



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 14



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $3^{14}7^{13}$ ,  $bc$  делится на  $3^{19}7^{17}$ ,  $ac$  делится на  $3^{23}7^{42}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .

2. [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-9ab+b^2}.$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

3. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2-5x+6}-\sqrt{3x^2+x+1}=5-6x.$$

4. [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , диаметр  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC=1$  и  $BC=25$ . Найдите длину общей касательной к окружностям  $\omega$  и  $\Omega$ .

5. [4 балла] Ненулевые действительные числа  $x, y, z$  удовлетворяют равенствам

$$5x-y=3z \quad \text{и} \quad \frac{8}{x}+\frac{1}{y}=\frac{15}{z}.$$

Найдите наименьшее возможное значение выражения  $\frac{25x^2-y^2-z^2}{y^2+3z^2}$ .

6. [5 баллов] Из пункта  $A$  в пункт  $B$  выезжают одновременно велосипедист и мотоциклист. Оба они движутся с постоянной скоростью, и мотоциклист прибывает в пункт  $B$  на 1 час раньше велосипедиста. Если бы велосипедист ехал со своей скоростью в течение того времени, что понадобилось мотоциклисту на дорогу от  $A$  к  $B$ , а мотоциклист – в течение того времени, что понадобилось велосипедисту на этот путь, то мотоциклист проехал бы на 49 километров больше. Если бы скорость каждого из них возросла на 7 км/ч, то велосипедист приехал бы в  $B$  на 36 минут позже велосипедиста. Найдите расстояние между  $A$  и  $B$ .

7. [6 баллов] Вписанная окружность  $\omega$  прямоугольного треугольника  $ABC$  с прямым углом  $B$  касается его сторон  $CA, AB, BC$  в точках  $D, E, F$  соответственно. Луч  $ED$  пересекает прямую, перпендикулярную  $BC$ , проходящую через вершину  $C$ , в точке  $Y$ ;  $X$  – вторая точка пересечения прямой  $FY$  с окружностью  $\omega$ . Известно, что  $EX = \sqrt{2}XY$ . Найдите отношение  $AD : DC$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N1

1) Пусть стержни вхожее 3 и 7 в шина  $a, b$  и  $c$  —

$a_3, b_3, c_3$  и  $a_7, b_7$  и  $c_7$ , соответственно.  $\Rightarrow$

из условия:

$$\begin{cases} a_3 + b_3 \geq 14 & (1) \\ a_7 + b_7 \geq 13 & (2) \\ b_3 + c_3 \geq 19 & (3) \\ b_7 + c_7 \geq 17 & (4) \\ a_3 + c_3 \geq 23 & (5) \\ a_7 + c_7 \geq 42 & (6) \end{cases}$$

Тогда  $(abc)_{\min} \geq 3^{(a_3+b_3+c_3)} \cdot 7^{(a_7+b_7+c_7)}$ .

2.)  $((1) + (3) + (5)) \mid : 2$

$$2 \cdot (a_3 + b_3 + c_3) \geq 56$$

$$a_3 + b_3 + c_3 \geq 28$$

пример:

$$a_3 = 9$$

$$b_3 = 5$$

$$c_3 = 14$$

3.)  $((2) + (4) + (6)) \mid : 2$

$$2 \cdot (a_7 + b_7 + c_7) \geq 72$$

$$a_7 + b_7 + c_7 \geq 36$$

пример:

$$a_7 = 21$$

$$b_7 = 0$$

$$c_7 = 15$$

но  $a_7 + c_7 \geq 42$ , а  $a_3, b_3, c_3, a_7, b_7, c_7 \geq 0$ .  $\Rightarrow$

$\Rightarrow a_7 + b_7 + c_7 \geq 42$ . пример:  $a_7 = c_7 = 21, b_7 = 0$

4.)  $(abc)_{\min} = 3^{(a_3+b_3+c_3)_{\min}} \cdot 7^{(a_7+b_7+c_7)_{\min}} =$

$$= 3^{28} \cdot 7^{42} \quad (\text{достигается при } a = 3^9 \cdot 7^{21}$$

$$b = 3^5 \cdot 7^0$$

$$c = 3^{14} \cdot 7^{21}$$

Ответ:  $3^{28} \cdot 7^{42}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



2.)

