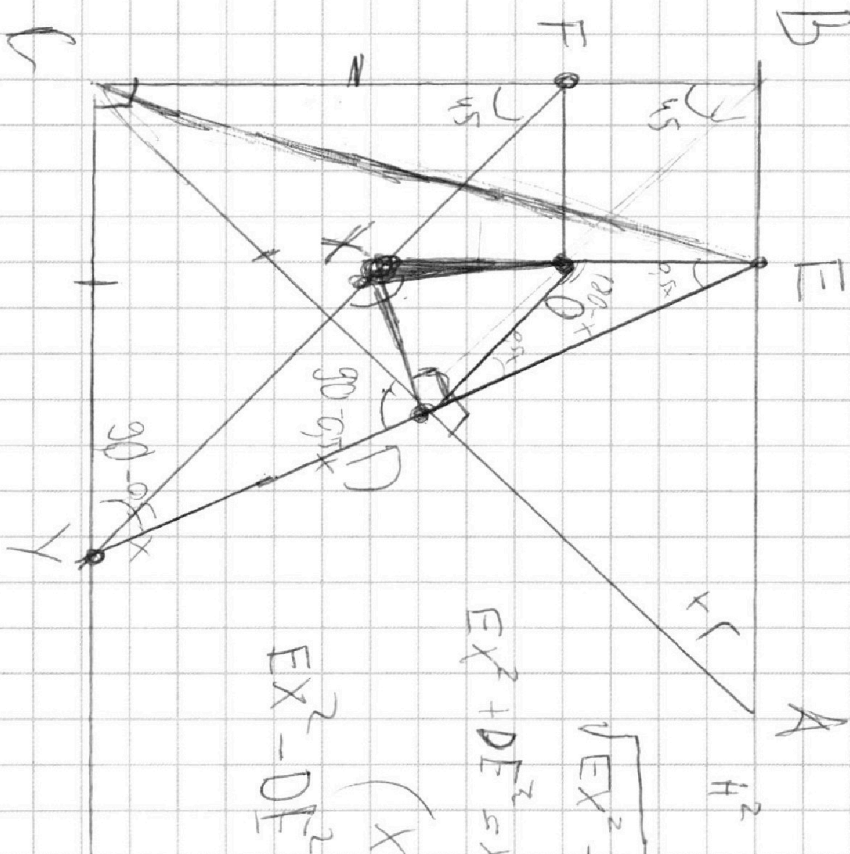
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{r} 4x^4 - 4x^3 + 11x^2 - 5x + 12 \quad | \quad x-3 \\ - 4x^4 + 4x^3 \\ \hline 11x^2 - 5x + 12 \\ - 11x^2 + 33x \\ \hline 28x + 12 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 11x^2 - 5x + 12 \\ - 11x^2 + 33x \\ \hline 28x + 12 \end{array}$$

$$2R = \sqrt{EX} = 2\sqrt{XY}$$

$$EOX \text{ прямая } CD = CY$$



$$\begin{aligned} \sqrt{EX^2 + DE^2} &= XY^2 \\ EX^2 + DE^2 &= XY^2 + DY^2 \\ (XY - EX) & \dots \\ EX^2 - DE^2 &= XY^2 - \dots \end{aligned}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$(DC + R)^2 + (DA + R)^2 = (DA + DC)^2$$

$$DA^2 + 2DA \cdot DC + DC^2 = DC^2 + R^2 + 2DCR + 2DAR + R^2 + DA^2$$

$$(DA)(DC) = R^2 + DC \cdot R + DA \cdot R$$

$$EX^2 - DE^2 = XY^2 - DY^2 = \sqrt{6,5} R$$

$$EX^2 - XY^2 = DE^2 - DY^2$$

$$R^2 \frac{(ky)^2 - y^2}{4,5} = \frac{R}{\sqrt{2}} \quad R = \frac{4,5}{\sqrt{6,5}} R = \frac{4,5}{\sqrt{6,5}} R$$

$$4R^2 + \frac{R^2}{2} = DE^2 - DY^2$$

$$4,5R^2 = DE^2 - DY^2$$

$$(DC + DA)^2 + 4(DA)(DC)$$

$$\pm (DC - DA)$$

$$kx^2 = \frac{(k^2 - 1)y^2}{4,5}$$

$$2DE = R \left( \sqrt{6,5} + \frac{4,5}{\sqrt{6,5}} \right) \quad \frac{R^2}{2} + 4R^2 - 2 \cos 135^\circ R^2$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$a + b \equiv a \pmod{x}$$

$$ab \equiv 0 \pmod{x}$$

$$V_A t = V_B (t+2)$$

$$V_A (t+2) = V_B t + 96 \text{ кмч}$$

$$(V_A + 6) t_2 = (V_B + 6) \left( \frac{t}{2} + 1,25 \right)$$

$$V_A + 2 = 96 \text{ кмч} - V_B + 2$$

$$V_A + V_B = 48 \text{ кмч}$$

$$V_A t_2 + 6 t_2 = V_B \frac{t}{2} + 6 t_2 + 1,25 V_B + 7,5$$

$$V_A t_2 = V_B \frac{t}{2} + 1,25 V_B + 7,5$$

$$\frac{V_A^2 t}{V_A + 6} = \frac{V_B^2 (t+2)}{V_B + 6} - 1,25 V_B + 1,25 V_B + 7,5$$

$$\frac{V_A^2 t}{V_A + 6} = \frac{V_B^2 (t+2)}{V_B + 6} + 7,5$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ca : 3^{21} 7^{28}$$

$$ab : 3^{11} 7^{11}$$

$$bc : 3^{18} 7^{16}$$

$$\text{Тогда } ca \cdot bc \cdot ab : 3^{21} 7^{28} \cdot 3^{11} 7^{11} \cdot 3^{18} 7^{16}$$

$$a^2 b^2 c^2 : 3^{50} 7^{65}$$

Т.к.  $a^2 b^2 c^2$  квадрат натурального числа  
степень входящая в него простого

множителя четна

Тогда верно

$$a^2 b^2 c^2 : 3^{50} 7^{66}$$

Извлечем Пусть  $a^2 b^2 c^2 : 3^{50} 7^{66} = X$

$$a^2 b^2 c^2 = X \cdot 3^{50} 7^{66}$$

Все числа  $\geq 0$ , поэтому

$$abc = \sqrt{X} \cdot 3^{25} 7^{33}$$

Учитывая, что  $X = \text{целое}$ , то  $ac \geq 1$

и  $abc \geq 3^{25} 7^{33}$ , причем равенство

достигается при  $1$ , тогда  $abc_{\min} = 3^{25} 7^{33}$

Пример

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{x} \neq \sqrt{y} = x - y$$

$$\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1) = \sqrt{y}(\sqrt{y} - 1) \sqrt{x} - x = \sqrt{y} - y$$

$$x = y \quad 2x^2 + 3x + 4$$
$$2x^2 + x + 3 - 2x^2 = \frac{1}{8}x^2 - \frac{3}{4}x + 4$$
$$x = \frac{1}{4}$$
$$x + y = 1 + \frac{1}{4} + 3$$

$$\sqrt{t} - \sqrt{t + 1 - 4x}$$

$$(1 - 4x)^2 = \cancel{t} - \cancel{t} + 1 - 4x + \sqrt{t(t + 1 - 4x)}$$

$$(1 - 4x)^2 = 1 - 4x + \sqrt{t(t + 1 - 4x)}$$

$$(1 - 4x)(1 - 4x - 1) = \sqrt{t(t + 1 - 4x)}$$

$$-(1 - 4x)4x = \sqrt{t(t + 1 - 4x)}$$

$$4x(4x - 1) = \sqrt{t(t + 1 - 4x)}$$

$$= \sqrt{x} - \sqrt{y} = x - y$$

$$4x^2 - 2x + 1 = 1$$
$$4x^2 - 2x + 6 \leq 0$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$y = -x$$