$$\begin{cases} \frac{L}{25m} - \frac{L}{258} = -1 \\ \frac{L}{25m+7} - \frac{L}{258+7} = -0,6 \end{cases}$$

$$\frac{84}{28} = 3 - 4$$

$$\frac{21 \cdot 345}{27}$$

$$3,5 \cdot 21 + 49$$

$$27 \cdot 4,5$$

$$\frac{1}{25m} - \frac{1}{258} = \frac{5}{3}$$

$$\frac{21}{3,5}$$

$$\frac{84}{55} - \frac{84}{38} = \frac{1}{258-2}$$

$$\frac{105}{63} = 3,5$$

$$2,4 - 3 = \frac{258 - 25m}{25m \cdot 258} = \frac{(25m+7)(258+7)}{25m \cdot 258} = \frac{5}{3}$$

$$(25m+7)(258+7)$$

$$\frac{12}{5} = 2,4$$

$$\frac{32}{27} \cdot \frac{4,5}{13,5} = \frac{108}{121,5}$$

$$\frac{735}{1225}$$

$$3 \cdot 21 + 49$$

$$4028$$

$$5 \cdot 25m \cdot 258 = 3 \cdot 25m \cdot 258 + 21 \cdot 25m + 21 \cdot 258 + 147$$

$$2 \cdot 25m \cdot 258 = 21 \cdot 25m + 21 \cdot 258 + 147$$

$$\frac{63}{112} = 27$$

$$\frac{84}{242} =$$

$$\begin{array}{r} 13 \\ \times 4,5 \\ \hline 315 \\ + 48 \\ \hline 1215 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 28 \\ \times 4 \\ \hline 112 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3,5 \\ \times 21 \\ \hline 40 \\ + 73,5 \\ \hline 122,5 \end{array}$$

$$25m = 49 - 258$$

$$\frac{28}{3} = 7,4$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N2

$$\frac{a}{b} - \text{несократимая} \Rightarrow (a, b) = 1.$$

$$\frac{a+b}{a^2 - 9ab + b^2} \text{ сократили на } m \Rightarrow \begin{matrix} a+b : m \\ a^2 - 9ab + b^2 : m \end{matrix}$$

1) Пусть  $a \equiv_{m} v_1$  ;  $b \equiv_{m} v_2$  ( $v_1 \neq 0, v_2 \neq 0$ , иначе  $(a, b) \neq 1$ , т.к.  $a+b : m$  и если, доо,  $v_1=0$ , то  $v_2=0 \Rightarrow (a, b) \neq 0$ ..!!)

a)  $a+b : m \Rightarrow v_1 + v_2 \equiv_{m} 0$

b)  $a^2 - 9ab + b^2 : m \Rightarrow v_1^2 - 9v_1v_2 + v_2^2 \equiv_{m} 0$

$$(v_1 + v_2)^2 - 11v_1v_2 \equiv_{m} 0$$

$$-11v_1v_2 \equiv_{m} 0$$

$$((v_1 + v_2)^2 : m \text{ по н.а.})$$

b.)  $v_1 + v_2 \equiv_{m} 0 \quad | \cdot v_1 \quad (v_1 \neq 0)$

$$v_1^2 + v_1v_2 \equiv_{m} 0$$

$$v_1v_2 \equiv_{m} -v_1^2 \Rightarrow 11v_1^2 \equiv_{m} 0$$

$$v_1 \neq 0 \Rightarrow 11 \equiv_{m} 0$$

$$11 = m$$



$$11 \geq m$$

2.) при  $a=1, b=10$  гребь  $\frac{a+b}{a^2 - 9ab + b^2} = \frac{11}{11}$

сократили на 11  $\Rightarrow m_{\max} = 11$ .

Ответ:  $m = 11$ .