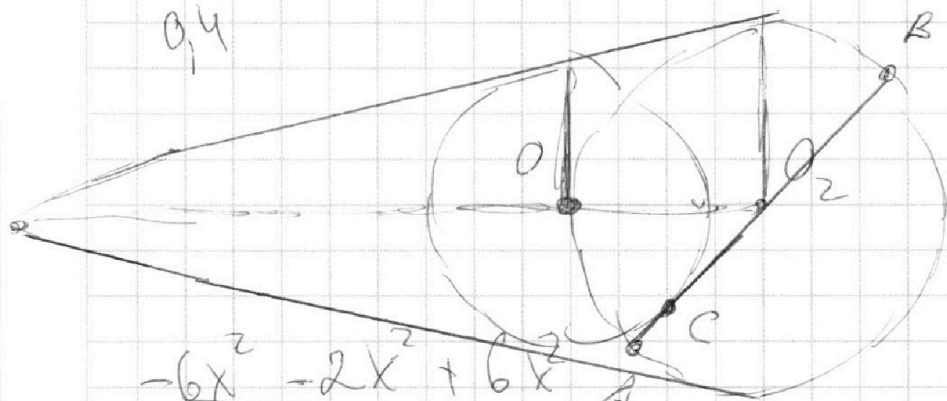
$$y = -0,5x$$

$$\frac{-6x^2 - 8x^2 + 12x^2}{-2x^2}$$

$$\frac{x^2 - 6x^2}{-5x^2} \quad x^2 - 6y^2$$

$$(x - \sqrt{6}y)^2 = x^2 + 6y^2 - 2\sqrt{6}xy$$

0,4



$$\frac{-6x^2 - 2x^2 + 6x^2}{x^2 - 15x^2}$$

$$7,5^2 = R^2 + (x+R)(x+R) - R^2$$

$$\frac{-3x + x}{4} = y$$

$$(3x+2y)^2 = 9x^2 + 4y^2 + 12xy$$

$$\frac{-6x^2 - 8y^2 - 12xy}{x^2 - 6y^2}$$

$$3y^2 + x^2 = 2xy$$

$$3y(3x+2y) + x(3x+2y) = 2xy$$

$$9yx + 6y^2 + 3x^2 = 0$$

$$3yx + 2y^2 + x^2 = 0$$

$$D = 9x^2 - 8x^2 = x^2$$

$$\begin{matrix} 6 & 4 & 8 \\ \times & 6 & \end{matrix}$$

- 1 -6
- 2 -4
- 3 -2
- 4 0
- 5 0



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1     2     3     4     5     6     7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{l}
 3 \\
 \times ca : 3^{21} \\
 \times bc : 3^{18} \\
 \times ab : 3^{19} \\
 \hline
 a^2 b^2 c^2 : 3^{50} \\
 abc : 3^{25}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 2 \rightarrow 9 \\
 b = 3^{14} \quad a = 3^7 \\
 c = 3^{14}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 (a+b) \\
 \hline
 (a^2 + 2ab + b^2) - 10ab
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 a+b \\
 \hline
 (a+b)^2 - 10ab
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{then } a+b = ab \\
 (a+b) \\
 \hline
 \frac{ab}{a+b} \quad \frac{a}{b}
 \end{array}$$

Заметим, что  
Сократить на больше  
чем  $a+b$   
уже

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{3}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{z}$$

$$3yz + xz = 2xy$$

$$\frac{3x^2 - 4y^2 - (3x + 2y)^2}{x^2 - 6y^2} = \frac{3x^2 - 4y^2 - 9x^2 - 12xy - 4y^2}{x^2 - 6y^2}$$

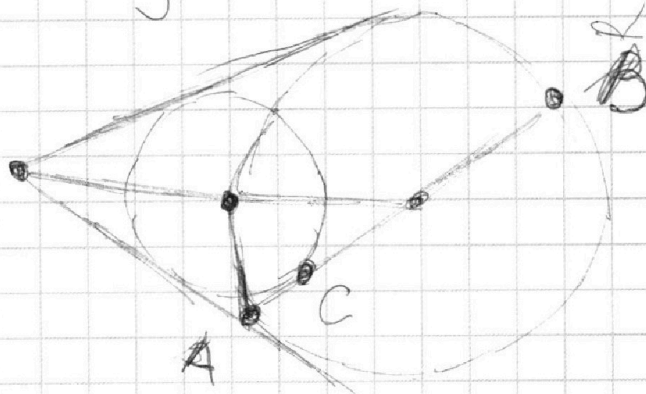
$$= \frac{-6x^2 - 8y^2 - 12xy}{x^2 - 6y^2}$$