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 3

$$\text{Пусть } \begin{cases} 3x^2 + 5x + 1 = A \\ 5 - 6x = B \end{cases} \quad (A+B = 3x^2 - 5x + 6)$$

$$\sqrt{3x^2 - 5x + 6} - \sqrt{3x^2 + x + 1} = 5 - 6x$$

||)

$$\sqrt{A+B} - \sqrt{A} = B \quad (\text{возведем в квадраты по правилу ур. а})$$

(A и A+B > 0)

$$A+B+A - 2\sqrt{(A+B)A} = B^2$$

$$(2A+B-B^2) = 2\sqrt{(A+B)A}$$

$$4A^2 + 2AB - 2AB^2 - 2AB - 2AB^2 + B^2 - B^3 - B^3 + B^4 = 4A^2 + 4AB \quad (\text{слева возведем в кв-ти})$$

$$B^4 - 2B^3 + B^2 - 4AB = 0$$

$$B^2(B^2 - 2B + 1 - 4A) = 0$$

||)

1.)  $B^2 = 0 \Rightarrow B = 0$

$$5 - 6x = 0$$

$$6x = 5$$

$$x = \frac{5}{6}$$

$$B = 0; A > 0, \text{ т.к. } x > 0$$

||)

уг. уса.

2.)  $B^2 - 2B + 1 - 4A = 0$

$$(5 - 6x)^2 - 2(5 - 6x) + 1 = 4(3x^2 + x + 1)$$

$$36x^2 + 25 - 60x - 10 + 12x + 1 = 12x^2 + 4x + 4$$

$$24x^2 - 52x + 12 = 0$$

$$12x^2 - 26x + 6 = 0 \Rightarrow$$

$$(B-1)^2 - 4A = 0$$

$$36x^2 - 48x + 16 = 12x^2 + 4x + 4$$

$$24x^2 - 52x + 12 = 0$$

$$12x^2 - 26x + 6 = 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№ 3 (продолжение)

$$\begin{aligned} X &= \frac{26 \pm \sqrt{26^2 - 4 \cdot 126}}{24} = \frac{26 \pm \sqrt{26^2 - 288}}{24} \\ &= \frac{26 \pm \sqrt{676 - 288}}{24} = \frac{26 \pm \sqrt{388}}{24} \\ &= \frac{13 \pm \sqrt{97}}{12} \end{aligned}$$

a.)  $x = \frac{13 + \sqrt{97}}{12}$

$$12 > x > 11$$

⇓

$$A > 0, \text{ т.к. } x > 0.$$

$$A+B = 3x^2 - 5x + 6 =$$

$$= x(3x-5) + 6 > 0,$$

$$\text{т.к. } x \text{ и } 3x-5 > 0.$$

⇓  
yg. yes.

b.)  $x = \frac{13 - \sqrt{97}}{12}$

$$\frac{2}{6} > x > \frac{1}{6}$$

⇓

$$A > 0, \text{ т.к. } x > 0$$

$$A+B = 3x^2 - 5x + 6 = x(3x-5) + 6 > 0$$

$$\text{т.к. } x(3x-5) > -\frac{6}{3} = -2$$

(пограничные пределы  
по модулю)  
 $\frac{2}{6} \left( \frac{3}{6} - 5 \right)$

⇓

yg. yes.

Ответ:  $x = \frac{5}{6}, x = \frac{13 \pm \sqrt{97}}{12}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

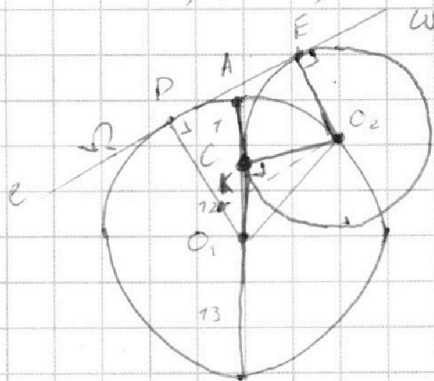
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№ 4

$AB = AC + BC = 26 \Rightarrow R_1 = 13.$

$O_1B = 13; AC = 1; CO_1 = 12$



$O_1$  и  $O_2$  - центры ок-тей

$\Omega$  и  $\omega$ .  $R_1$  и  $R_2$  - их радиусы.

1.)  $\omega \cap \Omega = C \Rightarrow O_2C \perp AC.$

Заметим т. П-радиус  $\Delta CO_2O_1$ :

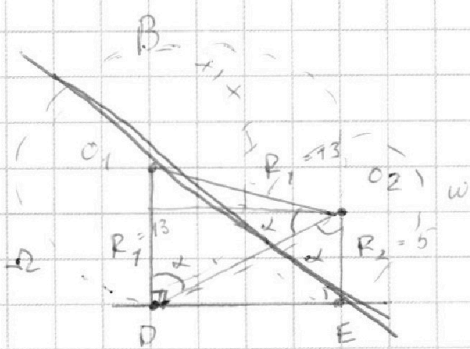
$R_1^2 = 12^2 + R_2^2.$

$R_2 = \sqrt{R_1^2 - 12^2} = 5.$

2.) пусть касательная -  $l$

$l \cap \Omega = D$

$l \cap \omega = E, O_1D \perp l, O_2E \perp l.$



3.)  $\angle O_1DO_2 = \angle O_1O_2D$ , т.к.  $O_1O_2 \perp DE$

$O_1D = R_1.$

$O_1D \parallel O_2E \Rightarrow \angle DO_2E = \alpha$

4.) а.)  $DO_2 = \frac{5}{\cos \alpha}$ , где  $\Delta O_2ED$

б.)  $DO_2^2 = 13^2 + 13^2 - 2 \cdot 13^2 \cdot \cos \alpha$

3.) отметим что  $O_1D$  равно длине  $k$ , что  $DK = O_2E = 5.$

$\Rightarrow O_1K = 13 - 5 = 8.$   $O_2K \parallel DE$ , так как  $KO_2ED$  -

прямоугольник.  $\Rightarrow DE = O_2K, O_2K = \sqrt{13^2 - 8^2} =$

$= \sqrt{105}.$

Ответ:  $\sqrt{105}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N 5

$$1.) 5x - y = 3z$$

$$5x = 3z + y \Rightarrow a.) 25x^2 = 9z^2 + y^2 + 6yz$$

$$b.) x = \frac{3z + y}{5}$$

$$2.) \frac{8}{x} + \frac{1}{y} = \frac{15}{z} \quad | \cdot xyz$$

$$\frac{8yz}{15y - z} = x = \frac{3z + y}{5}$$

$$40yz = 45yz - 3z^2 + 15y^2 - yz$$

$$3z^2 - 4yz - 15y^2 = 0$$

$$z_1 = 3y$$

$$z_2 = -\frac{5}{3}y$$

Дробь из уравнения:  $A = \frac{25x^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2} = \frac{8z^2 + 6yz}{y^2 + 3z^2}$

$$1.) z = 3y \Rightarrow A_1 = \frac{8 \cdot 9y^2 + 18y^2}{y^2 + 3 \cdot 9y^2} = \frac{45}{74}$$

$$2.) z = -\frac{5}{3}y \Rightarrow A_2 = \frac{55}{42}$$

$A_2 < A_1$ ,  $A_2$  наименьшее

$$y = 3; z = -5; x = -2,4$$

Ответ:  $\frac{55}{42}$ .



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№6

Пусть  $AB = L$ , скорости велосипедиста и мотоциклиста —  
 $v_8$  и  $v_m$ , соответственно. ( $v$  [км/ч],  $t$  [ч.м.])

Запишем уравнение из условия:

$$1.) \left\{ \begin{aligned} \frac{L}{v_m} + 1 &= \frac{L}{v_8} \end{aligned} \right.$$

$$2.) \left\{ \begin{aligned} v_8 \cdot \frac{L}{v_m} + 49 &= v_m \cdot \frac{L}{v_8} \end{aligned} \right.$$

$$3.) \left\{ \begin{aligned} \frac{L}{v_m + 7} + \frac{36}{v_8} &= \frac{L}{v_8 + 7} \end{aligned} \right.$$

$$\frac{L}{v_m + 7} + 0,8 = \frac{L}{v_8 + 7}$$

$$1.) \left\{ \begin{aligned} \frac{L}{v_m} - \frac{L}{v_8} &= -1 & (1) \\ \frac{v_8 L}{v_m} - \frac{v_m L}{v_8} &= -49 & (2) \end{aligned} \right.$$