$$3y(3x + 2y) + x(3x + 2y) = 2xy$$

$$9yx + 6y^2 + 3x^2 + 2yx = 2xy$$

$$6y^2 + 3x^2 + 9xy = 0$$

$$2y^2 + x^2 + 3xy = 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} & (2x^2 - 3x + 4)(2x^2 + x + 3) \\ & = 4x^4 + 2x^3 + 6x^2 - 6x^3 - 3x^2 - 9x + 8x^2 + 4x + 12 \\ & = 4x^4 - 4x^3 + 11x^2 - 5x + 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 4x^2 - 2x + 7 + \sqrt{m} = 1 - 8x + 16x^2 \\ & \sqrt{m} = 12x^2 - 6x - 6 \end{aligned}$$

$$\sqrt{m} = 6(2x^2 - x - 1)$$

$$m = 36(4x^4 + x^2 + 1 - 4x^3 - 4x^2 + 2x)$$

$$1 + 8 = 9$$

$$\frac{1-3}{4} = -\frac{1}{2} \quad 1$$

$$\sqrt{m} = 6(x + 0,5)(x - 1)$$

(сократи на)

множ

возьмем простой

$$\frac{ab}{a+b}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$V_m^2 t (V_B + b) = V_B^2 (t + 2) (V_m + b) + 7,5$$