(1) · (2)

$$\frac{\frac{1}{v_m} - \frac{1}{v_8}}{\frac{v_8}{v_m} - \frac{v_m}{v_8}} = \frac{1}{49}$$

$$\frac{\frac{v_8 - v_m}{v_m v_8}}{\frac{v_8^2 - v_m^2}{v_m v_8}} = \frac{1}{49}$$

$$\frac{v_8 - v_m}{(v_8 - v_m)(v_8 + v_m)} = \frac{1}{49}$$

$$v_8 + v_m = 49$$

$$v_m = 49 - v_8$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№6 (Продолжение)

$$2.) \begin{cases} \frac{L}{\sigma_m} - \frac{L}{\sigma_8} = -1 & (1) \\ \frac{L}{\sigma_{m+2}} - \frac{L}{\sigma_{8+2}} = -0,6 & (3) \end{cases} \quad \text{разделим (1) на (3)}$$

$$\frac{\frac{1}{\sigma_m} - \frac{1}{\sigma_8}}{\frac{1}{\sigma_{m+2}} - \frac{1}{\sigma_{8+2}}} = \frac{5}{3}$$

$$\frac{\frac{\sigma_8 - \sigma_m}{\sigma_8 \sigma_m}}{\frac{\sigma_8 - \sigma_m}{(\sigma_{8+2}) (\sigma_{m+2})}} = \frac{5}{3} \Rightarrow \frac{(\sigma_{8+2}) (\sigma_{m+2})}{\sigma_8 \sigma_m} = \frac{5}{3}$$

подставим  $\sigma_m = 49 - \sigma_8$  из п.1.

$$3 (\sigma_{8+2}) (\sigma_{m+2}) = 5 \sigma_8 (49 - \sigma_8)$$

$$168 \sigma_8 - 3 \sigma_8^2 + 1176 - 21 \sigma_8 = 245 \sigma_8 - 5 \sigma_8^2$$

$$2 \sigma_8^2 - 98 \sigma_8 + 1176 = 0$$

$$\sigma_8^2 - 49 \sigma_8 + 588 = 0$$

по т. Виета:

$$\sigma_8 = 28 \frac{\text{км}}{\text{ч}}; \quad \sigma_8 = 21 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$$

но  $\sigma_8 = 28 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$  не подходит, т.к. скорость  $\sigma_8 > \sigma_m$

$$\sigma_m = \sigma_8, \quad \text{а при } \sigma_8 = 21 \quad \sigma_m = 21 < 28$$

$$\sigma_8 = 21 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№6 (продолжение 2)

$$v_B = 21 \frac{\text{км}}{\text{ч}} \Rightarrow v_M = 28 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$$

$$(1): \quad \frac{L}{28} - \frac{L}{21} = -1$$

$$L \left( \frac{1}{28} - \frac{1}{21} \right) = -1$$

$$L \left( \frac{21 - 28}{27 \cdot 21} \right)$$

$$L \left( \frac{3}{9 \cdot 3} \right)$$

$$L \left( \frac{-7}{7 \cdot 3} \right) = -1$$

$$L \left( \frac{-1}{3} \right) = -1$$

$$L = \frac{7 \cdot 3}{2} \text{ км}$$

$$L = 94,5 \text{ км}$$

Ответ: 94,5 км.

$$L \left( \frac{3-4}{84} \right) = -1$$

$$L = 84 \text{ км}$$

Ответ: 84 км.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N4

1.)  $5x - y = 3z$

$5x = 3z + y \Rightarrow a) 25x^2 = 9z^2 + y^2 + 6yz.$

b.)  $x = \frac{3z + y}{5}$

2.)  $\frac{8}{x} + \frac{1}{y} = \frac{15}{z} \mid \cdot xyz$

$8yz + xz = 15xy.$

$\frac{8yz}{15y - z} = x = \frac{3z + y}{5}$

$40yz = 45yz - 3z^2 + 15y^2 - yz$

$3z^2 - 4yz - 15y^2 = 0$

$z_1 = \frac{4yz \pm \sqrt{196y^2}}{6} = \frac{4yz \pm 14y}{6}$

$z_1 = 3y$

$z_2 = -\frac{10}{6}y = -\frac{5}{3}y. \Rightarrow \begin{cases} z = 3y \\ z = -\frac{5}{3}y \end{cases}$

Рассмотрим грады из условия A:  $\frac{25x^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2} =$

$\frac{8yz + 6yz}{y^2 + 3z^2}$

1.)  $z = 3y$

$A_1 = \frac{8 \cdot 3y^2 + 18y^2}{y^2 + 3 \cdot 9y^2} = \frac{72 + 18}{1 + 27} = \frac{90}{28} = \frac{45}{14}$

Достигаем при:

$y = 3; z = -5; x = -2,4.$

2.)  $z = -\frac{5}{3}y.$

$A_2 = \frac{8 \cdot 25 \cdot \frac{y^2}{9} - 10y^2}{y^2 + \frac{25}{3}y^2} = \frac{\frac{110}{9}}{\frac{28}{3}} = \frac{110 \cdot 3}{3 \cdot 28} = \frac{110}{28} = \frac{55}{14} \Rightarrow A_2 < A_1.$

Ответ:  $\frac{55}{42}$



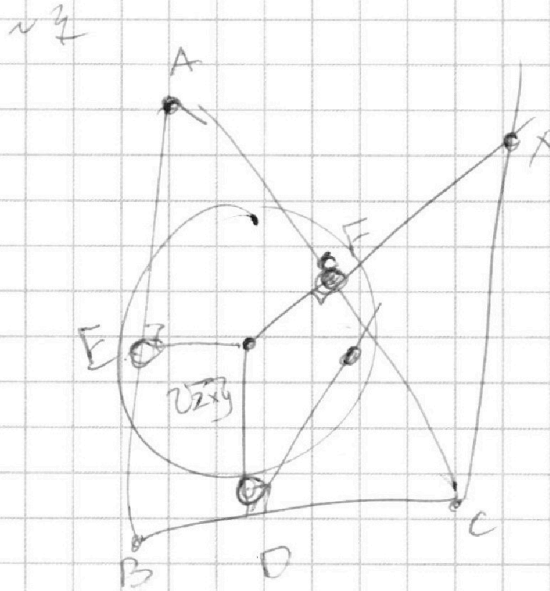
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Handwritten mathematical work on grid paper:

$$x - y = 3z$$

$$\frac{8}{x} + \frac{1}{y} = \frac{15}{z}$$

$$8yz + xz = 15xy$$

$$8yz + \frac{(3z+y)z}{5} = 3(3z+y)y$$

$$40yz + 3z^2 + yz = 45zy + 15y^2$$

$$41yz + 3z^2 = 45zy + 15y^2$$

$$0 = 4zy + 15y^2 - 3z^2$$

$$3z^2 + y^2 = 4zy + 16y^2$$

$$\frac{8z^2 + 6yz}{46y^2 + 4zy} = \frac{4z^2 + 3yz}{8y^2 + 2zy}$$

Other notes and calculations:

- $8 \cdot 3 \cdot (-5) = 15xy$
- $8 \cdot 3 \cdot (-5) = 120$
- $120 + 12 = -15 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3$
- $-108 = -15 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3$
- $25x^2 = 9z^2 + 6yz + y^2$
- $x = \frac{3z+y}{5}$
- $\frac{8z^2 + 6yz}{y^2 + 3z^2}$
- $\frac{120}{10} = 12$
- $\frac{120}{10} = 12$
- $\frac{120}{10} = 12$
- $\frac{120}{10} = 12$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- |                                     |                                     |                                     |                                     |                                     |                                     |                                     |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 1                                   | 2                                   | 3                                   | 4                                   | 5                                   | 6                                   | 7                                   |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



24

$$8yz + xz = 15yx$$

$$z = \frac{15yx}{8y+x}$$

$$5x - y = \frac{45yx}{8y+x}$$

$$(5x-y)(8y+x) = 45yx$$

$$40xy + 25x^2 - 8y^2 - yx = 45yx$$

$$25x^2 - 8y^2 = 6yx$$

$$8yz + xz = 15yx$$

$$x = \frac{8yz}{15y-z}$$

$$\frac{3z+y}{5} = \frac{8yz}{15y-z}$$

$$40yz = 45yz + 15y^2 - 3z^2 - zy$$

$$3z^2 = 4yz + 15y^2$$

$$3z^2 - 4yz = 15y^2$$

$$3z^2 - 4yz - 15y^2 = 0$$

$$4y = \sqrt{16y^2 + 180y^2}$$

$$4y = 14y$$

$$z = \frac{14y}{6}$$

$$z = \frac{7y}{3}$$

$$z^2 = \frac{49y^2}{9}$$

$$\frac{200}{9} - 10 = \frac{100}{9}$$

$$\frac{12}{5} = -24$$

$$2z^2 + 6yz$$

$$y^2 + 3z^2$$

$$\frac{55}{42} = 1 \frac{13}{42}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