$$2S = (V_m + V_B) t + V_B^2$$

$$S = 24 \frac{V_m}{2} t + V_B$$

$$\frac{S}{V_m + b} = \frac{S}{V_B + b} + 12,5$$

$$V_B (t + 2) (V_B + b) = V_m b (V_m + b) + 12,5$$

$$d \frac{ab}{(a+b)^2} - 10ab$$

Пусть  $m \ll a+b$

Тогда  $10ab \equiv 0 \pmod{m}$

$a+b \equiv 0 \pmod{m}$

Пусть  $a \equiv k \pmod{m}$

$b \equiv c \pmod{m}$

$ab \equiv 0 \pmod{m}$

$kc \equiv 0 \pmod{m}$

$a+b \equiv 0 \pmod{m}$

$k+c \equiv 0$



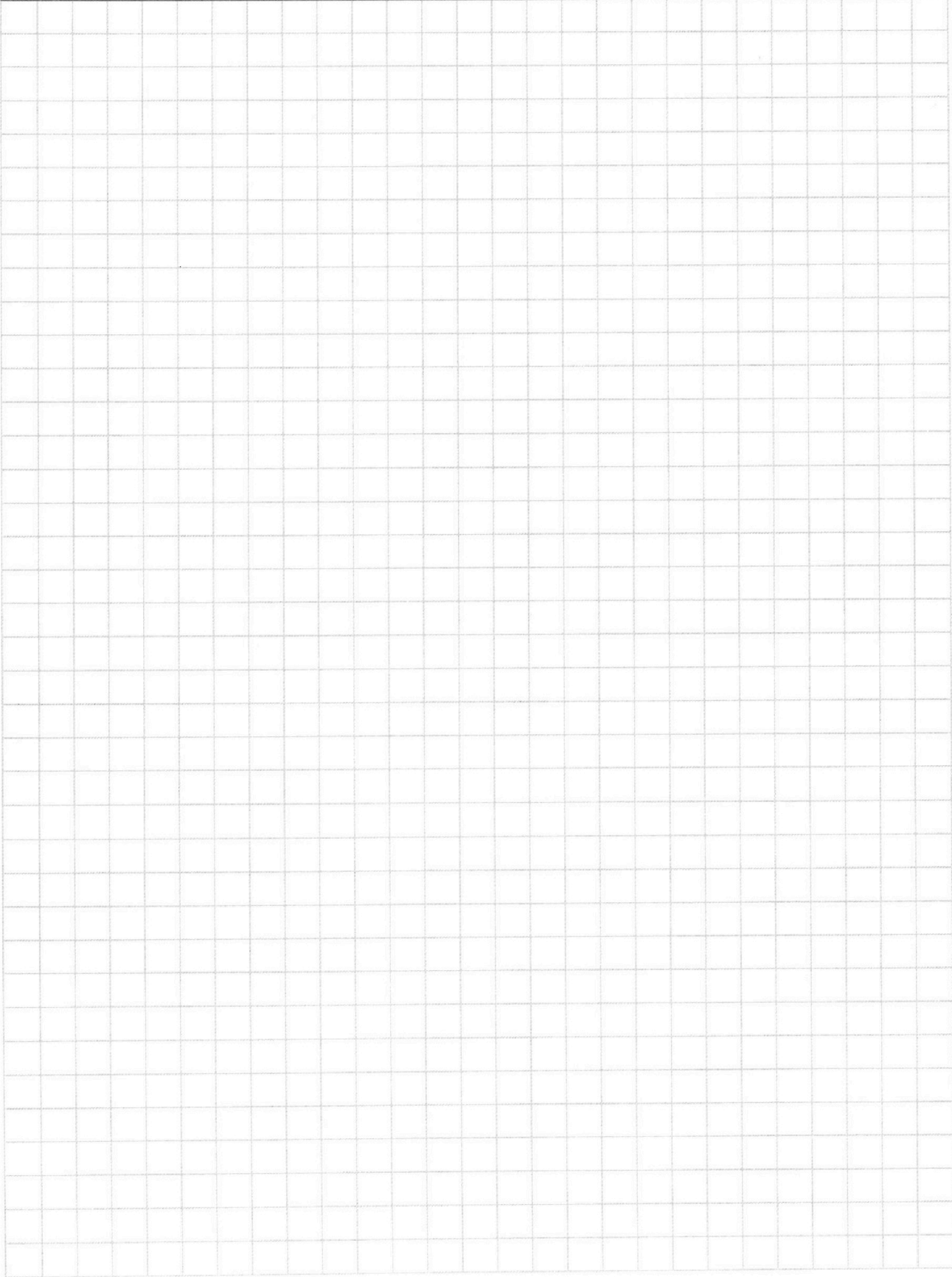
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

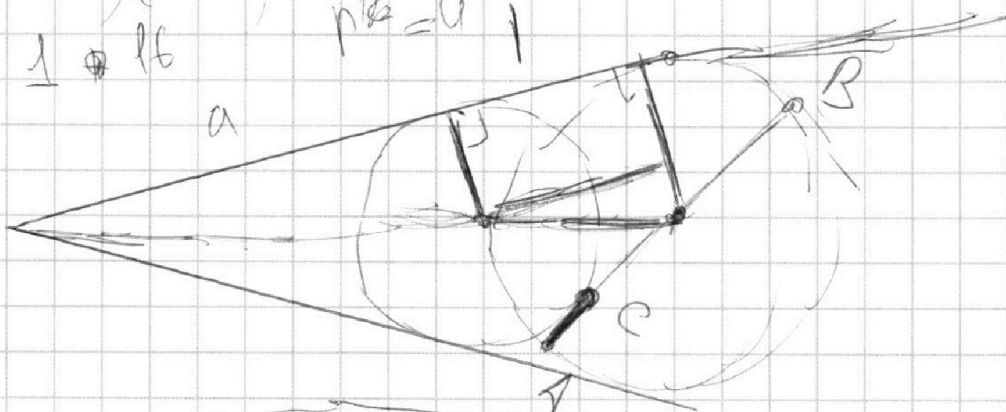


$$R^2 + P^2 = r^2 + 7,5^2$$

$$(R - 7,5)(R + 7,5) = r^2$$

$$1 \cdot 16$$

$$r^2 = 4$$



34

68

52

$$\sqrt{(R-r)^2 + 1^2} = R - r$$

$$\frac{a}{r} = \frac{a+1}{R}$$

$$2Rr - r^2$$

$$12 \cdot 4 - 16 = 48$$

$$a \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right) = \frac{1}{R}$$

$$\frac{R-r}{r}$$

$$a = \frac{1}{R \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right)}$$

$$a = \left( \frac{R}{r} - 1 \right)$$