**МФТИ**

- 1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



112

12

13

14

15

16

17

ал-геб. легко

полная

полная

полная

легко

не знаю

Решил ТУ

ТУ

АлГ

Геом

АлГ

Физ

Геом

$$\sqrt{3x^2 - 5x + 6} - \sqrt{3x^2 + x + 1} = 5 - 6x$$

$$3x^2 - 5x + 6 + 3x^2 + x + 1 - 2\sqrt{(3x^2 - 5x + 6)(3x^2 + x + 1)} = 36x^2 + 25 - 60x$$

$$6x^2 - 4x + 7 - 2\sqrt{y_{max}} = 36x^2 + 25 - 60x$$

$$56x - 2\sqrt{y_{max}} = 30x^2 + 18$$

$$28x - \sqrt{y_{max}} = 15x^2 + 9$$

$$y_{max} = (3x^2 - 5x + 6)(3x^2 + x + 1)$$

$$= 9x^4 + 3x^3 + 3x^2 - 15x^3 - 5x^2 - 5x + 18x^2 + 6x + 6 = 9x^4 - 12x^3 + 16x^2 + x + 6$$

$$20 + 12 = 32$$

всео самое  $4+4+5+4+4+5+6$

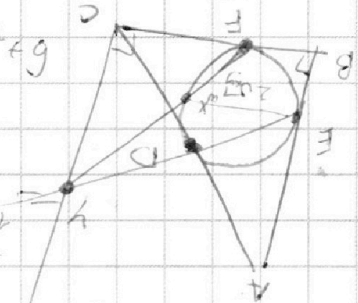
$$100 - 30 + 1889 / 2 = 11$$

$$100 - 30 + 100 = 11$$

$$122 - 99 = 23$$

$$\frac{1}{1-25} = 1 - 99 + 121 = (\frac{1}{1-25})^2 = \frac{1}{7} - 60 \cdot \frac{1}{7}$$

$$1 - 90 + 100$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№1

$$\begin{cases} a_3 + b_3 \geq 14 \\ c_3 + b_3 \geq 19 \\ c_3 + a_3 \geq 23 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 23 \\ 90,5 \quad | \quad 27 \\ \hline 57 \\ \hline 13,5 \\ \hline 10 \\ \hline 3 \\ \hline 21 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 23 \\ 74 \\ \hline 19 \\ \hline 5 \\ \hline 8 \\ \hline 12 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 28 \\ 3,5 \\ \hline 9,5 \quad | \quad 27 \\ \hline 84 \\ \hline 20,5 \\ \hline 4,5 \end{array}$$

$$\begin{cases} a_7 + b_7 \geq 13 \\ b_7 + c_7 \geq 14 \\ a_7 + c_7 \geq 42 \end{cases}$$

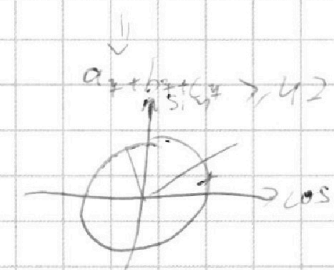
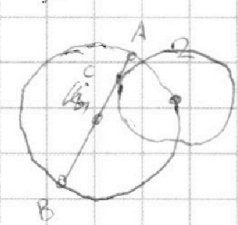
$$A = P_w \cos \alpha$$

$$A^2 = P_w^2 \cos^2 \alpha$$

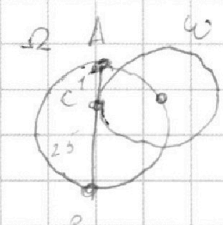
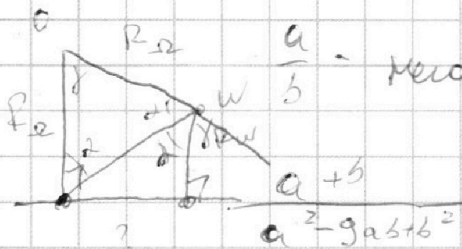
$$a_3 + b_3 + c_3 \geq 28$$

$$a_7 + b_7 + c_7 \geq 36 < 42$$

$a_3$   
 $b_3$   
 $c_3$



№2



Масштабирование  $\Rightarrow d(a, b) = 1$

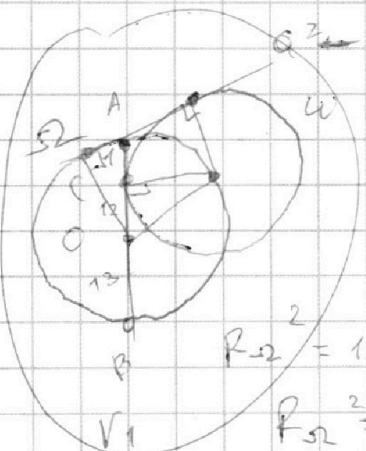
$$\begin{aligned} a &\equiv r_1 \\ b &\equiv r_2 \end{aligned}$$

№4  $a+b \equiv m$

$$a^2 - 9ab + b^2 \equiv m$$

$$\Rightarrow m/b$$

$$m/a$$



$$r_1^2 - 9r_1r_2 + r_2^2 \equiv m$$

$$r_1 + r_2 \equiv 0$$

$$\begin{aligned} (r_1 + r_2)^2 - 11r_1r_2 &\equiv m \\ -11r_1r_2 &\equiv m \end{aligned}$$

$$r_1r_2 + r_2^2 \equiv 0$$

$$r_{\Omega}^2 = 144 + r_w^2$$

$$11r_2^2 \equiv m$$

$$11r_1^2 \equiv m$$

$$\frac{9ab r_1 r_2 \equiv -r_2^2}{m}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Handwritten mathematical work on grid paper. The main problem involves solving a cubic equation:

$$2x^3 - 4x^2 + 7x - 2 = 0$$

The student uses the Rational Root Theorem, testing possible roots  $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$ . They find that  $x = 2$  is a root. They then perform polynomial division to reduce the cubic to a quadratic:

$$(2x^3 - 4x^2 + 7x - 2) : (x - 2) = 2x^2 + 7x - 1$$

The quadratic equation  $2x^2 + 7x - 1 = 0$  is solved using the quadratic formula:

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 8}}{4} = \frac{-7 \pm \sqrt{57}}{4}$$

The final solutions are:

$$x_1 = 2, \quad x_2 = \frac{-7 + \sqrt{57}}{4}, \quad x_3 = \frac{-7 - \sqrt{57}}{4}$$

The work includes several vertical multiplication and division steps, as well as the use of the quadratic formula. There are some corrections and scribbles throughout the work.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



2 5

$$1.5x - y = 3z$$

$$2.) \frac{8}{x} + \frac{1}{y} = \frac{15}{z}$$

3-5.

$$\frac{3 \cdot 20}{4} = \frac{1}{4} \cdot 8yz + xz = 15xy$$

$$383 = 4 \cdot 9z \quad z = \frac{15xy}{8y+x}$$

$$\frac{13 - \sqrt{92}}{4}$$

$$\frac{13 - \sqrt{92}}{4}$$

$$4(5x - y)(8y + x) = 45xy$$

$$\sqrt{A+B} -$$

$$\sqrt{A+5-6x}$$

$$\sqrt{A} = B$$

$$\sqrt{A} = 5 - 6x$$

$$5 - 6x = B$$

$$3x^2 + x + 1 = A$$

$$1/5$$

$$\sqrt{A+3-2.5}$$

$$\sqrt{A-3x+2.5}$$

$$3x^2 - 2x + 3.5 = A$$

$$\frac{383}{28} \cdot 4$$

$$= 4A^2 + 2AB - 2AB^2 + 2AB + B^2 - B^3 - 2AB^2 - B^3 + B^3$$

$$(2A+B-B^2)(2A+B-B^2) =$$

$$= 4(A^2+AB)$$

$$A+B+A - 2\sqrt{(A+B)A} = B^2$$

$$2A+B-B^2 = 2\sqrt{A^2+AB}$$

$$(2A+B-B^2)$$

$$\frac{25x^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2}$$

$$\frac{17}{16} + 6$$

$$= \frac{(5x-y)(5x+y) - z^2}{y^2 + 3z^2}$$

$$= \frac{3x(5x+y) - z^2}{25x^2 - 6y^2}$$

$$25x^2 - 6y^2$$

$$\frac{169}{64}$$

$$\frac{169}{64} = 10.5$$

$$\frac{169}{64} = 10.5$$